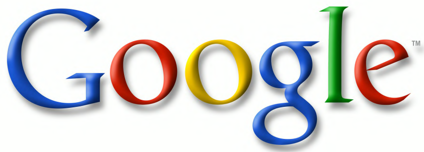
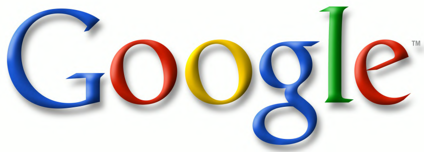

Google



HANDBUCH

DER THEORIE

DER LINEAREN

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

DR. LUDWIG SCHLESINGER,
ORDENTLICHEM PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU KLAUSENBURG.

IN ZWEI BÄNDEN.

ZWEITEN BANDES ZWEITER (SCHLUSS-)THEIL.

MIT FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1898.

Inhaltsverzeichniss und Litteraturnachweis.

Inhaltsverzeichniss.	Litteraturnachweis.

Dreizehnter Abschnitt.

Theorie der elliptischen Modulfunction.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Drittes Kapitel.

Viertes Kapitel.

Fünftes Kapitel.

Vierzehnter Abschnitt.

Theorie der eindeutig umkehrbaren Dreiecksfunctionen.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Drittes Kapitel.

Viertes Kapitel.

Fünfzehnter Abschnitt.

Theorie der Fuchs'schen Functionen.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Drittes Kapitel.

Viertes Kapitel.

Sechzehnter Abschnitt.

Das Poincaré'sche Princip und seine Anwendungen.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Drittes Kapitel.

Viertes Kapitel.

Fünftes Kapitel.

Siebzehnter Abschnitt.

Theorie der Fuchs'schen Zetafunctionen.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Drittes Kapitel.

Viertes Kapitel.

Fünftes Kapitel.

Dreizehnter Abschnitt.

Theorie der elliptischen Modulfunction.

Erstes Kapitel.

260. Die Umkehrungsfunction des elliptischen Integrals erster Gattung. Formulirung des Problems der Theorie der elliptischen Modulfunction.

Die Periodicitätsmoduln $4K$ und $2K'i$ des elliptischen Integrales erster Gattung mit dem Modul $z = x^2$ genügen, wie in der Nr. 248 (Bd. II, 1, S. 477) gezeigt worden ist, als Functionen von z aufgefasst der Legendre'schen Differentialgleichung

$$\text{(L)} \qquad z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + (1-2z)\frac{du}{dz} - \frac{1}{4}u = 0.$$

Das eingehende Studium dieser Differentialgleichung soll uns zunächst beschäftigen.

Um gleich die Beziehung der anzustellenden Erwägungen zu der Theorie der elliptischen Transcendenten hervorzuheben, bemerken wir, dass das Integral erster Gattung

$$\varphi = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-zy^2)}} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(z-x)}}, \quad \left(y^2 = \frac{1}{x}\right),$$

eine Function der beiden von einander unabhängigen Variabeln y und z ist.

Während man nun in der Theorie der elliptischen Transcendenten, wie sie von Abel und Jacobi begründet worden ist, vorwiegend φ als Function von y studirt, indem man dem Modul z einen beliebigen, aber festen Werth beilegt, haben wir es umgekehrt mit der Untersuchung von φ als Function des Moduls z zu thun, wobei wir dem y einen constanten Werth beilegen. Für ein beliebiges y befriedigt das Integral φ offenbar (vergl. die Gleichung (22), Nr. 234, Bd. II, 1, S. 420) die nicht homogene lineare Differentialgleichung

$$z(z-1)\frac{d^2\varphi}{dz^2}+(2z-1)\frac{d\varphi}{dz}+\frac{1}{4}\varphi=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{z}}}\frac{d}{dx}\left\{\frac{\sqrt{x(1-x)(z-x)}}{(z-x)^2}\right\}dx;$$

wir betrachten nur diejenigen y-Werthe, für welche das Glied auf der rechten Seite verschwindet, was offenbar keine wesentliche Beschränkung ist.

In der Theorie der elliptischen Functionen spielt die Umkehrungsfunction y als Function von φ eine wichtige Rolle, ja sie wird sogar seit Abel und Jacobi zur Grundlage der Theorie gemacht, weil sie eine eindeutige Function ist. Und zwar ist y nicht allein eine eindeutige Function von φ, sondern die Darstellung dieser Function

$$y=\sin\operatorname{am}\varphi$$

durch die Jacobi'sche Thetafunction lässt auch erkennen, dass y in sehr übersichtlicher Weise von dem Quotienten

$$\tau=\frac{K'i}{K}$$

der beiden completten Integrale abhängt. Aus dieser Darstellung der Function sin am erhält man, indem man dem φ geeignete constante Werthe beilegt, eine Darstellung des Moduls $\varkappa=\sqrt{z}$ als Function von τ, welche lehrt, dass diese Function, die sogenannte elliptische Modulfunction, eine eindeutige ist.

Es ergiebt sich also aus der Theorie der elliptischen Functionen, dass in der Differentialgleichung (L) die unabhängige Variable z eine eindeutige Function des Quotienten τ zweier linear unabhängiger Integrale ist, ein Resultat, welches uns auf den Gedankenkreis des elften Abschnittes zurückverweist.

Da es uns nicht allein auf die Discussion der Differentialgleichung (L) ankommt, sondern vielmehr auf die Untersuchung allgemeinerer Differentialgleichungen, welche analoge Eigenschaften darbieten, wie die eben für (L) hervorgehobene, so wäre es für unsere Zwecke nicht rathsam, das erwähnte Resultat der Theorie der elliptischen Functionen zu entnehmen, wir werden vielmehr trachten, dasselbe unabhängig von jener Theorie herzuleiten, d. h. genauer gesprochen:

Wir wollen die Eigenschaften von K, $K'i$, τ, z nicht dadurch kennen lernen, dass wir erst die Untersuchung der allgemeinen Beziehung zwischen y, φ, τ, z vornehmen und dann dem φ specielle Werthe zuertheilen, sondern stellen uns die Aufgabe, direct an den Functionen K, $K'i$, beziehungsweise an der Differentialgleichung (L) selbst die Natur der Beziehung zwischen z und τ zu erforschen.

Hierfür bieten sich zwei wesentlich verschiedene Wege dar.

Der eine ist von Herrn Fuchs eingeschlagen worden; bei demselben wird nur von den Entwickelungen der K, $K'i$ in der Umgebung der singulären Stellen und von dem Verhalten derselben bei Umläufen um diese Stellen Gebrauch gemacht, die Darstellung jener Functionen durch bestimmte Integrale kommt nur beiläufig in Betracht. Diesen Weg werden wir später bei der Behandlung von allgemeineren Fragen im Wesentlichen zu befolgen haben.

Der andere Weg schliesst sich wesentlich an die Integraldarstellung der K, $K'i$ an; er hat dem ersteren gegenüber den Mangel, dass er nicht wie dieser unmittelbar für die in Betracht kommenden allgemeineren Fragen nutzbar gemacht werden kann, dagegen führt er in völlig naturgemässer Weise auch zu den aus der Theorie der elliptischen Functionen sich ergebenden Entwickelungen von K, $K'i$ und z als Functionen von τ, und beansprucht überdies ein hervorragendes historisches Interesse, weil Gauss auf demselben in die Theorie der elliptischen Functionen eingedrungen ist. Man bezeichnet diesen Weg nach Gauss als die Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels, und wir wollen nunmehr zur Darlegung dieser Theorie übergehen, indem wir zunächst auf die historische Quelle derselben, die sogenannte Landen'sche Transformation, zurückgreifen.

261. Die Landen'sche Transformation in ihrer historischen Entwickelung. Fagnano, Landen, Lagrange. Anwendungen der Landen'schen Transformation.

Da es äusserst interessant ist zu verfolgen, wie die Landen'sche Transformation sich historisch entwickelt hat, wollen wir in kurzen Umrissen die scheinbar ganz vereinzelt dastehenden Bemerkungen angeben, aus denen sich diese merkwürdige Transformation zusammenfügte.

Die erste Bemerkung verdankt man dem italienischen Mathematiker Grafen Fagnano. Derselbe betrachtet eine Ellipse für rechtwinkelige Coordinaten

(I) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b,$$

und setzt

$$x = a \cos \vartheta,$$

wo also ϑ die excentrische Anomalie bedeutet. Sei M ein Ellipsenpunkt, gehörig zu dem Werthe $\vartheta = \psi$, N ein zweiter Ellipsenpunkt, gehörig zu dem Werthe $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \varphi$, wo zwischen φ und ψ die Beziehung

$$a \operatorname{tg} \psi = b \operatorname{tg} \varphi$$

besteht. Mögen ferner A, B die Punkte sein, in denen die Ellipse von der positiven x- beziehungsweise y-Axe getroffen wird, und bedeute P den Punkt, in welchem die in M an die Ellipse gezogene Tangente das von dem Ellipsenmittelpunkte aus auf dieselbe gefällte Perpendikel schneidet. Dann zeigt Fagnano, dass die Summe der beiden Ellipsenbögen $\widehat{MB}$ und $\widehat{AN}$ gleich der geradlinigen Strecke $\overline{MP}$ ist. Bezeichnet man die rechtwinkeligen Coordinaten von M durch (ξ, η), so ergiebt sich für diese Strecke der Ausdruck

$$\overline{MP} = t = \xi \frac{c^2}{a} \sqrt{\frac{a^2 - \xi^2}{a^4 - c^2 \xi^2}}, \quad c^2 = a^2 - b^2.$$

Landen führt nun in den Ausdruck für den Ellipsenbogen $\widehat{BM}$

$$\widehat{BM} = \int_0^\xi \frac{d\xi}{a} \sqrt{\frac{a^4 - c^2 \xi^2}{a^2 - \xi^2}}$$

die Grösse t als neue Variable ein und findet

$$(\lambda) \qquad 4\widehat{BM} = 2t + \int_0^t dt \frac{\sqrt{(a+b)^2 - t^2}}{\sqrt{(a-b)^2 - t^2}} + \int_0^t dt \frac{\sqrt{(a-b)^2 - t^2}}{\sqrt{(a+b)^2 - t^2}}.$$

Die beiden Integrale auf der rechten Seite dieser Gleichung gestatten eine geometrische Deutung. Das erste ist der Bogen einer Ellipse

$$(\text{II}) \qquad \frac{x^2}{(a+b)^2} + \frac{y^2}{4ab} = 1$$

mit den Halbaxen $a + b$ und $2\sqrt{ab}$, das zweite der Bogen einer Hyperbel mit den Halbaxen $a - b$ und $2\sqrt{ab}$, vermindert um eine gewisse geradlinige Strecke. Der Ellipsenbogen gehört zu dem Abscissenwerthe

$$\xi_1 = \frac{a+b}{a-b} t;$$

setzt man also mit Legendre

$$\xi = a \sin \varphi,$$
$$\xi_1 = (a + b) \sin \varphi_1,$$

so erhält man

$$t = \frac{c^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = (a - b) \sin \varphi_1,$$

woraus sich die Beziehung

$$(1) \qquad \sin \varphi_1 = \frac{c^2}{a-b} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

zwischen den beiden Complementen der excentrischen Anomalien φ, φ_1 der Ellipsen (I) und (II) ergiebt.

Diese Beziehung (1) ist die sogenannte Landen'sche Transformation.

Der Ellipsenbogen $\widehat{BM}$ ist ein elliptisches Integral zweiter Gattung

$$\widehat{BM} = \int_0^{\varphi} \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi,$$

die Landen'sche Gleichung (λ) stellt also die Anwendung der Transformation (1) auf das Integral zweiter Gattung dar. Lagrange hatte zuerst den folgenreichen Gedanken, die Landen'sche Transformation auf das Integral erster Gattung

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

anzuwenden.

Man findet durch einfache Rechnung unmittelbar die Gleichung

$$(2) \qquad \frac{d\varphi_1}{\sqrt{a_1^2 \cos^2 \varphi_1 + b_1^2 \sin^2 \varphi_1}} = 2 \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}},$$

wenn man setzt

$$(3) \qquad a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{ab}.$$

Integrirt man die Gleichung (2) in Bezug auf φ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ und setzt

$$(4) \qquad A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}, \quad A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{a_1^2 \cos^2 \varphi_1 + b_1^2 \sin^2 \varphi_1}},$$

so ergiebt sich, da für $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\sin \varphi_1 = 0, \quad \cos \varphi_1 = -1,$$

also $\varphi_1 = \pi$ ist,

$$2A = \int_0^{\pi} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{a_1^2 \cos^2 \varphi_1 + b_1^2 \sin^2 \varphi_1}} = 2A_1,$$

d. h. wir haben

$$(5) \qquad A = A_1.$$

Wir sehen also, dass das Integral A ungeändert bleibt, wenn man darin a, b ersetzt durch a_1, b_1, d. h. nach den Gleichungen (3), wenn

man statt a, b das **arithmetische** und das **geometrische Mittel** dieser beiden Grössen setzt.

Um den Zusammenhang mit den in der Nr. 248 (Bd. II, 1, S. 478 ff.) benutzten Zeichen herzustellen, führen wir die numerischen Excentricitäten

$$\varkappa = \frac{c}{a}, \quad \varkappa_1 = \frac{a-b}{a+b}$$

der beiden Ellipsen (I), (II) ein. Es ist dann

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}} = \frac{1}{a} \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-\varkappa^2\xi^2)}}$$

und folglich

$$\text{(6)} \quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{a} \displaystyle\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-\varkappa^2\xi^2)}} = \dfrac{1}{a} K(\varkappa^2), \\ A_1 = \dfrac{1}{a_1} \displaystyle\int_0^1 \frac{d\xi_1}{\sqrt{(1-\xi_1^2)(1-\varkappa_1^2\xi_1^2)}} = \dfrac{1}{a_1} K(\varkappa_1^2), \end{cases}$$

die Gleichung (5) ergiebt also

$$\text{(7)} \quad K(\varkappa^2) = (1+\varkappa_1) K(\varkappa_1^2),$$

und nach Einführung der complementären Moduln

$$\varkappa_1' = \sqrt{1-\varkappa_1^2}, \quad \varkappa' = \sqrt{1-\varkappa^2}$$

lautet die Beziehung zwischen $\varkappa$ und $\varkappa_1$

$$\text{(8)} \quad \varkappa_1 = \frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}.$$

Setzt man noch

$$c_1^2 = a_1^2 - b_1^2,$$

so ergiebt sich

$$\text{(9)} \quad \varkappa = \frac{c}{a}, \quad \varkappa' = \frac{b}{a}, \quad \varkappa_1 = \frac{c_1}{a_1}, \quad \varkappa_1' = \frac{b_1}{a_1}.$$

Da wir $a > b$ vorausgesetzt hatten, ist

$$a > c > 0,$$

also liegt $\varkappa$ sowohl wie $\varkappa'$ zwischen Null und Eins. Es ist folglich

$$\varkappa_1 < \varkappa^2 < \varkappa,$$

d. h. wir haben durch die Landen'sche Transformation die Möglichkeit, von einem completten elliptischen Integrale K zu einem ebensolchen mit **kleinerem Modul** überzugehen. Das ist für die numerische Berechnung von $K(\varkappa^2)$ von Wichtigkeit, weil die Reihe (Nr. 248, Bd. II, 1, S. 480)

$$K(\varkappa^2) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \varkappa^2\right)$$

um so besser convergirt, je kleiner $\varkappa^2$ ist. Wir können aber die Landen'sche Transformation auch sofort theoretisch verwerthen.

Beachten wir nämlich, dass die Entwickelung

$$K(\varkappa_1^2) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \varkappa_1^2\right)$$

convergirt für Werthe von $\varkappa_1^2$, deren absoluter Betrag kleiner ist als Eins, und dass zufolge der Gleichung (8) das Innere des Einheitskreises der Ebene der complexen Variabeln

$$z = \varkappa_1^2$$

der ganzen Ebene der complexen Variabeln

$$z = \varkappa^2$$

entspricht, so liefert uns die Gleichung (7) oder

$$K(\varkappa^2) = \frac{\pi}{1+\varkappa'} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \left(\frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}\right)^2\right)$$

eine in der ganzen z-Ebene gültige Darstellung von $K(z)$.

Will man den Modul noch weiter verkleinern, so wird man die Landen'sche Transformation wiederholt anzuwenden haben. Auf diese Weise erhält man den Algorithmus

$$(10) \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad c_n^2 = a_n^2 - b_n^2,$$

$$(11) \quad A_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_{n+1}^2 \cos^2\varphi + b_{n+1}^2 \sin^2\varphi}} = A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}}$$
$$(n = 0, 1, 2, \cdots).$$

262. Der Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels. Darstellung durch das complette elliptische Integral erster Gattung.

Wir betrachten nun mit Lagrange und Gauss den durch die Gleichungen (10) dargestellten Algorithmus, indem wir a, b als beliebige reale positive Grössen

$$a > b, \quad c^2 = a^2 - b^2 > 0$$

voraussetzen und die Quadratwurzeln in den Gleichungen

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{ab}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

und in allen folgenden analogen stets positiv wählen. Dann sind also alle a_n, b_n real positiv, und da

(12) $$a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = \frac{1}{4}(a_n - b_n)^2 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

ist (für $n = 0$ ist $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = c$ zu nehmen), so ist auch stets

$$a_n > b_n.$$

Ferner haben wir, da c_{n+1} positiv sein sollte,

$$c_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} = a_n - a_{n+1},$$

es sind also a_n, b_n die Wurzeln der quadratischen Gleichung

(13) $$u^2 - 2a_{n+1}u + b_{n+1}^2 = 0,$$

und zwar ist

(14) $$\begin{cases} a_n = a_{n+1} + c_{n+1}, \\ b_n = a_{n+1} - c_{n+1}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (10) ergiebt sich unmittelbar

$$a_{n+1} < a_n, \quad b_{n+1} > b_n,$$

d. h. von den beiden durch den Algorithmus (10) gelieferten Zahlenfolgen

(15) $$\begin{cases} a_0, a_1, a_2, \cdots, \\ b_0, b_1, b_2, \cdots \end{cases}$$

nimmt mit wachsendem Index die eine ab und die andere zu. Daraus folgt nach bekannten Principien, dass sich jede der beiden Zahlenfolgen mit wachsendem Index einem bestimmten Grenzwerthe nähert.

Nach den Gleichungen (10) und (12) ist aber

$$\frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{a_n - b_n} = \frac{a_n - b_n}{4} \frac{1}{a_{n+1} + b_{n+1}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}} < \frac{1}{2},$$

also haben wir

$$a_{n+1} - b_{n+1} < \frac{1}{2}(a_n - b_n) < \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}(a_{n-1} - b_{n-1})$$

und folglich allgemein

(16) $$a_n - b_n < \frac{1}{2^n}(a - b) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Für in's Unendliche wachsende Werthe von n ist demnach

(17) $$\lim_n (a_n - b_n) = 0,$$

oder mit andern Worten, es ist

$$\lim_n a_n = \lim_n b_n, \quad \lim_n c_n = 0.$$

Bildet man also aus den realen positiven Grössen a; b die Folgen (15) der arithmetischen und der geometrischen Mittel, so nähern sich beide mit unendlich wachsendem n einem und demselben bestimmten Grenzwerthe.

Man bezeichnet diesen Grenzwerth nach Gauss als das arithmetisch-geometrische Mittel

$$M(a, b)$$

aus den Zahlen a und b.

Bilden wir mit Hülfe der a_n, b_n die Integrale

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_n^2 \cos^2\varphi + b_n^2 \sin^2\varphi}} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

so haben wir nach (11)

$$A = A_1 = A_2 = \cdots = A_n,$$

also ist auch

$$A = \lim_n A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{M(a, b)\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{M(a, b)};$$

der reciproke Werth des arithmetisch-geometrischen Mittels stellt sich also in der Form

$$(18) \qquad \frac{1}{M(a, b)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}$$

durch ein complettes elliptisches Integral erster Gattung dar.

Auf die Grössen $\varkappa$, $\varkappa'$ und K angewandt ergeben diese Resultate das Folgende. Setzen wir

$$\varkappa_n = \frac{c_n}{a_n}, \quad \varkappa_n' = \frac{b_n}{a_n},$$

$$K(\varkappa_n^2) = K_n = a_n A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa_n^2 \sin^2\varphi}},$$

so ist nach Gleichung (7)

$$(19) \qquad K(\varkappa^2) = (1 + \varkappa_1)(1 + \varkappa_2) \cdots (1 + \varkappa_{n+1}) K_{n+1};$$

nun ist aber zufolge der Gleichung (17)

$$(20) \qquad \lim_n \varkappa_n = \lim_n \frac{c_n}{a_n} = 0, \quad \lim_n \varkappa_n' = 1,$$

wir haben folglich

(21) $$\lim_{n} K_n = \frac{\pi}{2}$$

und erhalten hiernach aus (19) die von Legendre gefundene Gleichung

(22) $$K = \frac{\pi}{2} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + \varkappa_\nu).$$

Wir bemerken noch, dass sich aus der Ungleichung (16) auch der Grad der Annäherung von a_n, b_n an den gemeinsamen Grenzwerth ergiebt. Es ist nämlich für ein beliebiges positives ganzzahliges r

$$b_{n+r} < a_{n+r}, \quad a_{n+r} < a_n$$

und folglich

$$b_{n+r} - b_n < a_n - b_n;$$

ebenso folgt aus

$$a_{n+r} > b_{n+r}, \quad b_{n+r} > b_n$$

die Ungleichung

$$a_n - a_{n+r} < a_n - b_n,$$

es sind also stets die Differenzen

$$a_n - a_{n+r}, \quad b_{n+r} - b_n$$

kleiner wie der reciproke Werth von 2^n.

263. Homogene Functionen. Der Algorithmus aus den Grössen a und c. Fortsetzung nach der negativen Seite hin.

Das arithmetisch-geometrische Mittel $M(a, b)$ ist eine homogene Function von a, b. Setzt man nämlich für willkürliches λ

$$a' = \lambda a, \quad b' = \lambda b,$$

so ist auch

$$a_1' = \frac{a' + b'}{2} = \lambda a_1, \quad b_1' = \sqrt{a'b'} = \lambda b_1;$$

wir haben also

$$M(a', b') = \lambda M(a, b),$$

d. h. $M(a, b)$ ist eine homogene Function ersten Grades von a und b.

Nach dem Begriffe des Grenzwerthes ist

$$M(a_n, b_n) = M(a, b) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

folglich genügt sowohl $M(a, b)$ selbst wie auch jede Function von $M(a, b)$

$$\Phi(M(a, b)) = f(a, b)$$

der Functionalgleichung

$$f(a, b) = f\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right).$$

Hat man umgekehrt eine Function $F(a, b)$, die der Functionalgleichung

$$(23) \qquad F(a, b) = F\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = F(a_1, b_1)$$

Genüge leistet, so ist auch

$$F(a, b) = F(a_n, b_n) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

also, wenn wir n in's Unendliche wachsen lassen,

$$F(a, b) = F(\lim_n a_n, \lim_n b_n) = F(M(a, b), M(a, b)),$$

d. h. die Function $F(a, b)$ ist eine Function der einen Variabeln $M(a, b)$. Daraus schliessen wir nach bekannten Sätzen, dass $F(a, b)$ einer partiellen Differentialgleichung Genüge leisten muss.

Die beiden Quotienten

$$\frac{a}{M(a, b)}, \quad \frac{b}{M(a, b)}$$

sind homogene Functionen nullten Grades von a und b, also blosse Functionen von

$$\varkappa' = \frac{b}{a};$$

in der That haben wir z. B.

$$\frac{a}{M(a, b)} = \frac{1}{M(1, \varkappa')} = \frac{2}{\pi} aA = \frac{2}{\pi} K(\varkappa^2) = \frac{2}{\pi} K(1 - \varkappa'^2).$$

Setzen wir in dieser Gleichung $\varkappa$ an die Stelle von $\varkappa'$, so erhalten wir

$$\frac{1}{M(1, \varkappa)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa'^2 \sin^2\varphi}} = \frac{2}{\pi} K(\varkappa'^2),$$

also, da $K(\varkappa'^2)$ nichts anderes ist wie $K'(\varkappa^2)$,

$$\frac{1}{M(1, \varkappa)} = \frac{2}{\pi} K'(\varkappa^2).$$

Wir haben also die Doppelgleichung

$$(24) \qquad \begin{cases} \dfrac{a}{M(a, b)} = \dfrac{1}{M(1, \varkappa')} = \dfrac{2}{\pi} K(\varkappa^2), \\ \dfrac{a}{M(a, c)} = \dfrac{1}{M(1, \varkappa)} = \dfrac{2}{\pi} K'(\varkappa^2). \end{cases}$$

Dies veranlasst uns, aus den Grössen a, c einen ähnlichen Algorithmus zu bilden wie der, den wir aus a, b abgeleitet hatten.

Setzen wir

$$\bar{a}_1 = \frac{a+c}{2}, \quad \bar{c}_1 = \sqrt{ac},$$

und allgemein

(25) $$\bar{a}_{n+1} = \frac{\bar{a}_n + \bar{c}_n}{2}, \quad \bar{c}_{n+1} = \sqrt{\bar{a}_n \bar{c}_n}, \qquad (n=0,1,2,\cdots),$$

wo für $n = 0$ zu setzen ist

$$\bar{a}_0 = a, \quad \bar{c}_0 = c,$$

so haben wir

$$\lim_n \bar{a}_n = \lim_n \bar{c}_n = M(a, c).$$

Der Algorithmus (25) steht nun in einem merkwürdigen Zusammenhange mit dem Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels aus a, b. Es waren a_n, b_n definirt als Wurzeln der quadratischen Gleichung (13) (S. 8); so sind also z. B. a, b die Wurzeln von

$$u^2 - 2a_1 u + b_1^2 = 0$$

und zwar ist

$$a = a_1 + c_1,$$
$$b = a_1 - c_1.$$

Gehen wir nun weiter und bilden die Gleichung

$$u^2 - 2au + b^2 = 0,$$

bezeichnen deren Wurzeln mit

$$a_{-1} = a + c,$$
$$b_{-1} = a - c$$

und setzen

$$c_{-1} = \sqrt{a_{-1}^2 - b_{-1}^2},$$

so können wir in dieser Art fortfahren, d. h. die Wurzeln der Gleichung

$$u^2 - 2a_{-n}u + b_{-n}^2 = 0$$

durch

(26) $$\begin{cases} a_{-n-1} = a_{-n} + c_{-n}, \\ b_{-n-1} = a_{-n} - c_{-n}, \end{cases} \quad c_{-n} = \sqrt{a_{-n}^2 - b_{-n}^2}$$

bezeichnen für $n = 1, 2, 3, \cdots$, und erhalten auf diese Weise eine Folge von Zahlenpaaren a_{-n}, b_{-n}, die wir als die Verlängerung des aus a, b gebildeten Algorithmus der a_n, b_n nach der negativen Seite hin betrachten können. In den beiden Folgen

$$\cdots, a_{-n}, \cdots a_{-1}, a, a_1, \cdots a_n, \cdots$$
$$\cdots, b_{-n}, \cdots b_{-1}, b, b_1, \cdots b_n, \cdots$$

gelten dann offenbar die für positive Indices aufgestellten Beziehungen auch für die negativen Indices.

Aus (26) folgt

(27) $$a^2_{-n-1} - b^2_{-n-1} = c^2_{-n-1} = 4a_{-n}c_{-n},$$

also haben wir für $n = 0$

$$\frac{1}{2}a_{-1} = \frac{a+c}{2}, \quad \frac{1}{2}c_{-1} = \sqrt{ac},$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (25)

$$\frac{1}{2}a_{-1} = \bar{a}_1, \quad \frac{1}{2}c_{-1} = \bar{c}_1.$$

Weiter erhalten wir

$$\frac{1}{2^2}a_{-2} = \frac{a_{-1}+c_{-1}}{2^2} = \frac{\bar{a}_1+\bar{c}_1}{2} = \bar{a}_2,$$

$$\frac{1}{2^2}c_{-2} = \sqrt{\frac{a_{-1}c_{-1}}{2^2}} = \sqrt{\bar{a}_1\bar{c}_1} = \bar{c}_2.$$

Nehmen wir an, es sei schon erwiesen

(28) $$\frac{1}{2^n}a_{-n} = \bar{a}_n, \quad \frac{1}{2^n}c_{-n} = \bar{c}_n,$$

so folgt aus (25), (26), (27)

$$\bar{a}_{n+1} = \frac{\bar{a}_n+\bar{c}_n}{2} = \frac{1}{2^n}\frac{a_{-n}+c_{-n}}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}a_{-n-1},$$

$$\bar{c}_{n+1} = \sqrt{\bar{a}_n\bar{c}_n} = \frac{1}{2^n}\sqrt{a_{-n}c_{-n}} = \frac{1}{2^{n+1}}c_{-n-1},$$

so dass also die Formeln (28) allgemein gültig sind.

Aus (28) ergiebt sich

$$M(a, c) = M(\bar{a}_n, \bar{c}_n) = M\left(\frac{1}{2^n}a_{-n}, \frac{1}{2^n}c_{-n}\right),$$

d. h. wir haben

$$\lim_n \frac{a_{-n}}{2^n} = \lim_n \frac{c_{-n}}{2^n} = \frac{1}{2^n}M(a_{-n}, c_{-n}) = M(a, c),$$

also ist

$$\lim_n a_{-n} = \infty, \quad \lim_n c_{-n} = \infty, \quad \lim_n \frac{c_{-n}}{a_{-n}} = 1, \quad \lim_n b_{-n} = 0.$$

Nun können wir auch den aus a, c entspringenden Algorithmus nach der negativen Seite hin verlängern. Definiren wir nämlich

$$\bar{b}_n^2 = \bar{a}_n^2 - \bar{c}_n^2,$$

so ist nach (28)

$$\bar{b}_n^2 = \frac{a^2_{-n}}{2^{2n}} - \frac{c^2_{-n}}{2^{2n}} = \frac{b^2_{-n}}{2^{2n}}$$

und es hängen die $\bar{a}_n, \bar{c}_n, \bar{b}_n$ ebenso von a, c ab, wie die a_n, b_n, c_n von a, b. Bezeichnen wir also mit

$$\left.\begin{array}{l}\bar{a}_{-n-1} = \bar{a}_{-n} + \bar{b}_{-n},\\ \bar{c}_{-n-1} = \bar{a}_{-n} - \bar{b}_{-n},\end{array}\right| \quad \bar{b}_{-n} = \sqrt{\bar{a}^2_{-n} - \bar{c}^2_{-n}}$$

die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 2\bar{a}_{-n}x + \bar{c}^2_{-n} = 0,$$

so ist

$$\frac{\bar{a}_{-n}}{2^n} = a_n, \quad \frac{\bar{b}_{-n}}{2^n} = b_n, \quad \frac{\bar{c}_{-n}}{2^n} = c_n.$$

und wir haben folglich

$$M(a, b) = M(a_n, b_n) = M(a_{-n}, b_{-n}) = \lim_n \frac{\bar{a}_{-n}}{2^n} = \lim_n \frac{\bar{b}_{-n}}{2^n},$$

$$M(a, b) = 2^{-n} M(\bar{a}_{-n}, \bar{b}_{-n}) = 2^n M(\bar{a}_n, \bar{b}_n),$$

$$M(a, c) = M(\bar{a}_n, \bar{c}_n) = M(\bar{a}_{-n}, \bar{c}_{-n}) = \lim_n \frac{a_{-n}}{2^n} = \lim_n \frac{b_{-n}}{2^n},$$

$$M(a, c) = 2^n M(a_n, c_n) = 2^{-n} M(a_{-n}, c_{-n}).$$

Für die Moduln $\varkappa$ und die Integrale K, K' lassen sich natürlich die analogen Formeln entwickeln. Setzen wir

$$\varkappa_{-n} = \frac{\bar{c}_n}{\bar{a}_n} = \frac{c_{-n}}{a_{-n}}, \quad \varkappa'_{-n} = \frac{\bar{b}_n}{\bar{a}_n} = \frac{b_{-n}}{\bar{a}_{-n}},$$

und bemerken dass

$$\varkappa_n = \frac{c_n}{a_n} = \frac{\bar{c}_{-n}}{\bar{a}_{-n}}, \quad \varkappa_n' = \frac{b_n}{a_n} = \frac{\bar{b}_{-n}}{\bar{a}_{-n}}$$

ist, so haben wir (wie Legendre sagt) die beiden Modulnketten

$$\lim_m \varkappa_{-m} = 1; \cdots \varkappa_{-3}, \varkappa_{-2}, \varkappa_{-1}, \varkappa, \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \cdots; \lim_m \varkappa_m = 0,$$

$$\lim_m \varkappa'_{-m} = 0; \cdots \varkappa'_{-3}, \varkappa'_{-2}, \varkappa'_{-1}, \varkappa', \varkappa_1', \varkappa_2', \varkappa_3', \cdots; \lim_m \varkappa'_m = 1,$$

und es drückt sich $\varkappa_n$ ebenso durch $\varkappa_{n+1}$ aus, wie $\varkappa'_{n+1}$ durch $\varkappa'_n$.

Zweites Kapitel.

264. Reihenentwickelungen für die gefundenen Grenzwerthe. Einführung der Jacobi'schen Grösse q.

Der im vorhergehenden Kapitel entwickelte Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels wurde im Wesentlichen von Lagrange aufgestellt. Gauss hat denselben in der Abhandlung „Determinatio attractionis quam in punctum quodvis positionis datae exerceret planeta etc.“ veröffentlicht, überdies fanden sich aber in seinem Nachlasse Entwürfe zu einer grossartigen Theorie der elliptischen Functionen vor, die von diesem Algorithmus und einem anderen, der mit demselben im Zusammenhange steht, ausgeht. Dieser letztere Algorithmus, der ebenso zu dem allgemeinen elliptischen Integrale führt wie der des arithmetisch-geometrischen Mittels zu dem completten und der, wie P. Günther bemerkt hat, durch eine sich bei Gauss findende trigonometrische Substitution in den der Landen'schen Transformation (1) (Nr. 261, S. 4) übergeht, interessirt uns hier nicht.

Dagegen wollen wir uns der von Gauss angewandten Methode bedienen, um vom arithmetisch-geometrischen Mittel aus zu den merkwürdigen Entwickelungen zu gelangen, die Jacobi und Abel aus den von ihnen aufgestellten Entwickelungen der allgemeinen elliptischen Functionen abgeleitet haben, die aber (nach einer Angabe von Herrn Schering) Gauss schon in sehr früher Zeit (1794, also im Alter von siebzehn Jahren) gekannt zu haben scheint, obwohl er bei Lebzeiten nichts darüber veröffentlicht hat.

Zunächst ergeben sich aus der Definition von $M(a, b)$, $M(a, c)$ unmittelbar Entwickelungen dieser beiden Grössen in Reihenform, wenn wir beachten, dass

$$\lim_{\varkappa} a_{\varkappa} = a_{\lambda} + (a_{\lambda+1} - a_{\lambda}) + (a_{\lambda+2} - a_{\lambda+1}) + \cdots,$$

$$\lim_{\varkappa} \bar{a}_{\varkappa} = \bar{a}_{\lambda} + (\bar{a}_{\lambda+1} - \bar{a}_{\lambda}) + (\bar{a}_{\lambda+2} - \bar{a}_{\lambda+1}) + \cdots$$

ist. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (14) (S. 8) folgt hieraus

$$(29)\qquad \begin{cases} M(a, b) = a_{\lambda} - c_{\lambda+1} - c_{\lambda+2} \cdots, \\ M(a, c) = \bar{a}_{\lambda} - \bar{b}_{\lambda+1} - \bar{b}_{\lambda+2} \cdots. \end{cases}$$

Da ferner

$$\lim_n b_n = b_\lambda + c_{\lambda+1} - c_{\lambda+2} - c_{\lambda+3} - \cdots$$

ist, so erhalten wir auch

$$(30)\qquad \begin{cases} M(a, b) = b_\lambda + c_{\lambda+1} - c_{\lambda+2} - \cdots, \\ M(a, c) = \bar{c}_\lambda + \bar{b}_{\lambda+1} - \bar{b}_{\lambda+2} - \cdots. \end{cases}$$

Die Formeln für $M(a, c)$ können wir auch schreiben

$$M(a, c) = 2^{-\lambda} a_{-\lambda} - 2^{-\lambda-1} b_{-\lambda-1} - 2^{-\lambda-2} b_{-\lambda-2} - \cdots,$$

$$M(a, c) = 2^{-\lambda} c_{-\lambda} + 2^{-\lambda-1} b_{-\lambda-1} - 2^{-\lambda-2} b_{-\lambda-2} - \cdots.$$

Diese Reihen convergiren sehr schnell und sind darum zur numerischen Rechnung wohl geeignet.

Wir wollen nun aus dem Algorithmus der a_n, b_n, c_n einen Algorithmus für die Quadratwurzeln aus diesen Grössen herzuleiten suchen.

Aus den Gleichungen

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}, \quad a_{n+1} = a_{n+2} + c_{n+2}, \quad b_{n+1} = a_{n+2} - c_{n+2}$$

ergiebt sich

$$a_{n+2} = \frac{\frac{a_n + b_n}{2} + \sqrt{a_n b_n}}{2} = \left(\frac{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}}{2}\right)^2,$$

$$c_{n+2} = \frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{2} = \left(\frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{2}\right)^2.$$

Wir finden demnach

$$(31)\qquad \begin{cases} \sqrt{a_{n+2}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}\right), \\ \sqrt{c_{n+2}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right). \end{cases}$$

Nun ist aber

$$\sqrt{M(a, b)} = \lim_\lambda \sqrt{a_\lambda} = \sqrt{a_n} + \left(\sqrt{a_{n+2}} - \sqrt{a_n}\right) + \left(\sqrt{a_{n+4}} - \sqrt{a_{n+2}}\right) + \cdots,$$

also finden wir, da

$$\sqrt{a_{n+2}} - \sqrt{a_n} = -\sqrt{c_{n+2}}$$

ist, die Entwickelung

$$(32)\qquad \sqrt{M(a, b)} = \sqrt{a_n} - \sqrt{c_{n+2}} - \sqrt{c_{n+4}} - \sqrt{c_{n+6}} - \cdots,$$

und da

$$\sqrt{b_n} + 2\sqrt{c_{n+2}} = \sqrt{a_n}$$

ist, so können wir auch schreiben

$$\text{(32a)} \qquad \sqrt{M(a,b)} = \sqrt{b_n} + \sqrt{c_{n+2}} - \sqrt{c_{n+4}} - \sqrt{c_{n+6}} - \cdots.$$

Analog ergiebt sich

$$\sqrt{M(a,c)} = \sqrt{\frac{a_{-n}}{2^n}} - \sqrt{\frac{b_{-n-2}}{2^{n+2}}} - \sqrt{\frac{b_{-n-4}}{2^{n+4}}} - \cdots,$$

$$\sqrt{M(a,c)} = \sqrt{\frac{c_{-n}}{2^n}} + \sqrt{\frac{b_{-n-2}}{2^{n+2}}} - \sqrt{\frac{b_{-n-4}}{2^{n+4}}} - \cdots.$$

Ferner haben wir

$$c_n^2 = a_n^2 - b_n^2 = 4a_{n+1}c_{n+1},$$

und folglich

$$2\,\frac{a_{n+1}}{c_n} = \sqrt{\frac{a_{n+1}}{c_{n+1}}},$$

oder, wie wir auch schreiben können,

$$\frac{4a_n}{c_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}}\sqrt{\frac{4a_{n+1}}{c_{n+1}}}.$$

Nehmen wir hier auf beiden Seiten den Logarithmus, so kommt

$$\log\frac{4a_n}{c_n} = \log\frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{1}{2}\log\frac{4a_{n+1}}{c_{n+1}}.$$

Bilden wir also

$$\frac{M(a_m, c_m)}{M(a_m, b_m)}\log\frac{4a_m}{c_m} = 2\,\frac{M(a_{m+1}, c_{m+1})}{M(a_{m+1}, b_{m+1})}\left(\log\frac{a_m}{a_{m+1}} + \frac{1}{2}\log\frac{4a_{m+1}}{c_{m+1}}\right),$$

so finden wir

$$\frac{M(a_m, c_m)}{M(a_m, b_m)}\log\frac{4a_m}{c_m} = \frac{1}{2^m}\,\frac{M(a,c)}{M(a,b)}\log\frac{a_m}{a_{m+1}} + \frac{M(a_{m+1}, c_{m+1})}{M(a_{m+1}, b_{m+1})}\log\frac{4a_{m+1}}{c_{m+1}}.$$

Setzen wir nunmehr

$$\frac{M(a,b)}{M(a,c)}\,\frac{M(a_n, c_n)}{M(a_n, b_n)}\log\frac{4a_n}{c_n} = \frac{1}{2^n}\log\frac{4a_n}{c_n} = u_n,$$

so haben wir

$$u_{m+1} - u_m = -\frac{1}{2^m}\log\frac{a_m}{a_{m+1}},$$

und da

$$\lim_m u_m = u_n + (u_{n+1} - u_n) + (u_{n+2} - u_{n+1}) + \cdots$$

ist, ergiebt sich die Formel

$$\text{(33)} \qquad \frac{M(a,b)}{M(a,c)}\lim_m \frac{M(a_m, c_m)}{M(a_m, b_m)}\log\frac{4a_m}{c_m} = \frac{1}{2^n}\log\frac{4a_n}{c_n} - \frac{1}{2^n}\log\frac{a_n}{a_{n+1}}$$
$$- \frac{1}{2^{n+1}}\log\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} - \cdots,$$

der die drei analogen Formeln

$$\frac{M(a,b)}{M(a,c)}\lim_m \frac{M(a_m,c_m)}{M(a_m,b_m)}\log\frac{4b_{m+1}}{c_m} = \frac{1}{2^n}\log\frac{4b_{n+1}}{c_n} + \frac{3}{2^{n+1}}\log\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} + \cdots,$$

$$\frac{M(a,c)}{M(a,b)}\lim_m \frac{M(a_{-m},b_{-m})}{M(a_{-m},c_{-m})}\log\frac{4a_{-m}}{b_{-m}} = \frac{1}{2^n}\log\frac{2a_{-n}}{c_{-n}} - \frac{1}{2^n}\log\frac{2a_{-n}}{a_{-n-1}} - \cdots$$

$$\frac{M(a,c)}{M(a,b)}\lim_m \frac{M(a_{-m},b_{-m})}{M(a_{-m},c_{-m})}\log\frac{2c_{-m-1}}{b_{-m}} = \frac{1}{2^n}\log\frac{2c_{-n-1}}{b_{-n}}$$

$$+ \frac{3}{2^{n+1}}\log\frac{1}{2}\frac{c_{-n-2}}{c_{-n-1}} + \cdots$$

an die Seite zu stellen sind.

Die vier auf den linken Seiten auftretenden Grenzwerthe lassen sich auf die gemeinsame Form bringen

$$\lim_{\varepsilon=0} M(1,\varepsilon)\log\frac{4}{\varepsilon},$$

wo ε eine positive gegen Null convergirende Grösse bedeutet. In der That ist z. B., da

$$\lim_m M(a_m, b_m) = \lim_m a_m = M(a,b)$$

ist, der erste Grenzwerth

$$\lim_m \frac{M(a_m,c_m)}{M(a_m,b_m)}\log\frac{4a_m}{c_m} = \lim_m \frac{a_m M(1,\varkappa_m)}{a_m}\log\frac{4}{\varkappa_m} = \lim_m M(1,\varkappa_m)\log\frac{4}{\varkappa_m}.$$

Nun haben wir aber nach (24) (Nr. 263, S. 11)

$$\frac{a_m}{M(a_m,c_m)} = \frac{1}{M(1,\varkappa_m)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa_m'^2\sin^2\varphi}} = \frac{2}{\pi}K'(\varkappa_m^2),$$

also lautet der zu bestimmende Grenzwerth

$$\lim_{\varepsilon=0} M(1,\varepsilon)\log\frac{4}{\varepsilon} = \lim_{z=0}\frac{\frac{\pi}{2}}{K'(z)\frac{1}{\log\frac{4}{\sqrt{z}}}} = \lim_{z=0}\frac{\frac{\pi}{2}}{2K'(z)\frac{1}{\log\frac{16}{z}}}.$$

In dieser Form ergiebt sich derselbe aber unmittelbar aus der in der Nr. 249 (Bd. II, 1, S. 482) abgeleiteten Gleichung

$$\lim_{z=0}(2K'(z) + \log z) = 4\log 2;$$

es ist nämlich

$$\lim_{z=0}\frac{2K'(z)}{\log\frac{16}{z}} = 1,$$

und folglich haben jene vier Grenzwerthe den gemeinsamen Werth $\frac{\pi}{2}$.

Setzen wir nun im Anschlusse an die seit Jacobi übliche Bezeichnung

$$e^{-\pi\frac{M(a,b)}{M(a,c)}} = e^{-\pi\frac{K'}{K}} = q$$

(Gauss bezeichnet dieselbe Grösse durch y), so ist nach (33)

$$\frac{\pi}{2}\frac{M(a,b)}{M(a,c)} = -\frac{1}{2}\log q$$

$$= \frac{1}{2^n}\log\frac{4a_n}{c_n} - \frac{1}{2^n}\log\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}\log\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} - \cdots,$$

also, wenn wir von den Logarithmen zu den Numeris übergehen,

$$\text{(34)} \qquad \sqrt{q} = \left(\frac{c_n}{4a_n}\right)^{\frac{1}{2^n}}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^{\frac{1}{2^n}}\left(\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\right)^{\frac{1}{2^{n+1}}}\cdots,$$

oder da

$$\lim_n u_n = \frac{\pi}{2}\frac{M(a,b)}{M(a,c)} = -\log\sqrt{q}$$

ist, nach der Definition von u_n (S. 17)

$$\sqrt{q} = \lim_n\left(\frac{c_n}{4a_n}\right)^{\frac{1}{2^n}} = \lim_n \sqrt[2^n]{\frac{\varkappa_n}{4}}.$$

265. Beziehungen zwischen den Gauss'schen Functionen P, Q, R. Form der Reihenentwickelungen für diese Functionen.

Die am Schlusse der vorigen Nummer gefundene Formel liefert uns q als Function von $\varkappa$. Es war gezeigt worden (Nr. 263, S. 11), dass die Quotienten

$$\frac{a}{M(a,b)},\quad \frac{b}{M(a,b)},\quad \frac{c}{M(a,b)}$$

als homogene Functionen nullten Grades von a, b blosse Functionen von $\varkappa$ sind. Wir können dieselben demgemäss, da q eine Function von $\varkappa$ und folglich auch umgekehrt $\varkappa$ eine Function von q ist, als Functionen von q betrachten.

Sei in Uebereinstimmung mit der von Gauss benutzten Bezeichnungsweise

$$\sqrt{\frac{a}{M(a,b)}} = P(q),\quad \sqrt{\frac{b}{M(a,b)}} = Q(q),\quad \sqrt{\frac{c}{M(a,b)}} = R(q).$$

Da wir a, b als reale positive Grössen voraussetzen, sind auch $M(a,b)$, $M(a,c)$ real positiv, und folglich ist

$$q = e^{-\pi\frac{M(a,b)}{M(a,c)}} < 1.$$

Bilden wir für beliebiges n

$$q_n = e^{-\pi \frac{M(a_n, b_n)}{M(a_n, c_n)}},$$

so ist wegen

$$M(a, c) = 2^n M(a_n, c_n),$$

(35)
$$q_n = q^{2^n},$$

und folglich

$$\lim_n q_n = 0.$$

Im Sinne der oben eingeführten Bezeichnung ist

(36)
$$\sqrt{\frac{c_n}{M(a_n, b_n)}} = R(q_n) = R(q^{2^n}),$$

also folgt aus der Entwickelung (32) (Nr. 264, S. 16), wenn wir $n = 0$ nehmen und durch $\sqrt{M(a, b)}$ auf beiden Seiten dividiren,

$$1 = \sqrt{\frac{a}{M(a, b)}} - \sqrt{\frac{c_2}{M(a_2, b_2)}} - \sqrt{\frac{c_4}{M(a_4, b_4)}} - \cdots,$$

d. h. in unseren Zeichen

$$1 = P(q) - R(q^{2^2}) - R(q^{2^4}) - \cdots,$$

oder

(37)
$$P(q) = 1 + R(q^{2^2}) + R(q^{2^4}) + \cdots.$$

Analog ergiebt die Gleichung (32a)

(37a)
$$Q(q) = 1 - R(q^{2^2}) + R(q^{2^4}) + \cdots,$$

und hierzu möge noch die Gleichung

(38)
$$R^4(q) = P^4(q) - Q^4(q),$$

die nichts anderes ist wie

$$c^2 = a^2 - b^2,$$

hinzugefügt werden.

Erheben wir die Gleichung (34) in die $(2^{n-1})^{\text{te}}$ Potenz, so kommt

$$q^{2^{n-2}} = \sqrt{\frac{c_n}{4a_n}} \sqrt{\frac{a_n}{a_{n+1}}} \sqrt[4]{\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}} \sqrt[8]{\frac{a_{n+2}}{a_{n+3}}} \cdots,$$

oder etwas anders geschrieben

$$1 = \frac{1}{2} q^{-2^{n-2}} \sqrt{\frac{c_n}{M(a_n, b_n)}} \sqrt{\frac{M(a, b)}{a_n}} \sqrt{\frac{a_n}{a_{n+1}}} \sqrt[4]{\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}} \cdots.$$

Nun ist aber

$$\lim_n \sqrt{\frac{M(a, b)}{a_n}} \sqrt{\frac{a_n}{a_{n+1}}} \sqrt[4]{\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}} \cdots = 1,$$

wir finden also

$$\lim_n \frac{1}{2} q^{-2^n-2} \sqrt{\frac{c_n}{M(a_n, b_n)}} = 1,$$

oder mit Rücksicht auf (35)

$$\lim_n \frac{1}{2} q_n^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{c_n}{M(a_n, b_n)}} = 1,$$

und endlich zufolge der Gleichung (36)

$$\lim_n \frac{1}{2} q_n^{-\frac{1}{4}} R(q_n) = 1.$$

Nun ist aber für in's Unendliche wachsendes n der Grenzwerth von q_n gleich Null, wir können also die letzte Gleichung in der Form

$$\lim_{q=0} \frac{1}{2} q^{-\frac{1}{4}} R(q) = 1,$$

oder in der Form

$$R(q) = 2q^{\frac{1}{4}} \{1 + [q]\} \tag{39}$$

schreiben, wo $[q]$ eine mit q verschwindende Grösse bedeutet. Um uns in die Natur dieser Grösse $[q]$ Einsicht zu verschaffen, müssen wir auf die in den Nummern 248, 249 (Band II, 1, S. 480 ff.) gegebenen Entwickelungen der Grössen K, $K'i$ zurückgreifen.

Setzen wir in den Ausdruck von q

$$q = e^{-\pi \frac{K'(\varkappa^2)}{K(\varkappa^2)}}$$

für K' und K ihre in der Umgebung von

$$\varkappa^2 = z = 0$$

gültigen Entwickelungen

$$K(z) = \frac{\pi}{2} u_{01} = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right),$$

$$K'(z) = \frac{1}{2}(4 \log 2 \cdot u_{01} - u_{02})$$
$$= \frac{1}{2}\left[\log \frac{16}{z} \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right) - F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right)\right]$$

ein, wo (vergl. Nr. 248, Bd. II, 1, S. 479)

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right) = 1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left\{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2\lambda - 1}{2 \cdot 4 \cdots 2\lambda}\right\}^2 z^\lambda,$$

$$F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right) = 4 \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left\{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2\lambda - 1}{2 \cdot 4 \cdots 2\lambda}\right\}^2 \sum_{\nu=1}^{2\lambda} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} z^\lambda$$

zu nehmen ist, so finden wir

$$q = \frac{z}{16} e^{\frac{F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right)}}.$$

Entwickeln wir die Exponentialgrösse in der Umgebung von $z = 0$, so kommt

$$q = \frac{z}{16}\{1 + \overline{\mathfrak{P}}(z)\},$$

wo $\overline{\mathfrak{P}}(z)$ eine gewöhnliche Potenzreihe bedeutet, die für $z = 0$ verschwindet. Nach dem Satze von der Umkehrbarkeit einer Potenzreihe folgt hieraus, dass z in der Umgebung von $q = 0$ in der Form

(40) $$z = \varkappa^2 = 16q(1 + \overline{\overline{\mathfrak{P}}}(q))$$

darstellbar ist, wo $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}(q)$ eine gewöhnliche Potenzreihe darstellt, die für $q = 0$ verschwindet. Erheben wir diese Gleichung in die $\left(\frac{1}{4}\right)^{\text{te}}$ Potenz, so erhalten wir

(41) $$\sqrt{\varkappa} = 2q^{\frac{1}{4}}(1 + \mathfrak{P}(q)),$$

wo auch $\mathfrak{P}(q)$ eine mit q verschwindende gewöhnliche Potenzreihe ist.

Setzen wir ferner in die Entwickelung von $K(z)$

$$\frac{2K(z)}{\pi} = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right)$$

für z seine Entwickelung (40) ein, so finden wir die in einer gewissen Umgebung von $q = 0$ gültige Darstellung

(42) $$\frac{2K(z)}{\pi} = 1 + \mathfrak{P}_1(q),$$

wo $\mathfrak{P}_1(q)$ eine mit q verschwindende gewöhnliche Potenzreihe bedeutet; also erhalten wir, wenn wir endlich die Gleichung (42) in die $\left(\frac{1}{2}\right)^{\text{te}}$ Potenz erheben und mit (41) multipliciren, die in der Umgebung von $q = 0$ gültige Entwickelung

(43) $$\sqrt{\varkappa}\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 2q^{\frac{1}{4}}\{1 + \mathfrak{P}_2(q)\},$$

wo $\mathfrak{P}_2(q)$ wieder eine mit q verschwindende gewöhnliche Potenzreihe darstellt.

Die Gleichung (43) ist aber mit (39) identisch, denn wir haben

$$R(q) = \sqrt{\frac{c}{M(a, b)}} = \sqrt{\varkappa}\sqrt{\frac{2K}{\pi}},$$

die Grösse $[q]$ ist also in der Umgebung von $q = 0$ nach positiven ganzen Potenzen von q entwickelbar; sei

$$[q] = \delta_1 q + \delta_2 q^2 + \delta_3 q^3 + \cdots.$$

Dann haben wir also

$$R(q) = 2q^{\frac{1}{4}}(1 + \delta_1 q + \delta_2 q^2 + \delta_3 q^3 + \cdots)$$

und folglich nach (37), (37a)

$$P(q) = 1 + 2q\left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu q^{4\nu}\right) + 2q^4\left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu q^{16\nu}\right) + \cdots,$$

$$Q(q) = 1 - 2q\left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu q^{4\nu}\right) + 2q^4\left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu q^{16\nu}\right) + \cdots.$$

Setzen wir diese Entwickelungen in die Relation (38) ein, so ergeben sich durch Vergleichung der Coefficienten gleich hoher Potenzen von q auf beiden Seiten Recursionsformeln für die δ_ν, aus welchen man diese Grössen berechnen kann. Für die ersten dieser Grössen findet man leicht

$$\delta_1 = 0, \quad \delta_2 = 1, \quad \delta_3 = 0, \quad \delta_4 = 0, \quad \delta_5 = 0, \quad \delta_6 = 1,$$

also haben wir die Entwickelungen

$$R(q) = 2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{5^2}{4}} + \cdots,$$

$$P(q) = 1 + 2q + 2q^{2^2} + 2q^{3^2} + \cdots,$$

$$Q(q) = 1 - 2q + 2q^{2^2} - 2q^{3^2} + \cdots.$$

266. Ansatz für die Entwickelungen der Functionen P, R, Q. Sätze über die Darstellung einer Zahl als Summe von vier Quadraten. Die biquadratische Relation zwischen den $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$.

Es scheint ziemlich schwierig, aus den in der vorigen Nummer angedeuteten Recursionsformeln das allgemeine Gesetz für die Coefficienten δ_ν abzuleiten. Wir wollen darum einen indirecten Weg einschlagen, indem wir nach dem Gesetze, welches sich aus den ersten hingeschriebenen Gliedern leicht errathen lässt, die Reihen bilden, und für diese dann die Gleichung (38) und die übrigen Gleichungen des arithmetisch-geometrischen Mittels verificiren.

Wir setzen also

$$(44)\qquad \begin{cases} \overline{P}(q) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2}, \\ \overline{Q}(q) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2}, \\ \overline{R}(q) = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}, \end{cases}$$

und versuchen zunächst die Gleichung (38) (Nr. 265, S. 20) zwischen diesen drei Entwickelungen (die für Werthe von q, deren absoluter Betrag kleiner ist wie Eins, offenbar convergent sind) zu verificiren.

Es ist

$$\overline{P}^4(q) = \sum_{(n_1, n_2, n_3, n_4)} q^{n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2},$$

$$\overline{Q}^4(q) = \sum_{(n_1, n_2, n_3, n_4)} (-1)^{n_1+n_2+n_3+n_4} q^{n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2},$$

wo sich die Summenzeichen auf die vier ganzen Zahlen n_1, n_2, n_3, n_4 beziehen, welche unabhängig von einander alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen. Wir haben folglich

$$(45)\qquad \begin{cases} \overline{P}^4 - \overline{Q}^4 = 2\sum_{(n_1, n_2, n_3, n_4)} q^{n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2}, \\ n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

Wenn die Summe von vier Zahlen ungerade ist, so ist auch die Summe ihrer Quadrate ungerade, also haben wir in der letzten Summe allemal

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 \equiv 1 \pmod 2,$$

d. h. die Exponenten sind stets ungerade Zahlen.

Wenn eine ungerade Zahl als Summe von vier Quadraten dargestellt ist, so sind unter den vier Quadratzahlen entweder eine ungerade und drei gerade oder eine gerade und drei ungerade. Im ersteren Falle ist die Zahl

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 \equiv 1 \pmod 4,$$

im letzteren dagegen

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 \equiv 3 \pmod 4.$$

Betrachten wir ferner

$$(46)\qquad \overline{R}^4(q) = \sum_{(n_1, n_2, n_3, n_4)} q^{\frac{1}{4}\left((2n_1+1)^2+(2n_2+1)^2+(2n_3+1)^2+(2n_4+1)^2\right)};$$

der Exponent von q ist hier stets eine ganze und zwar offenbar eine ungerade Zahl. Um nun die rechten Seiten der Gleichungen (45), (46) mit einander zu vergleichen, müssen wir einen Satz kennen lernen, der eine Beziehung zwischen der Anzahl der Zerlegungen einer ungeraden Zahl in eine Summe von vier Quadraten und der Anzahl der Zerlegungen des Vierfachen dieser Zahl in eine Summe von vier ungeraden Quadraten ausspricht.

Wir beweisen zunächst allgemein, dass das Product zweier Summen von vier Quadraten selbst eine Summe von vier Quadraten ist.

Seien $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ reale ganze Zahlen und setzen wir

$$l = a + bi, \quad m = c + di, \quad l' = a - bi, \quad m' = c - di,$$
$$\lambda = \alpha + \beta i, \quad \mu = \gamma + \delta i, \quad \lambda' = \alpha - \beta i, \quad \mu' = \gamma - \delta i,$$

so ist, wie man leicht verificirt,

$$(ll' + mm')(\lambda\lambda' + \mu\mu') = |l\lambda + m\mu|^2 + |l\mu' - ml'|^2,$$

also wenn wir die Werthe einsetzen, wie behauptet wurde,

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = (a\alpha - b\beta + c\gamma - d\delta)^2 + (b\alpha + a\beta + d\gamma + c\delta)^2 + (a\gamma + b\delta - c\alpha - d\beta)^2 + (b\gamma - a\delta - d\alpha + c\beta)^2.$$

Nehmen wir nun

$$\alpha = 1, \quad \beta = -1, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 1,$$

so finden wir

$$(47) \quad 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = (a + b + c - d)^2 + (b - a + d + c)^2 + (a + b - c + d)^2 + (-b + a + d + c)^2,$$

und wenn wir z. B. $-a$ an die Stelle von a setzen,

$$(47a) \quad 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = (b + c - d - a)^2 + (a + b + c + d)^2 + (b + d - a - c)^2 + (d + c - a - b)^2;$$

die anderen Vertauschungen der a, b, c, d mit ihren negativen Werthen ergeben nichts Neues.

Also entsprechen jeder Zerlegung einer Zahl s in eine Summe von vier Quadraten zwei ebensolche Zerlegungen des Vierfachen von s, und zwar ist für ein ungerades s in beiden Zerlegungen von $4s$ jedes der Quadrate eine ungerade Zahl.

Hat man umgekehrt $4s$ dargestellt als Summe von vier ungeraden Quadraten

$$4s = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2,$$

so setzen wir, wenn

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 2 \pmod 4$$

ist, entsprechend der Zerlegung (47),

$$\begin{aligned} -a+b+c+d &= u_1, \\ a-b+c+d &= u_2, \\ a+b-c+d &= u_3, \\ a+b+c-d &= u_4, \end{aligned}$$

und wenn

$$u_1+u_2+u_3+u_4 \equiv 0 \pmod 4$$

ist, entsprechend der Zerlegung (47a),

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= u_1, \\ a+b-c-d &= u_2, \\ a-b+c-d &= u_3, \\ a-b-c+d &= u_4, \end{aligned}$$

dann ergeben sich beide Mal die a, b, c, d als ganze Zahlen, so dass also auch jeder Zerlegung von $4s$ in eine Summe von vier ungeraden Quadraten eine Zerlegung von s in eine Summe von vier Quadraten entspricht. Wir erhalten also den Satz:

Wenn die ungerade Zahl s den Rest 1 modulo 4 lässt, so entsprechen den Darstellungen von $4s$ als Summe von vier ungeraden Quadraten halb so viele Darstellungen von s als Summe von einem ungeraden und drei geraden Quadraten und umgekehrt, den Darstellungen von s in dieser Form doppelt so viele von $4s$ als Summe von vier ungeraden Quadraten.

Wenn die ungerade Zahl s den Rest 3 modulo 4 lässt, so entsprechen den Darstellungen von $4s$ als Summe von vier ungeraden Quadraten halb so viele Darstellungen von s als Summe von drei ungeraden und einem geraden Quadrate, und umgekehrt.

Daraus folgt, dass jede Zahl von der Form

$$n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2, \quad n_1+n_2+n_3+n_4 \equiv 1 \pmod 2$$

zwei Mal vorkommt unter den Zahlen der Form

$$\frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{4}(2m_\nu+1)^2,$$

und dass jede Zahl von der letzteren Form einmal unter den Zahlen der ersteren Form enthalten ist. Es ist also in der That

$$\overline{P}^4 - \overline{Q}^4 = \overline{R}^4.$$

267. Einführung der Jacobi'schen Bezeichnung. Darstellung aller in der Untersuchung vorkommenden Grössen durch die Thetafunctionen. Formulirung des nun zu lösenden Problems.

Wir gehen nun an die Verification der Gleichungen (31) (Nr. 264, S. 16), die wir zunächst in Relationen für die

$$P(q_n)=\sqrt{\frac{a_n}{M(a_n,b_n)}},\quad Q(q_n)=\sqrt{\frac{b_n}{M(a_n,b_n)}},\quad R(q_n)=\sqrt{\frac{c_n}{M(a_n,b_n)}}$$

umgesetzt in der Form

$$\text{(31a)}\qquad \begin{cases} 2\,P(q_{n+2})=P(q_n)+Q(q_n),\\ 2\,R(q_{n+2})=P(q_n)-Q(q_n)\end{cases}$$

schreiben. Von diesen Gleichungen ist nun zu zeigen, dass sie durch die Reihenentwickelungen (44) (S. 24) identisch befriedigt werden.

Für die Entwickelungen (44) haben wir

$$\overline{P}(q)+\overline{Q}(q)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(q^{n^2}+(-1)^n q^{n^2})$$
$$=2\sum_n q^{(2n)^2}=2\sum_n (q^4)^{n^2},$$

also besteht die Gleichung

$$\text{(48)}\qquad \overline{P}(q)+\overline{Q}(q)=2\,\overline{P}(q^4);$$

analog ergiebt sich

$$\text{(48a)}\qquad \overline{P}(q)-\overline{Q}(q)=2\,\overline{R}(q^4).$$

Nun ist aber

$$q_n=q^{2^n},\quad q_{n+2}=q^{2^{n+2}}=q_n^{\,4},$$

die Gleichungen (48), (48a) sind also mit den Gleichungen (31a) identisch.

Setzen wir jetzt für die Quadrate der durch die Entwickelungen (44) definirten Grössen

$$\overline{P}^2(q)=\mathfrak{a},\quad \overline{Q}^2(q)=\mathfrak{b},\quad \overline{R}^2(q)=\mathfrak{c}$$

und bilden mit diesen drei Grössen, die ja die Relation

$$\mathfrak{c}^2=\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2$$

befriedigen, einen Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels

$$\mathfrak{a}_n,\ \mathfrak{b}_n,\ \mathfrak{c}_n\qquad (n=1,2,3\cdots),$$

so haben wir zufolge der Gleichungen (48), (48a)

$$\overline{P}^2(q_{2n})=\mathfrak{a}_{2n},\quad \overline{Q}^2(q_{2n})=\mathfrak{b}_{2n},\quad \overline{R}^2(q_{2n})=\mathfrak{c}_{2n}.$$

Also ist

$$(49)\qquad M(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \lim_{n} \mathfrak{a}_{2n} = \lim_{n} \overline{P}^2(q_{2n}) = \lim_{q=0} \overline{P}^2(q) = 1.$$

Ferner ist nach den Gesetzen des arithmetisch-geometrischen **Mittels** (vergl. Nr. 264, S. 17 ff.)

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{M(\mathfrak{a},\mathfrak{b})}{M(\mathfrak{a},\mathfrak{c})} = \lim_{n} \log\left\{\frac{4\mathfrak{a}_{2n}}{\mathfrak{c}_{2n}}\right\}^{\frac{1}{2^{2n}}};$$

setzen wir hierin für $\mathfrak{a}_{2n}$, $\mathfrak{c}_{2n}$ ihre Entwickelungen ein, so erhalten wir

$$\frac{4\mathfrak{a}_{2n}}{\mathfrak{c}_{2n}} = \frac{(1+2q_{2n}+2q_{2n}^4+\cdots)^2}{\sqrt{q_{2n}}\,(1+q_{2n}^2+q_{2n}^{2\cdot 3}+\cdots)^2},$$

und wenn wir auf beiden Seiten die $(2^{2n})^{\text{te}}$ Wurzel ziehen,

$$\left(\frac{4\mathfrak{a}_{2n}}{\mathfrak{c}_{2n}}\right)^{\frac{1}{2^{2n}}} = q^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{1+2q_{2n}+\cdots}{1+q_{2n}^2+\cdots}\right\}^{\frac{1}{2^{2n-1}}},$$

also ergiebt sich als Grenzwerth des Logarithmus für unendlich wachsendes n

$$(50)\qquad \frac{\pi}{2}\,\frac{M(\mathfrak{a},\mathfrak{b})}{M(\mathfrak{a},\mathfrak{c})} = \log q^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\log q.$$

Sei nun $\mathfrak{q}$ irgend eine noch zu bestimmende Grösse, deren absoluter Betrag kleiner ist wie Eins, und setzen wir

$$a = \varrho\,\overline{P}^2(\mathfrak{q}),\quad b = \varrho\,\overline{Q}^2(\mathfrak{q}),$$

wo ϱ eine ebenfalls zu bestimmende Grösse bedeutet, so ist

$$c = \varrho\,\overline{R}^2(\mathfrak{q}),$$

und wir haben mit Rücksicht auf (49)

$$M(a,b) = \varrho\,M(\overline{P}^2(\mathfrak{q}),\,\overline{Q}^2(\mathfrak{q})) = \varrho,$$
$$M(a,c) = \varrho\,M(\overline{P}^2(\mathfrak{q}),\,\overline{R}^2(\mathfrak{q})).$$

Da aber nach (50)

$$-\frac{M(\overline{P}^2(\mathfrak{q}),\,\overline{Q}^2(\mathfrak{q}))}{M(\overline{P}^2(\mathfrak{q}),\,\overline{R}^2(\mathfrak{q}))} = \frac{\log\mathfrak{q}}{\pi}$$

und andererseits

$$-\frac{M(a,b)}{M(a,c)} = \frac{\log q}{\pi}$$

ist, so ist $\mathfrak{q}$ mit q identisch, d. h. wir haben

$$\sqrt{\frac{a}{M(a,b)}} = \overline{P}(q),\quad \sqrt{\frac{b}{M(a,b)}} = \overline{Q}(q),\quad \sqrt{\frac{c}{M(a,b)}} = \overline{R}(q),$$

und damit sind die Entwickelungen (44) verificirt, d. h. es ist gezeigt, dass

$$P(q) = \overline{P}(q), \quad Q(q) = \overline{Q}(q), \quad R(q) = \overline{R}(q).$$

sein muss.

Wir führen nun die in der Theorie der elliptischen Functionen gebräuchlichen Zeichen ein. Setzen wir

$$\tau = i\,\frac{M(a,\,b)}{M(a,\,c)} = \frac{1}{\pi i}\log q = \frac{K'i}{K},$$

so dass also

$$q = e^{\tau\pi i}$$

ist, so ist τ eine imaginäre Grösse mit positivem Coefficienten von i. Man bezeichnet dann nach Jacobi

$$P(q) = \vartheta_3(\tau), \quad Q(q) = \vartheta(\tau), \quad R(q) = \vartheta_2(\tau)$$

und hat folglich für diese drei Thetafunctionen die Entwickelungen

$$\vartheta_3(\tau) = 1 + 2e^{\tau\pi i} + 2e^{4\tau\pi i} + \cdots,$$

$$\vartheta(\tau) = 1 - 2e^{\tau\pi i} + 2e^{4\tau\pi i} - \cdots,$$

$$\vartheta_2(\tau) = 2e^{\frac{\tau\pi i}{4}}\,(1 + e^{2\tau\pi i} + e^{2\cdot 3\tau\pi i} + \cdots).$$

Das Ergebniss der durchgeführten Untersuchung lässt sich dann wie folgt aussprechen:

Sind a, b, c drei reale positive, durch die Gleichung

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad a > b,$$

mit einander verknüpfte Grössen, und bestimmt man eine Grösse τ durch die Gleichung

$$\tau = i\,\frac{M(a,\,b)}{M(a,\,c)},$$

so stellen sich die a, b, c durch die Formeln

(I) $\quad a = M(a,\,b)\,\vartheta_3^{\,2}(\tau), \quad b = M(a,\,b)\,\vartheta^2(\tau), \quad c = M(a,\,b)\,\vartheta_2^{\,2}(\tau)$

dar.

Wir ziehen hieraus noch einige Consequenzen, indem wir zuvörderst

$$a = \bar{\varrho}\,\vartheta_3^{\,2}(\sigma), \quad c = \bar{\varrho}\,\vartheta^2(\sigma), \quad b = \bar{\varrho}\,\vartheta_2^{\,2}(\sigma)$$

setzen und die $\bar{\varrho}$, σ zu bestimmen suchen. Es ergiebt sich

$$M(a,\,c) = \bar{\varrho}\,M(\vartheta_3^{\,2}(\sigma),\,\vartheta^2(\sigma)) = \bar{\varrho},$$

$$\sigma = i\,\frac{M(a,\,c)}{M(a,\,b)} = \frac{-1}{\tau},$$

wir können also den Formeln (I) die Gleichungen

(II) $\quad a = M(a,c)\,\vartheta_3^{\,2}\left(\frac{-1}{\tau}\right), \quad b = M(a,c)\,\vartheta_2^{\,2}\left(\frac{-1}{\tau}\right), \quad c = M(a,c)\,\vartheta^2\left(\frac{-1}{\tau}\right)$

an die Seite stellen.

Ferner ist

$$a_n = M(a_n, b_n)\vartheta_3^2(\tau_n), \quad b_n = M(a_n, b_n)\vartheta^2(\tau_n), \quad c_n = M(a_n, b_n)\vartheta_2^2(\tau_n),$$

wo τ_n durch die Gleichung

$$\tau_n = i\,\frac{M(a_n, b_n)}{M(a_n, c_n)}$$

definirt wird. Wir haben also

$$\tau_n = i\cdot 2^n\,\frac{M(a, b)}{M(a, c)} = 2^n\tau = \frac{1}{\pi i}\log q_n,$$

und somit sind die nach dem Früheren nur für geradzahlige Werthe von n abgeleiteten Beziehungen

(III) $a_n = M(a,b)\vartheta_3^2(2^n\tau), \; b_n = M(a,b)\vartheta^2(2^n\tau), \; c_n = M(a,b)\vartheta_2^2(2^n\tau)$

für beliebige ganzzahlige Werthe von n erwiesen. Nach den Gesetzen des arithmetisch-geometrischen Mittels bestehen folglich die Thetarelationen:

(IV) $$\begin{cases} 2\vartheta_3^2(2\tau) = \vartheta_3^2(\tau) + \vartheta^2(\tau), \\ \vartheta^2(2\tau) = \vartheta_3(\tau)\vartheta(\tau). \end{cases}$$

Für die Grössen $\varkappa$, K, K' liefern die abgeleiteten Formeln mit Rücksicht auf die Gleichungen (24) (Nr. 263, S. 11) die folgenden Ausdrücke. Setzt man

(V) $$\tau = \frac{K'i}{K},$$

so ist

(VI) $$\varkappa = \frac{\vartheta_2^2(\tau)}{\vartheta_3^2(\tau)}, \quad \varkappa' = \sqrt{1-\varkappa^2} = \frac{\vartheta^2(\tau)}{\vartheta_3^2(\tau)},$$

(VII) $$\frac{2K}{\pi} = \vartheta_3^2(\tau), \quad \frac{2K'}{\pi} = \vartheta_3^2\left(-\frac{1}{\tau}\right);$$

diese Entwickelungen gelten aber vorläufig nur für reale positive Werthe von $\varkappa$ und $\varkappa'$.

Nach einem bekannten Principe der Functionenlehre können wir aber sofort schliessen, dass die für den so beschränkten Bereich abgeleiteten Beziehungen solange gültig bleiben, als die in denselben auftretenden Reihenentwickelungen convergent sind. Dies ist offenbar der Fall, wenn τ eine complexe Grösse bedeutet, deren Coefficient von i einen wesentlich positiven Werth hat.

Die Entwickelungen (VI) gelten also für diejenigen Werthe von $\varkappa$, für welche die durch die Gleichung (V) definirte Grösse τ einen positiven Coefficienten von i besitzt. Für diese Werthe sind dann $\varkappa$ und $\varkappa'$ als eindeutige Functionen von τ, d. h. als eindeutige Functionen des Quotienten zweier Fundamentallösungen der Legendre'schen Differentialgleichung (L) dargestellt.

Es entsteht nun die Frage nach dem Werthebereich von $\varkappa$ beziehungsweise von $z = \varkappa^2$, für welchen die Bedingung erfüllt ist, dass die Grösse τ einen positiven Coefficienten von i besitzt; es wird sich zeigen, dass dieser Bereich die ganze complexe z-Ebene mit Ausnahme der singulären Stellen 0, 1, ∞ umfasst.

Die Richtigkeit dieses überaus wichtigen Satzes kann auf mannigfaltige Weise erwiesen werden. Riemann hat für denselben einen (den allgemeinen Fall eines beliebigen algebraischen Gebildes umfassenden) Beweis geliefert, der direct von der Darstellung von K und K' durch die bestimmten Integrale ausgeht. Einen anderen Beweis hat Herr Fuchs gegeben, indem er von der Differentialgleichung (L) ausgeht. Wir werden im Wesentlichen der von Herrn Fuchs vorgezeichneten Methode folgen, wollen aber, ehe wir auf die Darlegung derselben eingehen, zeigen, welche Folgerungen sich aus dem in Rede stehenden Satze ziehen lassen.

Nehmen wir also an, es sei gezeigt, dass für jeden Werth von z (mit Ausnahme von 0, 1, ∞), also auch für jeden Werth von $\varkappa$, der Coefficient von i in τ wesentlich positiv ist.

Dann folgt aus der Darstellung (VI), dass $\varkappa$ sowohl wie $\varkappa'$ und folglich auch z eindeutige Functionen des Integralquotienten τ der linearen Differentialgleichung (L) sind (vergl. Nr. 260, S. 2). Ebenso sind nach (VII) auch die Integrale K, K' von (L) selbst eindeutige Functionen von τ. Ferner würden die Gleichungen (I) bis (IV) lehren, dass der direct nur für reale positive a, b, c aufgestellte Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels für beliebige complexe Werthe dieser Grössen unverändert besteht, sofern man das Vorzeichen der Quadratwurzeln, durch welche die b_n, c_n bestimmt werden, den Gleichungen (I) und (III) gemäss einrichtet. Es lassen sich dann aus den Gesetzen des arithmetisch-geometrischen Mittels alle Eigenschaften der Function $\varkappa$ von τ in äusserst eleganter und einfacher Weise ableiten, wir kommen hierauf an spätererer Stelle zurück.

Jetzt knüpfen wir an die Thatsache an, dass sich uns in der Differentialgleichung (L) ein besonderer Fall einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung und insbesondere der Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe darbietet, in welchem die unabhängige Variable eine eindeutige Function des Integralquotienten ist, und stellen uns demgemäss die Aufgabe:

Diejenigen Fälle der Differentialgleichung der Gaussschen Reihe anzugeben, in denen die unabhängige Variable als eine eindeutige Function des Integralquotienten erscheint.

Drittes Kapitel.

268. **Die Gauss'sche Differentialgleichung in der canonischen Form und für reale Werthe der Differenzen der Wurzeln der determinirenden Gleichungen. Abbildung durch den Integralquotienten bei specieller Wahl der Querschnitte.**

Die am Schlusse der vorigen Nummer formulirte Aufgabe wurde zuerst von Herrn Schwarz gelöst bei Gelegenheit einer Untersuchung derjenigen Fälle, in denen die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ eine algebraische Function von z darstellt. Indem wir jetzt zu einer Darlegung der von Herrn Schwarz erlangten Resultate übergehen, greifen wir auf die allgemeinen Ueberlegungen des elften Abschnittes (Nrn. 196 ff.) zurück.

Wir denken uns zunächst die Differentialgleichung (G) (Nr. 70, Bd. I, S. 252) auf die canonische Form gebracht, indem wir (vergl. Nr. 172, Bd. II, 1, S. 147) für

$$p_1 = \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)z}{z(1-z)}, \quad p_2 = \frac{-\alpha\beta}{z(1-z)}$$

den invarianten Ausdruck

$$q(z) = \frac{1}{4} p_1^2 + \frac{1}{2} p_1'(z) - p_2$$

bilden. Setzen wir

(1) $$(1-\gamma)^2 = \delta_1^2, \quad (\gamma - \alpha - \beta)^2 = \delta_2^2, \quad (\alpha - \beta)^2 = \delta_3^2,$$

so sind $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ die Differenzen der Wurzeln der zu den singulären Punkten

$$z = 0, 1, \infty$$

gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen; wir denken uns die Quadratwurzeln aus den Ausdrücken (1) so gewählt, dass die realen Theile der $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ nicht negativ sind.

Dann lautet die canonische Form der Differentialgleichung (G)

(2) $$\frac{d^2 w}{dz^2} = q(z) w,$$

wo

(3) $$q(z) = \frac{1}{4}\left\{\frac{\delta_1^2 - 1}{z^2} + \frac{\delta_2^2 - 1}{(1-z)^2} + \frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_3^2 - 1}{z(1-z)}\right\},$$

(4) $$w = u \cdot z^{\frac{\gamma}{2}} (1 - z)^{\frac{(\alpha + \beta + 1) - \gamma}{2}},$$

zu nehmen ist, und der Quotient

$$\eta(z) = \frac{v_2}{v_1}$$

eines Fundamentalsystems v_1, v_2 von (2) genügt der Differentialgleichung dritter Ordnung

(5) $$\Delta \binom{\eta}{z} = q(z),$$

deren allgemeines Integral in der Form

(6) $$\frac{\alpha \eta(z) + \beta}{\gamma \eta(z) + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

enthalten ist.

Wenn z eine eindeutige Function von η sein soll, so müssen nach den Ergebnissen der Nr. 197 (Bd. II, 1, S. 256) die Grössen δ_1, δ_2, δ_3 entweder gleich reciproken ganzen Zahlen oder gleich Null gewählt werden. Nehmen wir allgemeiner δ_1, δ_2, δ_3 real positiv und kleiner als Eins, so ist die Differentialgleichung (2) mit der in der Nr. 216 (Bd. II, 1, S. 343 ff.) aufgestellten für $\sigma = 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ identisch, die Function z von η hat also nach den daselbst erlangten Ergebnissen die folgenden Eigenschaften.

Legen wir von $z = 0$ und $z = 1$ aus Querschnitte l_1, l_2 nach dem Unendlichen, so ist die so zerschnittene z-Ebene $\overline{T}$ die eindeutig conforme Abbildung eines Fundamentalbereiches F_0 der η-Ebene, welcher die vier Ecken

$$\lambda_1, \lambda_3, \lambda_2, \lambda_3'$$

und in den von diesen gebildeten Cykeln

$$\lambda_1, \lambda_2, (\lambda_3, \lambda_3')$$

die Winkelsummen

$$2\pi\delta_1, \; 2\pi\delta_2, \; 2\pi\delta_3$$

besitzt. Dabei sind die λ_1, λ_2', λ_3 als Doppelpunkte der Substitutionen

$$A_1, \; A_2, \; A_3 = A_1^{-1} A_2^{-1}$$

bestimmt, die η erfährt, wenn z beziehungsweise einfache positive Umläufe um die Punkte 0, 1, ∞ ausführt, und welche die Seitenpaare von F_0

$$s_1 = (\lambda_1, \lambda_3), \qquad s_1' = (\lambda_1, \lambda_3'),$$
$$s_2 = (\lambda_3', \lambda_2), \qquad s_2' = (\lambda_3, \lambda_2)$$

in der durch die Gleichungen

$$s_1' = A_1 s_1, \quad s_2' = A_2 s_2$$

angedeuteten Weise in einander überführen.

Die Gestalt jener Seitenpaare hängt wesentlich von der Gestalt der in der z-Ebene gelegten Querschnitte l_1, l_2 ab. Wir wollen diesen Querschnitten selbst eine besondere Form beilegen, wodurch die Seiten von F_0 eine besonders einfache Gestalt erhalten.

Wir denken uns nämlich den Querschnitt l_1 längs der negativen realen z-Axe, den Querschnitt l_2 längs der positiven realen z-Axe von 0 beziehungsweise 1 nach $z = \infty$ hin gelegt, so dass also ein in der zerschnittenen z-Ebene $\overline{T}$ verlaufender Weg, der von der oberen z-Halbebene (wo der Coefficient von i in z positiv ist) in die untere z-Halbebene (wo der Coefficient von i in z negativ ist) führt oder umgekehrt, die reale z-Axe zwischen 0 und 1 überschreiten muss. Es handelt sich dann darum, die η-Werthe zu bestimmen, die den Punkten z auf beiden Ufern von l_1, l_2 entsprechen.

Zerlegen wir z und η in ihre realen und imaginären Theile

$$z = x + yi, \quad \eta(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

wo also $u(x, y)$, $v(x, y)$ reale Functionen der realen Variabelen x, y bedeuten, so ist der conjugirte complexe Werth von $\eta(z)$

$$\overline{\eta(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$$

eine monogene Function von

$$\bar{z} = x - yi,$$

und man hat, wenn wir allgemein durch einen Ueberstrich die conjugirte einer complexen Grösse andeuten,

$$\frac{d^\varkappa \overline{\eta(z)}}{d\bar{z}^\varkappa} = \overline{\left(\frac{d^\varkappa \eta(z)}{dz^\varkappa}\right)} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \cdots).$$

Also ist auch

$$\Delta\left(\frac{\bar{\eta}}{\bar{z}}\right) = \overline{\Delta\left(\frac{\eta}{z}\right)} = \overline{q(z)},$$

oder da $q(z)$ reale Coefficienten hat, und folglich

$$\overline{q(z)} = q(\bar{z})$$

ist,

$$\Delta\left(\frac{\bar{\eta}}{\bar{z}}\right) = q(\bar{z}).$$

Die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\Delta\left(\frac{\zeta}{\bar{z}}\right) = q(\bar{z})$$

besitzt also die beiden particularen Integrale

$$\overline{\eta(z)} = u(x, y) - iv(x, y),$$
$$\eta(\bar{z}) = u(x, -y) + iv(x, -y),$$

und es besteht folglich zwischen diesen beiden Grössen die Beziehung

$$(7) \qquad \eta(\bar{z}) = \frac{\alpha\,\overline{\eta(z)} + \beta}{\gamma\,\overline{\eta(z)} + \delta},$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Constanten bedeuten, für die

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

ist.

Wenn wir also von dem Punkte $x + yi$ der z-Ebene z. B. auf einem in der zerschnittenen z-Ebene $\overline{T}$ verlaufenden Wege zu dem Punkte $x - yi$ gehen, so erhalten wir daselbst einen Werth von η, der aus dem conjugirten Werthe von $\eta(x + yi)$ durch die projective Substitution (7) hervorgeht. Dabei bleibt diese Substitution offenbar dieselbe, wo auch der Punkt $x + yi$ angenommen werden mag, wenn nur der Weg von $x + yi$ zu dem Punkte $x - yi$ in der zerschnittenen Fläche $\overline{T}$ ausgeführt wird. Es ist also auch

$$\eta(z) = \frac{\alpha\,\overline{\eta(\bar{z})} + \beta}{\gamma\,\overline{\eta(\bar{z})} + \delta} = \frac{\alpha[u(x, -y) - iv(x, -y)] + \beta}{\gamma[u(x, -y) - iv(x, -y)] + \delta},$$

und wenn wir auf beiden Seiten dieser Gleichung i in $-i$ verwandeln,

$$(8) \qquad \overline{\eta(z)} = \frac{\bar{\alpha}[u(x, -y) + iv(x, -y)] + \bar{\beta}}{\bar{\gamma}[u(x, -y) + iv(x, -y)] + \bar{\delta}} = \frac{\bar{\alpha}\,\eta(\bar{z}) + \bar{\beta}}{\bar{\gamma}\,\eta(\bar{z}) + \bar{\delta}}.$$

Vergleichen wir die Gleichungen (7), (8) mit einander, so schliessen wir, dass

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} & \bar{\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

sein muss, d. h. es ist

$$(9) \qquad \begin{cases} \bar{\alpha}\alpha + \bar{\beta}\gamma = 1, & \bar{\alpha}\beta + \bar{\beta}\delta = 0, \\ \bar{\gamma}\alpha + \bar{\delta}\gamma = 0, & \bar{\gamma}\beta + \bar{\delta}\delta = 1, \end{cases}$$

und hieraus folgt, wenn wir z. B. γ von Null verschieden voraussetzen,

$$\frac{\bar{\delta}}{\bar{\gamma}} = -\frac{\alpha}{\gamma}, \qquad \frac{\bar{\beta}}{\bar{\gamma}} = \frac{\beta}{\gamma},$$

$$\frac{\alpha\delta}{\gamma^2} - \frac{\beta}{\gamma} = \frac{-1}{\gamma\bar{\gamma}} < 0.$$

Setzen wir also

$$\frac{\delta}{\gamma} = \frac{a_0}{c_0}, \qquad \frac{\beta}{\gamma} = -\frac{b_0}{c_0},$$

so ist b_0 real, wenn wir c_0 real wählen und

$$\frac{\alpha}{\gamma} = -\frac{\bar{a}_0}{c_0}, \qquad -a_0\bar{a}_0 + b_0c_0 < 0;$$

die Substitution (7) hat demnach die Form

(10) $$\eta(\bar{z}) = \frac{-\bar{a}_0\overline{\eta(z)} - b_0}{c_0\overline{\eta(z)} + a_0} = B_0\overline{\eta(z)}.$$

Für Werthe von z auf dem zwischen 0 und 1 gelegenen Theile der realen Axe von $\overline{T}$ ist folglich

$$\eta(x) = \frac{-\bar{a}_0\overline{\eta(x)} - b_0}{c_0\overline{\eta(x)} + a_0}, \qquad (0 < x < 1),$$

d. h. die diesen z-Werthen entsprechenden η-Werthe befriedigen die Gleichung

(11) $$c_0\eta\bar{\eta} + a_0\eta + \bar{a}_0\bar{\eta} + b_0 = 0,$$

die einen Kreis s_0 und zwar, da

$$-a_0\bar{a}_0 + b_0c_0 < 0$$

ist, einen realen Kreis der η-Ebene darstellt. Wir wollen c_0 so wählen, dass

$$-a_0\bar{a}_0 + b_0c_0 = -1$$

sei.

269. Kreisbogenvierecke. Symmetrie in Bezug auf die Diagonale. Spiegelungen.

Wenn wir von einem z-Punkte in $\overline{T}$ ausgehend einen der Querschnitte l_1, l_2 in positiver oder negativer Richtung überschreiten, so gelangen wir im Sinne der in Nr. 210 (Bd. II, 1, S. 312 ff.) eingeführten Vorstellungs- und Bezeichnungsweise in die Blätter

$$\overline{T}_1,\ \overline{T}_2,\ \overline{T}_{-1},\ \overline{T}_{-2},$$

die den Zweigen

$$\eta_\varkappa(z) = A_\varkappa\eta(z), \quad \eta_{-\varkappa}(z) = A_{-\varkappa}\eta(z), \quad (A_{-\varkappa} = A_\varkappa^{-1})$$
$$(\varkappa = 1, 2)$$

des Integralquotienten η entsprechen, und deren eindeutig conforme Abbildungen auf die η-Ebene durch die Bereiche

$$F_1,\ F_2,\ F_{-1},\ F_{-2}$$

geliefert werden.

Gehen wir im Blatte $\overline{T}_\varkappa$ von einem Punkte z zu seinem conjugirten $\bar{z}$, also so, dass wir die reale Axe zwischen 0 und 1 überschreiten, so gelangen wir in der η-Ebene vom Punkte $\eta_\varkappa(z)$ zu dem Punkte

(12) $$\eta_\varkappa(\bar{z}) = A_\varkappa B_0 \bar{A}_\varkappa^{-1}\overline{\eta_\varkappa(z)} \qquad (\varkappa = +1, +2, -1, -2),$$

wenn wir mit $\bar{A}_\varkappa$ diejenige Substitution bezeichnen, die aus $A_\varkappa$ dadurch entsteht, dass wir in den Coefficienten von $A_\varkappa$ an die Stelle von $+i$ setzen $-i$.

Aus (12) folgt, dass für Werthe x von z, die zwischen 0 und 1 auf der realen Axe des Blattes $\overline{T}_{\varkappa}$ liegen, die entsprechenden η-Werthe die Gleichung

$$(13) \qquad \eta = A_{\varkappa} B_0 \overline{A}_{\varkappa}^{-1} \overline{\eta}$$

befriedigen, die offenbar einen Kreis darstellt, der nichts anderes ist, wie die Abbildung des Kreises s_0 durch die lineare Function $A_{\varkappa}\eta$.

Ferner haben wir nach (10) oder (12)

$$(14) \qquad \eta_{\varkappa}(\bar{z}) = A_{\varkappa}\eta(\bar{z}) = A_{\varkappa} B_0 \overline{\eta(z)},$$

d. h. wenn wir von einem Punkte z von $\overline{T}$ ausgehend, den Querschnitt $l_{|\varkappa|}$ von demjenigen Ufer aus überschreiten, längs welchem die Flächen $\overline{T}$ und $\overline{T}_{\varkappa}$ mit einander zusammenhängen, und dann zu dem conjugirten Punkte $\bar{z}$ von $\overline{T}_{\varkappa}$ hingehen, so gelangen wir von $\eta(z)$ aus zu dem durch die Gleichung (14) dargestellten Punkte der η-Ebene.

Die Gleichung (14) liefert eine Beziehung zwischen den beiden monogenen Functionen

$$\overline{\eta(z)} \quad \text{und} \quad \eta_{\varkappa}(\bar{z})$$

der complexen Variabeln $\bar{z}$; diese Beziehung muss folglich nach einem bekannten Principe der Functionentheorie auch zwischen allen Fortsetzungen dieser beiden Functionen bestehen. Es ist demnach auch

$$(14\text{a}) \qquad \eta(z) = A_{\varkappa} B_0 \overline{\eta_{\varkappa}(z)}.$$

Beachten wir nun, dass B_0 mit der Substitution $\overline{B}_0$, die aus B_0 hervorgeht, indem wir in jedem Coefficienten von B_0 $+i$ in $-i$ verwandeln, durch die Gleichung

$$\overline{B}_0 = B_0^{-1}$$

verbunden ist, so ergiebt sich, wenn wir in der Gleichung (14a) an die Stelle von $+i$ setzen $-i$:

$$(15) \qquad \overline{\eta(z)} = \overline{A}_{\varkappa} B_0^{-1} \eta_{\varkappa}(\bar{z}).$$

Aus den beiden Gleichungen (14), (15) ergiebt sich nunmehr

$$(16) \qquad A_{\varkappa} B_0 \overline{A}_{\varkappa} B_0^{-1} = 1.$$

Betrachten wir einen Punkt x, der auf dem den Blättern $\overline{T}$ und $\overline{T}_{\varkappa}$ gemeinsamen Ufer des Querschnittes $l_{|\varkappa|}$ liegt, so ist für denselben

$$\eta(x) = \eta_{\varkappa}(x);$$

die diesen Punkten x entsprechenden η-Werthe befriedigen folglich die Gleichung

$$(17) \qquad \eta = A_{\varkappa} B_0 \overline{\eta},$$

und diese stellt zufolge der Gleichung (16) und da die Determinante der Substitution

$$A_\varkappa B_0$$

den Werth -1 hat, einen realen Kreis der η-Ebene dar. Es ist folglich der Kreis

$$(18) \qquad \eta = A_\varkappa B_0 \bar{\eta} \qquad (\varkappa = 1, 2)$$

nichts anderes, wie die Seite $s_\varkappa'$ von F_0, und ebenso ist der Kreis

$$(19) \qquad \eta = A_{-\varkappa} B_0 \bar{\eta} \qquad (\varkappa = 1, 2)$$

die Seite $s_\varkappa$; in der That verwandelt sich der Kreis (19) durch Abbildung mittelst der linearen Function $A_\varkappa \eta$ in den Kreis (18), wie man mit Rücksicht auf die aus (16) folgende Gleichung

$$B_0 \bar{A}_\varkappa = A_\varkappa^{-1} B_0$$

sofort erkennt.

Wenn wir also die Querschnitte l_1, l_2 längs der realen z-Axe legen, so sind die Seiten des Fundamentalbereichs F_0 Kreisbogen, und überdies entspricht dem zwischen 0 und 1 gelegenen Theile der realen Axe von $\overline{T}$ ein Kreisbogen s_0, der offenbar durch die Ecken λ_1, λ_2 von F_0 hindurchgeht und demgemäss als Diagonale des Kreisbogenvierecks F_0 angesehen werden kann.

Die Diagonale s_0 theilt den Bereich F_0 in zwei Hälften, die beziehungsweise der unteren und der oberen Halbebene, in welche $\overline{T}$ durch die reale z-Axe zerfällt wird, entsprechen; und zwar sind nach Gleichung (10) diejenigen Punkte $\eta(z)$ und $\eta(\bar{z})$, die conjugirten Punkten z und $\bar{z}$ der beiden Halbebenen von $\overline{T}$ entsprechen, im Sinne der in der Nr. 200 (Bd. II, 1, S. 271) eingeführten Terminologie, Spiegelbilder von einander in Bezug auf den Diagonalkreis s_0. Es ist also auch s_1' das Spiegelbild von s_1 und s_2 das Spiegelbild von s_2' in Bezug auf s_0. Hieraus schliessen wir, dass die Winkel der Kreisbogendreiecke

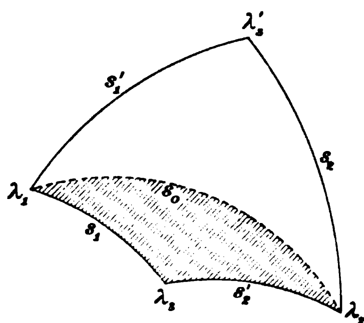


Fig. 19.

$$(\lambda_1 \lambda_3 \lambda_2), \quad (\lambda_1 \lambda_3' \lambda_2),$$

welche der unteren beziehungsweise der oberen Halbebene von $\overline{T}$ entsprechen, bei den Ecken λ_1, λ_3 beziehungsweise λ_3' und λ_2 gleich

$$\pi\delta_1, \quad \pi\delta_3, \quad \pi\delta_2$$

sein müssen.

Denn die Abbildung durch reciproke Radiivectores ist nach elementar-geometrischen Sätzen eine winkeltreue; also ist

$$\sphericalangle(s_0, s_1) = \sphericalangle(s_0, s_1'), \quad \sphericalangle(s_1, s_2') = \sphericalangle(s_1', s_2),$$
$$\sphericalangle(s_2, s_0) = \sphericalangle(s_2' s_0);$$

da aber nach dem Satze der Nr. 209 (Bd. II, 1, S. 310)

$$\sphericalangle(s_1, s_1') = 2\pi\delta_1, \quad \sphericalangle(s_1, s_2') + \sphericalangle(s_1', s_2) = 2\pi\delta_3, \quad \sphericalangle(s_2', s_2) = 2\pi\delta_2$$

ist, so folgt unmittelbar die Richtigkeit unserer Behauptung.

Durch geeignete Wahl von η können wir es stets erreichen, dass der Kreisbogen s_0 in eine gerade Linie übergeht, d. h. dass in der Gleichung (11) c_0 verschwindet. Dann wäre das Kreisbogenviereck F_0 in Bezug auf die geradlinige Diagonale s_0 symmetrisch. Wir übertragen diese Bezeichnung auch auf den allgemeinen Fall, wo s_0 keine gerade Linie ist, und sagen demgemäss:

Das Kreisbogenviereck F_0 wird durch die Diagonale s_0 in zwei symmetrische Hälften getheilt, die beziehungsweise der unteren und oberen Halbebene des Blattes $\overline{T}$ entsprechen.

Wir bezeichnen die Operation, durch welche man von einem Punkte η zu seinem Spiegelbilde in Bezug auf einen Kreis

$$c\eta\bar{\eta} + a\eta + \bar{a}\bar{\eta} + b = 0$$

übergeht, und die durch

$$B\bar{\eta} = \frac{-\bar{a}\bar{\eta} - b}{c\bar{\eta} + a}$$

dargestellt wird, als eine Spiegelung angewandt auf η. Hierin sind also b, c reale Grössen. Dann stellt zufolge der Gleichung (16) die Gleichung (14) für

$$\varkappa = +1, +2, -1, -2$$

ebenfalls Spiegelungen, und zwar Spiegelungen über die Kreise

$$s_1', s_2', s_1, s_2$$

dar. Setzen wir

(20) $$A_\varkappa B_0 = B_\varkappa,$$

so ist die Substitution $A_\varkappa$ in der Form

$$A_\varkappa = B_\varkappa B_0^{-1}$$

darstellbar, d. h. wenn wir auf einen Punkt η von F_0 anwenden die Spiegelung B_0 und dann auf den so entstehenden Punkt die Spiegelung $B_\varkappa$, so gelangen wir zum entsprechenden Punkte $A_\varkappa\eta$ des Bereiches $F_\varkappa$, oder kürzer, die Substitution $A_\varkappa$ ist äquivalent der hintereinander erfolgten Anwendung der Spiegelungen B_0 und $B_\varkappa$.

Die Spiegelungen $B_\varkappa$ sind aber auch einer einfachen analytischen Deutung fähig. Beachten wir nämlich, dass ebenso wie F_0 durch s_0, jeder Bereich $F_\varkappa$ durch den Kreis $A_\varkappa s_0$ in zwei symmetrische Hälften zerlegt wird, die den beiden Halbebenen des Blattes $\overline{T}_\varkappa$ entsprechen, so lehrt die Gleichung (14), dass die conjugirten z-Werthen entsprechenden Punkte der Bereiche F_0 und $F_\varkappa$ durch die Spiegelung $B_\varkappa$ auseinander hervorgehen.

270. Dreieckstheilung, die aus einem Kreisbogendreiecke entspringt. Abbildung eines Kreisbogendreiecks auf eine Halbebene. Das Riemann'sche Fortsetzungsprincip. Dreiecksfunctionen.

Die hier für die Bereiche F_0, F_1, F_2, F_{-1}, F_{-2} gefundenen Ergebnisse übertragen sich ohne weiteres auf alle Bereiche

$$F_{\pm\varkappa_1,\,\pm\varkappa_2,\,\cdots\,\pm\varkappa_\lambda},$$

die (vergl. Nr. 210, Bd. II, 1, S. 313) durch die Substitutionen

$$A_{\varkappa_1}^{\pm 1} A_{\varkappa_2}^{\pm 1} \cdots A_{\varkappa_\lambda}^{\pm 1} \eta \qquad (\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_\lambda = 1, 2)$$

der projectiven Monodromiegruppe ϑ der Differentialgleichung (2) aus F_0 hervorgehen und den Blättern

$$\overline{T}_{\pm\varkappa_1,\,\pm\varkappa_2,\,\cdots\,\pm\varkappa_\lambda}$$

der über der z-Ebene ausgebreiteten unendlich vielblättrigen Fläche R, die die Verzweigung der Function $\eta(z)$ darstellt, entsprechen.

Jeder dieser Bereiche zerfällt durch die Abbildung des Kreisbogens s_0 in zwei symmetrische Kreisbogendreiecke, und wir wollen uns nach dem Vorgange von Herrn Klein immer dasjenige dieser Kreisbogendreiecke, welches der unteren Halbebene des Blattes

$$\overline{T}_{\pm\varkappa_1,\,\pm\varkappa_2,\,\cdots\,\pm\varkappa_\lambda}$$

entspricht, schraffirt, das andere, der oberen Halbebene entsprechende unschraffirt denken (vergl. Fig. 19). Dann besteht die reguläre Theilung der Fläche F aus lauter theils schraffirten theils unschraffirten Kreisbogendreiecken, die so beschaffen sind, das jedes aus einem ihm benachbarten durch Spiegelung in Bezug auf den die gemeinsame Grenze bildenden Kreisbogen hervorgeht.

Bilden wir aus den drei Spiegelungen

$$B_0,\ B_{-1},\ B_2$$

als Fundamentaloperationen eine Gruppe σ, so entsprechen die Operationen von σ gegenseitig eindeutig der beschriebenen Dreieckstheilung

von F, und die Substitutionsgruppe ϑ ist in σ als Untergruppe enthalten, indem nämlich diejenigen Operationen von σ, die aus einer geraden Anzahl der Fundamentaloperationen B_0, B_{-1}, B_2 zusammengesetzt sind, Substitutionen von ϑ darstellen.

Daraus folgt auch sofort, dass die Gruppe ϑ in σ als ausgezeichnete Untergruppe enthalten ist.

Wir können uns nun die ganze Theilung der Fläche F dadurch entstanden denken, dass wir von einem beliebigen schraffirten oder nicht schraffirten Dreiecke ausgehen, dieses durch Spiegelung in Bezug auf seine drei Seiten vervielfältigen, jedes so entstandene Dreieck wieder in Bezug auf jede seiner beiden freien Seiten spiegeln und so fortfahren. Die Function z von η ist dann dadurch definirt, dass sie das Ausgangsdreieck auf eine Halbebene eindeutig conform abbildet.

Denken wir uns nun umgekehrt, es sei in der η-Ebene irgend ein von drei Kreisbogen gebildetes Dreieck φ_0 gegeben, welches in seinen drei Ecken μ_1, μ_2, μ_3 die hohlen Winkel $\pi\delta_1$, $\pi\delta_2$, $\pi\delta_3$ besitzt, dann können wir uns die Aufgabe stellen, eine Function ζ von η anzugeben, die die eindeutig conforme Abbildung dieses Dreieckes auf eine Halbebene liefert. Die Existenz einer solchen Function folgt aus einem allgemeinen Riemann'schen Satze, und lässt sich mit Hülfe des in der Nr. 212 (Bd. II, 1, S. 323) geschilderten Schwarz-Neumann'schen Verfahrens unschwer beweisen. Wir wollen den Existenzbeweis aber in indirecter Weise dadurch liefern, dass wir die gestellte Aufgabe auf eine bereits gelöste zurückführen.

Sei nämlich

$$\zeta = f(\eta)$$

eine Function von der geforderten Beschaffenheit, dann hat also für die Seiten des Dreieckes φ_0 die Function ζ reale Werthe. Wir können auf mannigfaltige Weise eine lineare Function

$$\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$

von η so bestimmen, dass die eine Seite des Kreisbogendreieckes φ_0 der η-Ebene, etwa (μ_1, μ_3), auf ein Stück der realen η'-Axe abgebildet wird; wählen wir z. B. α, β, γ, δ so, dass

$$\alpha\mu_1 + \beta = 0, \quad \gamma\mu_3 + \delta = 0$$

und für irgend einen Punkt μ des Kreisbogens (μ_1, μ_3)

$$\frac{\bar{\alpha}\bar{\mu} + \bar{\beta}}{\bar{\gamma}\bar{\mu} + \bar{\delta}} = \frac{\alpha\mu + \beta}{\gamma\mu + \delta} > 0$$

sei, so entspricht dem Dreiecke φ_0 der η-Ebene ein Dreieck ψ_0 der

η'-Ebene, von welchem eine Ecke im Nullpunkte, eine zweite Ecke im Unendlichen liegt, während die dritte Ecke durch den Punkt

$$\nu_2 = \frac{\alpha\mu_2 + \beta}{\gamma\mu_2 + \delta}$$

gegeben wird. Den Seiten

$$(\mu_1, \mu_3), \quad (\mu_3, \mu_2), \quad (\mu_2, \mu_1)$$

von φ_0 entsprechen beziehungsweise die positive reale Axe, eine durch ν_2 hindurchgehende Gerade und ein durch die Punkte 0 und ν_2 hindurchgehender Kreisbogen der η'-Ebene. Die Function

$$\zeta = f(\eta) = g(\eta')$$

bildet dann das Dreieck ψ_0 auf eine Halbebene, sagen wir z. B. die obere ζ-Halbebene ab, insbesondere entspricht den Punkten der realen positiven η'-Axe ein continuirliches Stück der realen ζ-Axe. Umgekehrt ist die Function η' von ζ nur für Werthe von ζ mit positivem Coefficienten von i definirt; wir wollen zeigen, wie man mit Hülfe eines von Riemann herrührenden Princips diese Function in die untere ζ-Halbebene fortsetzen kann.

Sei allgemein für die Punkte eines in der oberen ζ-Halbebene gelegenen Bereiches Z eine Function

$$H = F(\zeta)$$

eindeutig definirt, die diesen Bereich derart auf einen gewissen Bereich T der H-Ebene abbildet, dass H innerhalb Z endlich ist, und dass dem der realen ζ-Axe angehörigen Stücke (A, B) der Begrenzung von Z ein ebenfalls der realen H-Axe angehöriges Continuum von Punkten der Begrenzung von T entspricht. Bilden wir dann die monogene Function

$$\overline{H} = \overline{F(\overline{\zeta})}$$

von ζ, so ist dieselbe in dem Bereiche $\overline{Z}$, der aus Z durch Spiegelung in Bezug auf die reale ζ-Axe entsteht, eindeutig definirt und geht längs des Stückes (A, B) der realen ζ-Axe stetig in die Function H über. Der Ausdruck

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(Z)} \frac{F(z)}{z-\zeta}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\overline{Z})} \frac{\overline{F(\overline{z})}}{\overline{z}-\zeta}\,d\overline{z},$$

wo die beiden Integrale über die Begrenzungen von Z beziehungsweise $\overline{Z}$ im positiven Sinne zu erstrecken sind, stellt für Werthe von ζ innerhalb Z die Function H, für Werthe von ζ innerhalb $\overline{Z}$ die Function $\overline{H}$ dar. Dieser Ausdruck ist aber nichts anderes wie

$$\text{(I)} \qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(Z+\bar{Z})}\frac{F}{z-\zeta}\,dz,$$

wo das Integral über die Begrenzung des durch Vereinigung von Z und $\bar{Z}$ entstehenden Bereiches zu erstrecken ist, und F auf den der Begrenzung von Z angehörenden Punkten mit H, auf den der Begrenzung von $\bar{Z}$ angehörenden Punkten mit $\bar{H}$ übereinstimmt. Das Integral (I) stellt aber innerhalb des Gesammtbereiches $Z+\bar{Z}$ eine monogene Function der complexen Variabeln ζ dar, und es ist somit $\bar{H}$ nichts anderes wie die analytische Fortsetzung der innerhalb Z definirten Function H in den Bereich $\bar{Z}$, und zwar entsprechen conjugirten complexen Werthen von ζ auch conjugirte complexe Werthe von H. Kurz ausgesprochen lautet also unser Resultat wie folgt:

Wenn einem zusammenhängenden Stücke der realen ζ-Axe ein ebenfalls zusammenhängendes Stück der realen H-Axe entspricht, so entsprechen conjugirten complexen Werthen von ζ auch conjugirte complexe Werthe von H.

Dieses Princip, welches auch im Folgenden noch wiederholt zur Anwendung gelangen wird, wollen wir als das Riemann'sche Fortsetzungs- oder Symmetrieprincip bezeichnen.

Für die Function η' von ζ ergiebt sich also, dass, wenn wir von einem Punkte ζ der oberen Halbebene nach dem conjugirten Werthe $\bar{\zeta}$ gehen, indem wir die reale Axe längs desjenigen Abschnittes über schreiten, der der positiven realen η'-Axe entspricht, der in $\bar{\zeta}$ stattfindende Werth der analytischen Fortsetzung der Function η' von ζ nichts anderes ist, wie der conjugirte complexe Werth des in ζ stattfindenden Werthes von η'. Oder wenn wir wieder auf η selbst zurückgehen und beachten, dass conjugirten complexen Punkten der η'-Ebene Punkte der η-Ebene entsprechen, die Spiegelbilder von einander in Bezug auf den Kreis (μ_1, μ_3) sind, so haben wir den Satz:

Wenn eine Function ζ die eindeutig conforme Abbildung des Kreisbogendreiecks φ_0 der η-Ebene auf die obere ζ-Halbebene vermittelt, so erfüllen die η-Werthe, die wir erhalten, wenn wir die Function η von ζ von der oberen Halbebene in die untere fortsetzen, indem wir die reale ζ-Axe längs des der Seite $(\mu_\varkappa, \mu_{\varkappa+1})$ von φ_0 entsprechenden Stückes überschreiten, das Dreieck φ_0', welches aus φ_0 durch Spiegelung in Bezug auf die Seite $(\mu_\varkappa, \mu_{\varkappa+1})$ entsteht.

Bezeichnen wir die Spiegelung in Bezug auf die Seite $(\mu_\varkappa, \mu_{\varkappa+1})$ durch $C_\varkappa$ und durch $\mu'_{\varkappa+2}$ das Spiegelbild der Ecke $\mu_{\varkappa+2}$ in Bezug auf den Kreis $(\mu_\varkappa, \mu_{\varkappa+1})$, (für $\varkappa = 1, 2, 3$; dabei sind die Indices,

welche grösser als 3 ausfallen, stets modulo 3 zu reduciren), so haben wir in dem aus Vereinigung von φ_0 und φ_0' entstehenden Bereiche ein Viereck, in welchem die Seite $(\mu_\varkappa, \mu'_{\varkappa+2})$ aus $(\mu_\varkappa, \mu_{\varkappa+2})$ durch die lineare Substitution

$$C_\varkappa C_{\varkappa+2}^{-1} \eta$$

und die Seite $(\mu_{\varkappa+1}, \mu_{\varkappa+2})$ aus $(\mu_{\varkappa+1}, \mu'_{\varkappa+2})$ durch die lineare Substitution

$$C_\varkappa C_{\varkappa+1}^{-1} \eta$$

hervorgeht. Die Winkel dieses Vierecks bei den Ecken $\mu_\varkappa, \mu_{\varkappa+1}$ sind beziehungsweise $2\pi\delta_\varkappa, 2\pi\delta_{\varkappa+1}$, die Summe der Winkel bei den Ecken $\mu_{\varkappa+2}, \mu'_{\varkappa+2}$ ist $2\pi\delta_{\varkappa+2}$.

Die Function ζ von η (sofern sie existirt) hat die Eigenschaft, jenes Viereck eindeutig conform auf diejenige Fläche abzubilden, die wir erhalten, indem wir diejenigen beiden Theile der realen ζ-Axe, die den Seiten $(\mu_\varkappa, \mu_{\varkappa+2})$, $(\mu_{\varkappa+2}, \mu_{\varkappa+1})$ von φ_0 entsprechen, als Querschnitte der ζ-Ebene auffassen. Die Existenz einer so beschaffenen Function ζ haben wir aber in den Nummern 213—216 (Bd. II, 1, S. 327 ff.) bewiesen, und gefunden, dass, wenn wir über die noch verfügbaren drei willkürlichen Constanten so disponiren, dass für $\eta = \mu_1, \mu_2, \mu_3$ die Function die Werthe 0, 1, ∞ annimmt, dieselbe mit der unabhängigen Variabeln der Differentialgleichung (2) übereinstimmt. Hieraus folgt nun weiter, dass wir den Existenzbeweis für die Function ζ gar nicht erst wie in den Nummern 213, 214 auf die Methode der Herren Schwarz und C. Neumann zu gründen brauchen, sondern dass es genügt, wenn wir mit Hülfe des in den Nummern 215, 216 angewandten Verfahrens zeigen, dass diese Function aus der Differentialgleichung (2) durch Umkehrung des Integralquotienten entsteht. Wir haben also den Satz:

Die unabhängige Variable der Differentialgleichung (2) als Function des Integralquotienten η liefert für Werthe der $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, die real, nicht negativ und kleiner als Eins sind, die allgemeinste Function, die ein Kreisbogendreieck mit den hohlen Winkeln

$$\pi\delta_1, \pi\delta_2, \pi\delta_3$$

eindeutig conform auf eine Halbebene abbildet.

Man nennt darum η als Function von z wohl auch eine Dreiecksfunction; wir bezeichnen mit Herrn Schwarz diese Function von z durch

$$\eta = s(\delta_1, \delta_2, \delta_3, z).$$

271. Kreisbogendreieck mit drei verschwindenden Winkeln. Orthogonalkreis.

Wenn wir uns die Theilung der Fläche F in der in der vorigen Nummer (S. 40) beschriebenen Weise hergestellt denken, indem wir von einem Kreisbogendreiecke, etwa $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, ausgehen, so gewinnen wir damit den Vortheil, dass wir uns von der Art der Zerschneidung der z-Ebene völlig unabhängig gemacht haben.

Spiegeln wir nämlich das Ausgangsdreieck in Bezug auf die drei Seiten s_0, s_1, s_2', so können wir dasselbe mit irgend einem der entstandenen drei Spiegelbilder zu einem Vierecke vereinigen und erhalten jedesmal einen Fundamentalbereich für die Theilung der Fläche F. Dabei giebt dieser Fundamentalbereich die eindeutig conforme Abbildung der z-Ebene, in welcher wir uns dann diejenigen beiden Theile der realen z-Axe als Querschnitte zu denken haben, die den beiden frei gebliebenen Seiten des Ausgangsdreieckes entsprechen.

Wir halten die bisher angewandte Zerschneidung durch die Querschnitte l_1, l_2 fest, und haben also, wenn wir von dem schraffirten Dreiecke $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ausgehen, die den Seiten s_0, s_1, s_2' entsprechenden Spiegelungen

$$B_0, B_{-1}, B_2,$$

aus denen sich die Fundamentalsubstitutionen in der Form

$$A_1 = B_0 B_{-1}^{-1}, \quad A_2 = B_2 B_0^{-1}$$

zusammensetzen. Hieraus ist sofort ersichtlich, dass die Doppelpunkte der Substitution A_1 nichts anderes sind, wie die Schnittpunkte der beiden Kreise s_0, s_1 und die Doppelpunkte von A_2 nichts anderes wie die Schnittpunkte von s_0, s_2'. Ferner folgt aus der Gleichung

$$A_3 = A_1^{-1} A_2^{-1} = B_{-1} B_2^{-1},$$

dass die Schnittpunkte der Kreise s_1 und s_2' mit den Doppelpunkten von A_3 übereinstimmen.

Wenn also für eine der Substitutionen A_1, A_2, A_3 die Doppelpunkte zusammenfallen, d. h. wenn die betreffende Substitution eine parabolische ist, so berühren sich die betreffenden Kreise, in Uebereinstimmung mit der Thatsache, dass in diesem Falle der betreffende Winkel des Kreisbogendreieckes verschwinden muss.

Wenn z eine eindeutige Function von η sein soll, so müssen die Grössen $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ in der Form

$$\delta_\varkappa = \frac{1}{g_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

darstellbar sein, wo die g_1, g_2, g_3 positive ganze Zahlen oder unendlich gross sind.

Im Falle wo die Differentialgleichung (2) die canonische Form der Legendre'schen Differentialgleichung (L) darstellt, haben wir insbesondere

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0;$$

das Kreisbogendreieck der η-Ebene hat also drei verschwindende Winkel, d. h. die Seiten desselben berühren sich in den Eckpunkten.

Wir können dann für den speciellen Integralquotienten

$$\tau = \frac{K'i}{K}$$

sofort das entsprechende Kreisbogendreieck angeben. Bedenken wir nämlich, dass wie in der Nr. 248 (Bd. II, 1, S. 480, 481) gezeigt wurde, für Werthe von z, die auf der realen Axe zwischen 0 und 1 liegen, K, K' real positiv sind, also τ auf der oberen Hälfte der lateralen Axe der τ-Ebene gelegen ist, so erkennen wir zunächst, dass die Seite s_0 unseres der unteren z-Halbebene entsprechenden Kreisbogendreieckes nichts anderes ist, wie der in der oberen τ-Halbebene gelegene Theil der lateralen Axe. Die Gleichung von s_0 lautet also

$$\tau + \bar{\tau} = 0$$

d. h. die Spiegelung B_0 ist einfach

$$B_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hieraus finden wir nun die den anderen Seiten s_1, s_2' entsprechenden Spiegelungen durch die Formeln (20) der Nr. 269 (S. 39), denn die Fundamentalsubstitutionen A_1, A_2 sind nach den Formeln (17) der Nr. 249 (Bd. II, 1, S. 483) bekannt. Es ist nämlich

$$(1) \qquad \begin{cases} A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \\ A_3 = A_1^{-1} A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

die Spiegelungen B_{-1}, B_2 lauten also

$$(2) \qquad \begin{cases} B_{-1} = A_1^{-1} B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ B_2 = \ A_2 B_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

und die Gleichungen von s_1, s_2' haben folglich die Form

$$s_1) \qquad \tau + \bar{\tau} + 2 = 0,$$

$$s_2') \qquad 2\tau\bar{\tau} + \tau + \bar{\tau} = 0.$$

Es ist jetzt dasjenige Kreisbogendreieck zu nehmen, welches lauter verschwindende Winkel hat und dessen eine Seite die obere Hälfte der lateralen Axe ist. Die Seite s_2' ist also der in der oberen τ-Halbebene gelegene Halbkreis des Kreises mit dem Mittelpunkte $-\frac{1}{2}$ und dem Radius $\frac{1}{2}$, die Seite s_1 die obere Hälfte der durch den Punkt -1 zur lateralen Axe gelegten Parallelen. Man hat folglich

$$\lambda_1 = \infty, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -1,$$

und das sind in der That die Doppelpunkte der drei Substitutionen

$$A_1, A_2, A_3.$$

Spiegeln wir nun das so bestimmte zu schraffirende Kreisbogendreieck (vergl. die Fig. 20) in Bezug auf die Seite s_0, so erhalten wir das der

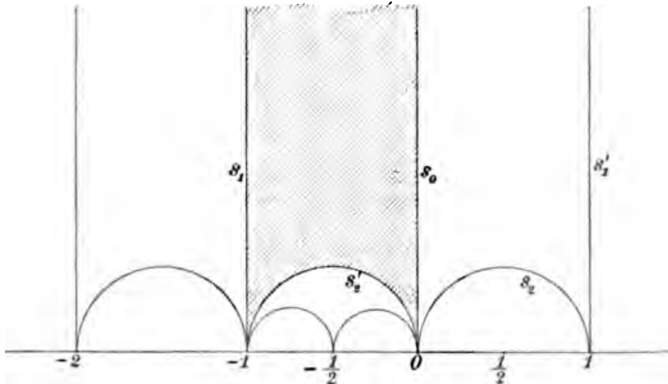


Fig. 20.

oberen z-Halbebene entsprechende symmetrische Dreieck, welches mit dem ursprünglichen vereint die Abbildung der z-Ebene liefert, die wir uns durch die längs der realen Axe gelegten Querschnitte l_1, l_2 zerschnitten zu denken haben. In der Figur sind auch noch die Spiegelungen des Ausgangsdreieckes in Bezug auf die beiden anderen Seiten s_1 und s_2' gezeichnet.

In Bezug auf die durch wiederholte Spiegelung des Ausgangsdreiecks oder durch Anwendung aller Substitutionen der aus den

$$A_1, A_2, A_3$$

als Basis gebildeten projectiven Gruppe auf den Fundamentalbereich

$$F_0 = (\infty, -1, 0, +1)$$

entstehende Theilung der Fläche F können wir nun eine Reihe höchst folgenreicher Bemerkungen machen.

Wenn wir statt τ einen anderen Integralquotienten η unserer Differentialgleichung (L) zu Grunde gelegt hätten, so würden wir als Abbildung der unteren z-Halbebene ein anderes Kreisbogendreieck mit lauter verschwindenden Winkeln gefunden haben. Umgekehrt können wir, wenn irgend ein Kreisbogendreieck, dessen sämmtliche Winkel gleich Null sind, vorgelegt ist, dasselbe als die Abbildung der unteren z-Halbebene vermittelst eines Integralquotienten der Differentialgleichung (L) ansehen. Um die Richtigkeit dieser Bemerkung zu erkennen, brauchen wir nur nachzuweisen, dass jedes Kreisbogendreieck mit verschwindenden Winkeln als die Abbildung des in der τ-Ebene gezeichneten Dreiecks mit den Seiten s_1, s_2', s_0 vermittelst einer linear gebrochenen Function aufgefasst werden kann.

Es gilt aber der allgemeine Satz:

Zwei Kreisbogendreiecke, welche dieselben Winkel in derselben Reihenfolge haben, gehen durch Abbildung vermittelst einer linear gebrochenen Function aus einander hervor.

In der That, seien die Ecken des einen Dreieckes in der η-Ebene

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3,$$

die des anderen in der ζ-Ebene in derselben Reihenfolge

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3,$$

so ist die abbildende linear gebrochene Function einfach

$$\frac{\eta-\lambda_1}{\eta-\lambda_2}\,\frac{\lambda_3-\lambda_2}{\lambda_3-\lambda_1}=\frac{\zeta-\mu_1}{\zeta-\mu_2}\,\frac{\mu_3-\mu_2}{\mu_3-\mu_1}.$$

Denn die Abbildung durch diese Function ist einerseits winkeltreu, andererseits verwandelt sie Kreisbogen in Kreisbogen. Ein Kreisbogendreieck ist aber durch Angabe seiner Ecken und Winkel (im Allgemeinen) eindeutig bestimmt.

Denken wir uns also für einen beliebigen Integralquotienten η von (L) das zugehörige (schraffirte) Kreisbogendreieck mit den Ecken μ_1, μ_2, μ_3 und verschwindenden Winkeln. Legen wir dann durch die drei Punkte μ_1, μ_2, μ_3 einen Kreis, so schneidet derselbe die drei Seiten orthogonal. Für den besonderen Integralquotienten τ ist dieser Orthogonalkreis nichts anderes wie die reale τ-Axe.

Wenn man die Seiten eines Kreisbogendreiecks mit lauter verschwindenden Winkeln zu Vollkreisen ergänzt, so begrenzen diese Kreise noch ein zweites Dreieck, dessen drei Winkel ebenfalls gleich Null sind. Von diesen beiden Dreiecken liegt stets das eine ganz innerhalb, das andere ganz ausserhalb des Orthogonalkreises.

Wir wollen um die Vorstellung zu fixiren annehmen, dass die Seiten des Kreisbogendreiecks (μ_1, μ_2, μ_3) innerhalb des Orthogonalkreises verlaufen.

Hat man einen Kreis K und legt einen denselben rechtwinkelig schneidenden Kreis K', so wird bei der Spiegelung in Bezug auf K offenbar jeder Punkt von K' wieder in einen Punkt von K' verwandelt; ebenso verwandelt sich jeder Punkt, der innerhalb von K' liegt, wieder in einen Punkt innerhalb, und umgekehrt jeder Punkt ausserhalb von K' in einen Punkt ausserhalb (vergl. Nr. 281, 282).

Wir schliessen hieraus zuvörderst, dass die aus dem Dreiecke (μ_1, μ_2, μ_3) durch einmalige Spiegelung in Bezug auf die drei Seiten hervorgehenden Dreiecke auch innerhalb des Orthogonalkreises liegen. Ferner folgt aber aus dem Umstande, dass die Abbildung durch reciproke radii vectores eine winkeltreue ist, dass die sämmtlichen Seiten der aus (μ_1, μ_2, μ_3) durch Spiegelung entstandenen Dreiecke den Orthogonalkreis ebenfalls unter rechten Winkeln schneiden. Also haben wir das Resultat:

Die sämmtlichen aus dem Dreiecke (μ_1, μ_2, μ_3) durch wiederholte Spiegelung über eine ihrer Seiten entstehenden Dreiecke befinden sich innerhalb des Orthogonalkreises und ihre Seiten schneiden den Orthogonalkreis unter rechtem Winkel, während ihre Ecken auf dem Orthogonalkreise liegen.

Viertes Kapitel.

272. Discontinuität der Gruppe, die aus einem Kreisbogendreiecke mit verschwindenden Winkeln entspringt. Fundamentaleigenschaften der Modulfunction.

Betrachten wir nunmehr das Ausgangsdreieck (μ_1, μ_2, μ_3), so wird das Innere des Orthogonalkreises durch die drei Seiten dieses Dreiecks in vier Gebiete getheilt, nämlich das Dreieck (μ_1, μ_2, μ_3) selbst und die drei Gebiete, die von dem Orthogonalkreise und je einer Dreiecksseite begrenzt werden. Construiren wir das Spiegelbild von (μ_1, μ_2, μ_3) in Bezug auf die Seite $(\mu_\varkappa, \mu_{\varkappa+1})$, so theilen die Seiten desselben das zwischen dem Orthogonalkreise und $(\mu_\varkappa, \mu_{\varkappa+1})$ gelegene Gebiet in drei Theilgebiete, nämlich das gespiegelte Dreieck selbst und die zwischen dem Orthogonalkreise und den beiden freien Seiten gelegenen Gebiete.

Wenn wir allgemein die Spiegelung der entstehenden Dreiecke in Bezug auf eine ihrer Seiten beliebig oft wiederholt haben, so erscheint das Innere des Orthogonalkreises in eine gewisse Anzahl von Gebieten zertheilt, nämlich in die Dreiecke einerseits, und die Gebiete $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots \mathfrak{C}_\nu$, die zwischen den freien Seiten jener Dreiecke und dem Orthogonalkreise liegen, andererseits. Spiegeln wir nun weiter eines der äussersten Dreiecke um eine seiner freien Seiten, so liegt das entstehende Spiegelbild nothwendig innerhalb des einen der Gebiete $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots \mathfrak{C}_\nu$, es ist folglich unmöglich, dass von den durch die successiven Spiegelungen entstandenen Dreiecken zwei sich gegenseitig überdecken.

Vielmehr lagern sich diese Dreiecke schlicht und lückenlos neben einander.

Offenbar liegen nur die Eckpunkte der durch die successiven Spiegelungen entstandenen Dreiecke und niemals andere Punkte derselben auf der Peripherie des Orthogonalkreises; ferner ist der Flächeninhalt eines jeden dieser Dreiecke eine endliche und von Null verschiedene Grösse. Daraus folgt, dass die Dreiecke, durch je öfter wiederholte Spiegelung sie entstanden sind, sich um so näher an die Peripherie des Orthogonalkreises herandrängen, und dass (wenn der Orthogonalkreis ein wirklicher Kreis, und nicht wie für τ eine gerade Linie ist) ihre Flächeninhalte immer kleiner und kleiner werden.

Ehe wir weiter gehen, sehen wir zu, was für Folgerungen sich aus den bisher erlangten Ergebnissen ziehen lassen.

Für die τ-Ebene sind die Seiten der aus dem Ausgangsdreiecke durch successive Spiegelung entstandenen Dreiecke stets entweder Parallele zur lateralen Axe, oder Halbkreise, deren Mittelpunkte auf der realen Axe liegen, ferner verbleiben diese Dreiecke sämmtlich in der oberen Halbebene, und mit Ausnahme der Ecken nach einer endlichen aber sonst beliebig grossen Anzahl von Spiegelungen stets in endlichem Abstande von der realen τ-Axe. Also ist nicht nur für alle z-Punkte des Blattes $\overline{T}$ sondern auch in jedem Blatte

$$\overline{T}_{\pm \varkappa_1, \pm \varkappa_2, \cdots \pm \varkappa_\nu},$$

in welches wir nach Ausführung einer endlichen Anzahl von Umläufen um die Punkte 0, 1 gelangen, der Coefficient von i in τ wesentlich positiv.

Damit ist der Beweis des in der Nr. 267 (S. 31) angegebenen Satzes geliefert, d. h. es ist gezeigt:

Der Periodenquotient τ besitzt für jeden Werth von z, mit Ausnahme von 0, 1, ∞, d. h. also für jeden Werth des Moduls k des elliptischen Integrals erster Gattung, einen wesentlich positiven Coefficienten von i.

Hieraus folgt nun, wie in der Nr. 267 (S. 31) erörtert wurde, auf Grund der Darstellung von k durch die Quotienten der ϑ-Reihen, dass

der Modul k ebenso wie k', K, K' eindeutige Functionen von τ sind, die nur für Werthe von τ mit positivem Coefficienten von i existiren.

Dass z selbst eine eindeutige Function von τ ist, können wir aber auch, ohne von den Darstellungsformeln der Nr. 267 Gebrauch zu machen, sofort erweisen.

In der That ist die aus der Basis

$$A_1, A_2, A_3$$

erzeugte projective Monodromiegruppe der Differentialgleichung (2) im Sinne der Definition der Nr. 216 (Bd. II, 1, S. 345) eine discontinuirliche, denn nach den gefundenen Ergebnissen sind die daselbst aufgestellten Bedingungen 1), 2), 3) für die Fläche F, die (vergl. Nr. 200, Bd. II, 1, S. 313) die Projection des Gebildes (z, τ) auf die τ-Ebene darstellt, erfüllt. Also folgt nach den Ergebnissen der Nr. 216 ohne Weiteres,

dass z eine eindeutige Function von τ sein muss, die innerhalb des Fundamentalbereiches F_0, d. h. innerhalb des Kreisbogenvierecks

$$(\infty, -1, 0, 1),$$

jeden Werth mit Ausnahme von 0, 1, ∞ einmal und nur einmal annimmt.

Die Discontinuität der aus der Basis (1) erzeugten Gruppe ϑ lässt sich auch noch direct erweisen, indem man die Punktmenge der Doppelpunkte aller Substitutionen dieser Gruppe in's Auge fasst.

Da die Coefficienten der Substitutionen A_1, A_2, A_3 ganze Zahlen sind, so gilt das Gleiche auch für die sämmtlichen Substitutionen von ϑ, d. h.:

Die Substitutionen von ϑ sind ganzzahlig und unimodular.

Hat man irgend eine ganzzahlige unimodulare Substitution, so kann man die Coefficienten derselben in Bezug auf ihren Restcharakter nach einem ganzzahligen Divisor n untersuchen. Man bemerkt dann sofort, dass, wenn zwei solche Substitutionen

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}$$

so beschaffen sind, dass in beiden der erste und vierte Coefficient den Rest ± 1, der zweite und dritte den Rest 0 modulo n lässt, dieselbe Eigenschaft auch den inversen Substitutionen und ebenso der componirten Substitution

$$\begin{pmatrix}\alpha\alpha' + \beta\gamma' & \alpha\beta' + \beta\delta'\\ \gamma\alpha' + \delta\gamma' & \gamma\beta' + \delta\delta'\end{pmatrix}$$

zukömmt. Wir deuten diese Beschaffenheit einer Substitution dadurch an, dass wir schreiben

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\pm 1 & 0\\ 0 & \pm 1\end{pmatrix} \pmod{n}.$$

Dann sehen wir aus der Form (1) (S. 46) der Substitutionen A_1, A_2 sofort, dass

$$A_1 \equiv A_2 \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \pmod{2}$$

ist; folglich genügt auch jede Substitution A unserer Gruppe ϑ dieser selben Congruenz:

$$A \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \pmod{2}. \tag{3}$$

Sei nun

$$A = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},$$

so sind die Doppelpunkte dieser Substitution durch die Gleichung

$$\gamma\eta^2 + (\delta - \alpha)\eta - \beta = 0$$

bestimmt, d. h. sie stellen sich in der Form dar

$$\eta = \frac{\alpha - \delta}{2\gamma} \pm \sqrt{\frac{(\alpha + \delta)^2 - 4}{4\gamma^2}}. \tag{4}$$

Nun kann niemals

$$\alpha + \delta = 0$$

sein, denn aus

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

ergäbe sich sonst

(5) $$\beta\gamma + 2 = (1 - \alpha)(1 + \alpha);$$

nun ist aber nach (3)

$$(1 - \alpha)(1 + \alpha) \equiv 0 \pmod 4, \quad \beta\gamma + 2 \equiv 2 \pmod 4,$$

also die Gleichung (5) unmöglich. Es ist folglich, da α, δ beide ungerade Zahlen sind,

$$(\alpha + \delta)^2 \geqq 4,$$

d. h. die Doppelpunkte der Substitution A sind stets real.

Hieraus folgt zunächst, dass alle Substitutionen der Gruppe ϑ entweder parabolisch oder hyperbolisch sein müssen. In der That sind die Coefficienten aller Substitutionen von ϑ reale Zahlen; für unimodulare Substitutionen mit realen Coefficienten oder, wie wir kurz sagen, für reale unimodulare Substitutionen gilt aber der folgende Satz:

Eine reale unimodulare Substitution kann niemals loxodromisch sein; sie ist elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch, jenachdem ihre Doppelpunkte conjugirt complex, real und von einander verschieden oder zusammenfallend sind.

Die Richtigkeit dieses Satzes erhellt unmittelbar aus den Formeln der Nr. 199 (Bd. II, 1, S. 267 ff.), wenn man daselbst die α, β, γ, δ als reale Grössen voraussetzt.

In der That sind für die beliebige reale unimodulare Substitution

$$\zeta = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

die Doppelpunkte λ, μ durch die Formel

$$\frac{\alpha - \delta}{2\gamma} \pm \sqrt{\frac{(\alpha + \delta)^2 - 4}{4\gamma^2}}$$

gegeben. Wenn nun

$$(\alpha + \delta)^2 \neq 4,$$

d. h. die Substitution keine parabolische ist, so ist der Multiplicator

$$K = \left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right)_{\eta=\lambda} = \left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)_{\eta=\mu}$$

real und demnach die Substitution eine hyperbolische, wenn λ, μ real, d. h. wenn

$$(\alpha + \delta)^2 > 4$$

ist; dagegen haben wir für

$$(\alpha + \delta)^2 < 4,$$

da in diesem Falle λ, μ conjugirte complexe Grössen sind,

$$K\overline{K} = \left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)_{\eta=\lambda} \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_{\eta=\lambda} = 1,$$

und die Substitution ist demnach eine elliptische. Wenn endlich

$$(\alpha + \delta)^2 = 4$$

ist, so ist die Substitution parabolisch und ihr Doppelpunkt ein Punkt der realen Axe.

Die von den Doppelpunkten der Substitutionen der Gruppe ϑ gebildete Punktmenge liegt also ganz auf der realen τ-Axe. Da nun eine Substitution mit ganzzahligen Coefficienten niemals eine infinitesimale im Sinne der Nr. 202 (Bd. II, 1, S. 280) sein kann, so folgt hieraus nach den Ergebnissen jener Nummer, dass die Gruppe ϑ in jedem Punkte der τ-Ebene, der nicht der realen Axe angehört, jedenfalls eigentlich discontinuirlich ist.

Irgend ein Zweig der Function τ von z erfährt, wenn z einen einfachen Umlauf um einen der Punkte 0, 1, ∞ vollzieht, nothwendig eine parabolische Substitution der Gruppe ϑ. Also können die Punkte 0, 1, ∞ der z-Ebene nur Doppelpunkten parabolischer Substitutionen von ϑ, und somit niemals Punkten der τ-Ebene mit von Null verschiedenem Coefficienten von i entsprechen. Daraus folgt, dass der Existenzbereich der Function z von τ nothwendig die ganze obere τ-Halbebene umfassen muss, denn wir können von einem Punkte dieser Halbebene aus, für den die Existenz der Function z feststeht, zu jedem anderen Punkte derselben Halbebene durch eine Folge von in einander greifenden Kreisen übergehen, die weder in ihrem Innern noch auf ihrer Peripherie mit der realen τ-Axe Punkte gemein haben, so dass wir also immer zu Stellen τ kommen, die Stellen z entsprechen, in deren Umgebung sich τ als Function von z und folglich auch z als Function von τ regulär verhält. Wir haben also den Satz:

Die Function z von τ existirt in der ganzen oberen τ-Halbebene und verhält sich in der Umgebung jeder Stelle τ, deren Coefficient von i wesentlich positiv ist, regulär.

273. Discussion der Punkte der realen Axe. Die ganzzahligen unimodularen Gruppen M und M_2. Satz von Riemann und Dedekind.

Da die Werthe von τ, die zu einem von 0, 1, ∞ verschiedenen z gehören, wie wir bewiesen haben, stets in der oberen Halbebene liegen, da sich ferner die Doppelpunkte parabolischer Substitutionen der

Gruppe ϑ, die allein den singulären Stellen $z = 0, 1, \infty$ entsprechen können, auf der realen τ-Axe befinden, so schliessen wir, dass eine analytische Fortsetzung der Function z von τ nach der unteren τ-Halbebene hin nicht möglich ist.

Es wird demnach im Sinne der Erörterungen der Nummern 203, 204 die reale Axe mit der daselbst definirten abgeschlossenen Punktmenge P identisch sein, und in der That trennt dieselbe zwei Continua, nämlich die beiden τ-Halbebenen, innerhalb deren die Gruppe ϑ eigentlich discontinuirlich ist, von einander; eines dieser Continua ist der Existenzbereich der eindeutigen Function z von τ (vergl. den Satz der Nr. 204, Bd. II, 1, S. 287).

Wir wollen nun noch einen directen Nachweis dafür liefern, dass die Punktmenge Q der Doppelpunkte aller parabolischen Substitutionen der Gruppe ϑ auf der realen τ-Axe überall dicht ist, und gehen zu dem Ende etwas genauer auf den arithmetischen Charakter der Gruppe ϑ ein.

Die Gesammtheit aller ganzzahligen projectiven unimodularen Substitutionen bildet offenbar eine Gruppe, die wir im Folgenden stets durch M bezeichnen wollen. Diejenigen unter den Substitutionen von M, die der Congruenzbedingung

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\pm 1 & 0\\ 0 & \pm 1\end{pmatrix} \pmod n$$

Genüge leisten, bilden zufolge der in der vorigen Nummer (S. 52) nachgewiesenen Eigenschaften derselben ebenfalls eine Gruppe M_n, die also in M als Untergruppe enthalten ist und die wir mit Herrn Klein als die Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe bezeichnen. Die Hauptcongruenzgruppe zweiter Stufe M_2, deren Substitutionen durch die Congruenz

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \pmod 2 \tag{6}$$

charakterisirt werden, enthält, wie wir gesehen haben, die Gruppe ϑ jedenfalls als Untergruppe in sich.

Wir wollen nachweisen, dass sie mit dieser Gruppe geradezu zusammenfällt.

Zu dem Ende brauchen wir nur zu beweisen, dass sich jede Substitution von M, die der Congruenz (6) Genüge leistet, durch Composition aus den beiden Substitutionen A_1, A_2 zusammensetzen lässt.

Es ist offenbar für alle ganzzahligen (positiven und negativen) Werthe von m und n

$$A_1^m = \begin{pmatrix}1 & 2m\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad A_2^n = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -2n & 1\end{pmatrix}.$$

Sei nun

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod 2,$$

so haben wir

$$AA_1^m = \begin{pmatrix} \alpha & 2m\alpha + \beta \\ \gamma & 2m\gamma + \delta \end{pmatrix},$$

$$AA_2^n = \begin{pmatrix} \alpha - 2n\beta & \beta \\ \gamma - 2n\delta & \delta \end{pmatrix}.$$

Man kann nun offenbar die Zahlen m, n so wählen, dass

$$|2m\gamma + \delta| < |\gamma|,$$

$$|\gamma - 2n\delta| < |\delta|$$

ist. Bilden wir also die Folge von Substitutionen

$$AA_1^{m_1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta_1 \\ \gamma & \delta_1 \end{pmatrix}, \quad AA_1^{m_1}A_2^{n_1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix},$$

$$AA_1^{m_1}A_2^{n_1}A_1^{m_2} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \delta_2 \end{pmatrix}, \quad AA_1^{m_1}A_2^{n_1}A_1^{m_2}A_2^{n_2} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix},$$

u. s. f.

so kann man über die Zahlen

$$m_1, n_1, m_2, n_2, \cdots$$

so verfügen, dass

$$|\delta_1| < |\gamma|, \quad |\gamma_1| < |\delta_1|, \quad |\delta_2| < |\gamma_1|, \quad |\gamma_2| < |\delta_2|, \cdots$$

so lange nicht eine der Zahlen γ_λ, δ_λ verschwindet. Wir erhalten auf diese Weise eine Folge von ganzen Zahlen

$$\gamma, \delta_1, \gamma_1, \delta_2, \gamma_2, \cdots$$

die dem absoluten Betrage nach abnehmen, bis eine derselben gleich Null wird. Je nachdem diese verschwindende Zahl ein γ oder ein δ ist, erhalten wir also

$$AA_1^{m_1}A_2^{n_1}\cdots A_1^{m_\lambda}A_2^{n_\lambda} = \begin{pmatrix} \alpha_\lambda & \beta_\lambda \\ 0 & \delta_\lambda \end{pmatrix},$$

oder

$$AA_1^{m_1}A_2^{n_1}\cdots A_1^{m_\lambda} = \begin{pmatrix} \alpha_{\lambda-1} & \beta_\lambda \\ \gamma_{\lambda-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Der letztere Fall ist aber ausgeschlossen, da

$$\beta_\lambda \equiv \gamma_{\lambda-1} \equiv 0 \pmod 2$$

sein muss und folglich nicht

$$\beta_\lambda \gamma_{\lambda-1} = -1$$

sein kann. Im ersteren Falle muss

$$\alpha_\lambda \delta_\lambda = 1,$$

also entweder α_λ, δ_λ beide gleich $+1$ oder beide gleich -1 sein. Da ferner

$$\beta_\lambda \equiv 0 \pmod 2$$

ist, so haben wir

$$\begin{pmatrix} \alpha_\lambda & \beta_\lambda \\ 0 & \delta_\lambda \end{pmatrix} = A_1^{\frac{\alpha_\lambda \beta_\lambda}{2}},$$

also ist in der That A als Product von Potenzen der A_1, A_2 darstellbar. Wir erhalten also den wichtigen Satz:

Die projective Monodromiegruppe der Differentialgleichung (L) ist die Hauptcongruenzgruppe zweiter Stufe M_2.

Wir betrachten nun irgend eine parabolische Substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

der Gruppe ϑ oder (wie wir sie nunmehr nennen können) M_2. Dann ist also

$$(\alpha + \delta)^2 = 4,$$

und der Doppelpunkt dieser Substitution hat den Werth

$$\lambda = \frac{\alpha - \delta}{2\gamma}.$$

Wir können z. B.

$$\alpha + \delta = 2$$

voraussetzen, da die andere mögliche Annahme durch Multiplication aller vier Coefficienten mit -1 auf diese zurückgeführt wird; dann ist, wegen $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$,

$$\frac{\alpha - 1}{\gamma} = -\frac{\beta}{\alpha - 1}$$

und folglich

$$(7) \qquad \lambda = \frac{\alpha - 1}{\gamma} = \frac{-\beta}{\alpha - 1}.$$

Bedeutet nun m, n irgend ein Paar zu einander theilerfremder Zahlen, und setzen wir

$$\lambda = \frac{m}{n},$$

so erhalten wir nach (7)

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 + \bar{g} \cdot mn, \\ \beta &= -\bar{g} \cdot m^2, \\ \gamma &= \bar{g} \cdot n^2, \\ \delta &= 1 - \bar{g} \cdot mn, \end{aligned}$$

wo $\bar{g}$ irgend eine ganze Zahl bedeutet. Da aber die Substitution der

Gruppe angehören soll, muss $\bar{g}$ als gerade Zahl $2g$ gewählt werden, dann ist also

(8) $$\begin{pmatrix} 1+2gmn & -2gm^2 \\ 2gn^2 & 1-2gmn \end{pmatrix}$$

für willkürliches ganzzahliges g eine parabolische Substitution, die der Gruppe M_2 angehört und den Doppelpunkt

$$\lambda = \frac{m}{n}$$

besitzt, und zwar ist (8) die allgemeinste in M_2 enthaltene Substitution von dieser Beschaffenheit.

Hieraus folgt zunächst die Richtigkeit der Behauptung, dass die Punktmenge Q auf der realen τ-Axe überall dicht ist, und wir haben sogar die Einsicht gewonnen, dass jeder rationale Punkt der realen τ-Axe als Doppelpunkt von unendlich vielen parabolischen Substitutionen von M_2 erscheint.

Die Substitution (8) lässt sich offenbar in der Form schreiben

$$\begin{pmatrix} 1+2gmn & -2gm^2 \\ 2gn^2 & 1-2gmn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2mn & 2m^2 \\ -2n^2 & 1+2mn \end{pmatrix}^{-g},$$

wir sehen also, dass alle parabolischen Substitutionen von M_2, die denselben Doppelpunkt $\frac{m}{n}$ besitzen, als Potenzen einer einfachsten unter ihnen darstellbar sind. Die Gesammtheit dieser einfachsten parabolischen Substitutionen von M_2 ist folglich der Gesammtheit der realen rationalen Zahlen eindeutig zugeordnet, wenn wir eine solche Substitution derjenigen rationalen Zahl zuordnen, die ihren Doppelpunkt liefert.

Von diesen einfachsten parabolischen Substitutionen der Gruppe M_2 können wir nun zeigen, dass sie sich in Tripel anordnen lassen von der Beschaffenheit, dass ein solches Tripel genau die Substitutionen darstellt, die ein Zweig des Integralquotienten τ erfährt, wenn z einfache positive Umläufe um die drei singulären Punkte 0, 1, ∞ vollzieht. Zu dem Ende haben wir nur zu zeigen, dass jede Substitution von der Form

(9) $$\begin{pmatrix} 1-2mn & 2m^2 \\ -2n^2 & 1+2mn \end{pmatrix}$$

aus einer der drei Substitutionen A_1, A_2, A_3 durch Transformation mit einer Substitution der Gruppe M_2 gewonnen werden kann.

In der That ist, wenn

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

irgend eine Substitution von M_2 bedeutet

$$(10)\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1-2ac & 2a^2 \\ -2c^2 & 1+2ac \end{pmatrix},$$

$$(11)\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} A_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1-2bd & 2b^2 \\ -2d^2 & 1+2bd \end{pmatrix},$$

$$(12)\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} A_3 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1-2(-a+b)(-c+d) & 2(-a+b)^2 \\ -2(-c+d)^2 & 1+2(-a+b)(-c+d) \end{pmatrix};$$

also ist eine Substitution (9), für

$m \equiv 1,\quad n \equiv 0 \pmod 2,$ in der Form (10),
$m \equiv 0,\quad n \equiv 1 \pmod 2,$ in der Form (11),
$m \equiv 1,\quad n \equiv 1 \pmod 2,$ in der Form (12)

darstellbar, und die drei Substitutionen (10), (11), (12) stellen das Tripel von Substitutionen dar, welches der Zweig

$$(13)\qquad \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

des Integralquotienten τ bei einfachen positiven Umläufen von z um die Punkte 0, 1, ∞ erfährt. Die Doppelpunkte dieser drei Substitutionen sind folglich nichts anderes wie die Eckpunkte des schraffirten Dreiecks, welches aus dem Ausgangsdreiecke durch Abbildung mittelst der linearen Function (13) hervorgeht. Wir haben also den von Riemann und Herrn Dedekind herrührenden Satz:

Alle rationalen Punkte der realen τ-Axe sind Eckpunkte der Dreieckstheilung der die obere τ-Halbebene schlicht und lückenlos bedeckenden Fläche F. Und zwar entspricht ein rationaler Werth

$$\frac{m}{n}$$

den Eckpunkten $\tau = \infty,\ 0,\ -1$ des Ausgangsdreiecks, d. h. den singulären Punkten $z = 0,\ 1,\ \infty$ der Differentialgleichung (L), jenachdem

$$\left.\begin{array}{ll} m \equiv 1, & n \equiv 0 \\ m \equiv 0, & n \equiv 1 \\ m \equiv 1, & n \equiv 1 \end{array}\right\} \pmod 2$$

ist.

274. Entwickelungen in der Umgebung der singulären Stellen. Verhalten bei der Annäherung an diese Stellen.

Wir stellen der Vollständigkeit wegen noch die Entwickelungen von z als Function von τ in der Nähe der Stellen

$$\tau = \infty,\ 0,\ -1$$

zusammen, wie sie sich im Sinne der Nummern 196 und 203 (Bd. II, 1, S. 254, 283) aus den Formeln der Nummern 248, 249 (Bd. II, 1, S. 479 ff.) ergeben.

Für $z = 0$ ist, wenn wir in Uebereinstimmung mit den Bezeichnungen der Nr. 196

$$\mathfrak{y}_1 = K, \quad \mathfrak{y}_2 = K'i, \quad z_1 = u_{01}, \quad z_2 = u_{02}$$

setzen, die durch die Gleichungen (2) bez. (3) jener Nummer definirte Substitution nach den Gleichungen (9), (16) der Nummern 248, 249 (Bd. II, 1, S. 480, 482)

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & 0 \\ 2i\log 2 & -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = -\frac{\pi i}{4};$$

also ist nach Gleichung (5a) der Nr. 196 (Bd. II, 1, S. 255)

$$z = \mathfrak{P}(e^{4\log 2}\, e^{\tau\pi i}),$$

dies ist aber nichts anderes wie die Entwickelung (40) der Nr. 265 (S. 22), die wir darum gleich in der Form

$$(14) \qquad z = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \varepsilon_\varkappa q^\varkappa = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \varepsilon_\varkappa e^{\varkappa\tau\pi i}$$

schreiben können. Für hinreichend kleine Werthe von z ist nach Nr. 203 (Bd. II, 1, S. 284) der reale Theil von

$$4\log 2 \cdot \tau\pi i$$

sehr gross negativ, also der absolute Betrag von q sehr klein. Die Reihe (14), die in einer gewissen Umgebung von $q = 0$ convergirt, kann nach einem bekannten Principe der Functionentheorie nur an einer Stelle, in deren Umgebung die Function z von q nicht regulär ist, zu convergiren aufhören. Wie wir gezeigt haben, ist aber z in der Umgebung jeder Stelle τ, deren Coefficient von i wesentlich positiv ist, und folglich in der Umgebung jeder Stelle q, deren absoluter Betrag wesentlich kleiner ist wie Eins, regulär, die Reihe (14) convergirt folglich innerhalb des Einheitskreises

$$|q| = 1$$

der q-Ebene.

Andererseits wissen wir, dass die Function z von τ nur in der oberen τ-Halbebene existirt, während die reale τ-Axe überall dicht besetzt ist mit Doppelpunkten nicht elliptischer Substitutionen der Gruppe M_2, d. h. (vergl. Nr. 204, Bd. II, 1, S. 286) mit Unbestimmt-

heitsstellen dieser Function. Also existirt die Function z von q nur innerhalb des Einheitskreises der q-Ebene, und die Peripherie des Einheitskreises ist mit Unbestimmtheitsstellen überall dicht besetzt.

Die Reihe (14) stellt also die Function z von q in ihrem ganzen Existenzbereiche dar.

Wenn q in beliebiger Richtung in den Nullpunkt einrückt, so rückt z in den singulären Punkt $z = 0$ ein. Wenn also τ eine beliebige Folge von Zahlen

$$w_1, w_2, w_3, \cdots$$

durchläuft, deren Coefficienten von i positiv sind, und für welche

$$\lim_n w_n = \infty$$

ist, so ist auch der Grenzwerth, dem sich die Werthe von z für diese Werthenfolge von τ nähern, streng gleich Null (vergl. Nr. 203, Bd. II, 1, S. 284).

In analoger Weise können wir die Entwickelungen von $z - 1$ und von $\frac{1}{z}$ in der Nähe der beiden anderen Eckpunkte $\tau = 0$ und $\tau = -1$ des Ausgangsdreiecks herstellen. Die Entwickelung von $z - 1$ ergiebt sich unmittelbar aus (14), wenn wir die in der Nr. 248 (Bd. II, 1, S. 481) abgeleiteten Gleichungen

$$K(z) = K'(1 - z),$$
$$K'(z) = K(1 - z)$$

beachten, aus denen für den Integralquotienten

(15) $$\tau(z) = \frac{-1}{\tau(1 - z)}$$

folgt. Setzen wir also in (14) an Stelle von z, $1 - z$, so kommt

(16) $$1 - z = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \varepsilon_\varkappa e^{-\frac{\varkappa \pi i}{\tau}}.$$

Für $\frac{1}{z}$ haben wir in der Bezeichnung der Nr. 196 (Bd. II, 1)

$$\mathfrak{y}_1 = K, \quad \mathfrak{y}_2 = K'i, \quad z_1 = u_{\infty 1}, \quad z_2 = u_{\infty 2},$$

also ist nach den Gleichungen (19) der Nr. 249 (Bd. II, 1, S. 484)

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \\ -2i\log 2 & \frac{\pi}{2} - 2i\log 2 \end{pmatrix},$$

und somit nach Gleichung (5) der Nr. 196 (Bd. II, 1, S. 255)

(17) $$\frac{1}{z} = \mathfrak{P}\left(e^{-\pi i \frac{1}{\tau + 1}}\right).$$

Die Reihen auf den rechten Seiten der Gleichungen (16), (17) convergiren für alle Punkte der oberen τ-Halbebene und stellen folglich ebenso wie (14) die Function z in ihrem ganzen Existenzbereiche dar. Wenn τ in einer Folge von Zahlen mit positivem Coefficienten von i in den Punkt 0 beziehungsweise -1 einrückt, so nähert sich z streng den Werthen 1 beziehungsweise ∞.

Da wir in Bezug auf jedes Dreieck der Theilung der oberen τ-Halbebene die analogen Schlüsse machen können, so haben wir als Ergänzung zu dem oben aufgestellten Satze das Ergebniss:

Die Function z von τ nähert sich streng einem der Werthe

$$z = 0, 1, \infty,$$

wenn τ eine beliebige Folge von Zahlen mit positivem Coefficienten von i durchläuft, deren Grenzwerth eine reale rationale Zahl ist. Und zwar kommt der Werth 0, 1, ∞ zum Vorschein, jenachdem für diese rationale Zahl der Zähler ungerade und der Nenner gerade, der Zähler gerade und der Nenner ungerade, Zähler und Nenner beide ungerade sind.

Fünftes Kapitel.

275. Ableitung weiterer Eigenschaften der Modulfunction aus der Darstellung durch die Thetafunctionen. Beziehung zwischen den Gruppen M und M_2.

Die Entwickelungen (14), (16), (17) der vorhergehenden Nummer sind den Entwickelungen einer periodischen Function nach Fourier'schen Reihen analog. Dieselben sind aber nicht als die wirklich naturgemässen Darstellungen der Function z anzusehen, vielmehr ist die aus den Gleichungen (VI) der Nr. 267 (S. 30) sich ergebende Darstellung

(18) $$z = \frac{\vartheta_2^4(\tau)}{\vartheta_3^4(\tau)}, \quad 1 - z = \frac{\vartheta^4(\tau)}{\vartheta_3^4(\tau)}$$

diejenige, die für die numerische Berechnung und die Auffindung weiterer Eigenschaften der Function z am geeignetesten ist.

In der That lassen sich, wenn man von der expliciten Darstellung der Functionen $\vartheta(\tau)$, $\vartheta_2(\tau)$, $\vartheta_3(\tau)$, wie sie in der Nr. 267 (S. 29) gegeben worden sind, ausgeht, zunächst die bisher gefundenen Eigenschaften der Function z von τ herleiten, sofern man den Satz als bewiesen ansieht, dass der Coefficient von i in τ für jeden Werth von z (ausgenommen 0, 1, ∞) einen wesentlich positiven Werth hat. Man hat zu dem Ende nur zwei Gleichungssysteme aufzustellen, die sich aus den Formeln der Nr. 267 (S. 29) unmittelbar ergeben und die uns auch noch zu weiteren Erörterungen führen werden.

Zunächst folgt aus den Gleichungen (I), (II) der erwähnten Nummer

(19) $$\begin{cases} \vartheta_3^2(\tau) = \frac{i}{\tau}\,\vartheta_3^2\left(\frac{-1}{\tau}\right), \\ \vartheta_2^2(\tau) = \frac{i}{\tau}\,\vartheta^2\left(\frac{-1}{\tau}\right), \\ \vartheta^2(\tau) = \frac{i}{\tau}\,\vartheta_2^2\left(\frac{-1}{\tau}\right); \end{cases}$$

ferner liefern die Entwickelungen der drei ϑ-Functionen ohne weiteres die Gleichungen

$$(20)\quad \begin{cases} \vartheta_3(\tau+1) = \vartheta(\tau), \\ \vartheta(\tau+1) = \vartheta_3(\tau), \\ \vartheta_2(\tau+1) = e^{\frac{\pi i}{4}}\,\vartheta_2(\tau). \end{cases}$$

Setzen wir endlich

$$z = \frac{\vartheta_2^4(\tau)}{\vartheta_3^4(\tau)} = \Phi(\tau)$$

und verwandeln $+i$ in $-i$, so folgt

$$\bar{z} = \frac{16e^{-\bar{\tau}\pi i}(1+e^{-2\bar{\tau}\pi i}+\cdots)^4}{(1+2e^{-\bar{\tau}\pi i}+\cdots)^4},$$

d. h. wir haben

$$(21)\qquad \bar{z} = \Phi(-\bar{\tau}).$$

Aus (19), (20) ergiebt sich mit Rücksicht auf (18)

$$(22)\qquad \Phi\left(\frac{-1}{\tau}\right) = 1 - z, \quad \Phi(\tau+1) = \frac{-z}{1-z}.$$

Setzen wir

$$S_1\tau = \tau + 1, \quad S_2\tau = \frac{-1}{\tau} = S_2^{-1}\tau,$$

so sind dies zwei Substitutionen der Gruppe M, und wir haben offenbar

$$A_1 = S_1^2, \quad A_2 = S_2 S_1^2 S_2;$$

hieraus lassen sich nun mit Hülfe der Gleichungen (21), (22) die sämmtlichen uns bereits bekannten Eigenschaften der Function $\Phi(\tau)$ mit Leichtigkeit herleiten. Die Gleichungen (21), (22) gestatten uns aber auch noch Eigenschaften dieser Function aufzufinden, die wir bisher nicht kennen gelernt haben. Wir schicken folgende Bemerkungen voraus.

Betrachten wir zwei Substitutionen

$$S = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix}$$

der Gruppe M, die so beschaffen sind, dass

$$\alpha \equiv \alpha_1, \quad \beta \equiv \beta_1, \quad \gamma \equiv \gamma_1, \quad \delta \equiv \delta_1 \pmod 2,$$

oder wie wir kurz schreiben

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix} \pmod 2,$$

dann ist offenbar

$$TS^{-1} = \begin{pmatrix}\alpha_1\delta - \beta_1\gamma & -\alpha_1\beta + \beta_1\alpha\\ \gamma_1\delta - \delta_1\gamma & -\gamma_1\beta + \delta_1\alpha\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \pmod 2,$$

also eine Substitution der Gruppe M_2. Bezeichnen wir mit

$$\alpha_0, \quad \beta_0, \quad \gamma_0, \quad \delta_0$$

vier Zahlen, deren Determinante gleich Eins ist, und die beziehungsweise kleinste Reste der Zahlen

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta$$

nach dem Modul 2 darstellen, dann ist also

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = A^{-1}$$

eine Substitution von M_2. Jede Substitution S von M lässt sich demnach in die Form setzen

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{pmatrix},$$

wo A eine Substitution von M_2 bedeutet. Die Substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{pmatrix}$$

kann nur eine ganz beschränkte Anzahl von verschiedenen Gestalten besitzen.

Für S ergeben sich nämlich, modulo 2 betrachtet, nur die folgenden Möglichkeiten

$$\left.\begin{array}{lllll} 1) & \alpha \equiv 1, & \beta \equiv 0, & \gamma \equiv 0, & \delta \equiv 1, \\ 2) & \alpha \equiv 1, & \beta \equiv 0, & \gamma \equiv 1, & \delta \equiv 1, \\ 3) & \alpha \equiv 1, & \beta \equiv 1, & \gamma \equiv 0, & \delta \equiv 1, \\ 4) & \alpha \equiv 1, & \beta \equiv 1, & \gamma \equiv 1, & \delta \equiv 0, \\ 5) & \alpha \equiv 0, & \beta \equiv 1, & \gamma \equiv 1, & \delta \equiv 1, \\ 6) & \alpha \equiv 0, & \beta \equiv 1, & \gamma \equiv 1, & \delta \equiv 0, \end{array}\right\} \pmod 2;$$

die Substitutionen von M zerfallen also in sechs Typen modulo 2, jenachdem sie nämlich mit einer der sechs Substitutionen

$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad t_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$t_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad t_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

modulo 2 congruent sind. Die mit

$$t_1 = 1$$

congruenten Substitutionen von M sind nichts anderes, wie die Substitutionen von M_2; wir können also sagen:

$$M_2, \quad M_2 t_2, \quad M_2 t_3, \quad M_2 t_4, \quad M_2 t_5, \quad M_2 t_6$$

sind jene 6 Typen von Substitutionen der Gruppe M, und die Gruppe M lässt sich in der Form

(23) $$M = M_2(1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ t_5,\ t_6)$$

schreiben, wo die rechte Seite als ein symbolisches Product anzusehen ist. Durch Ausführung dieser symbolischen Multiplication, d. h. indem man jede Substitution von M_2 mit jeder der in den Parenthesen stehenden Substitutionen componirt, erhält man alle Substitutionen von M und jede nur ein einziges Mal. Wir nennen darum die Gesammtheit der Substitutionen

$$(1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ t_5,\ t_6)$$

den Quotienten der Gruppe M_2 in Bezug auf die Gruppe M.

Die Substitutionen t_3 und t_6 sind nichts anderes wie unsere Substitutionen S_1, S_2; aus diesen setzen sich die übrigen $t_\varkappa$ in folgender Weise zusammen

(24) $$t_5 = t_6 t_3,\quad t_4 = t_3 t_6,\quad t_2 = t_6 t_3 t_6;$$

hieraus folgt zunächst, dass die sämmtlichen Substitutionen von M sich aus Potenzen der beiden Substitutionen S_1, S_2 durch Composition zusammensetzen lassen, d. h. es bilden z. B. die drei Substitutionen

$$S_1,\ S_2,\ S_3 = S_1^{-1} S_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis der Gruppe M.

Bedeutet S irgend eine Substitution von M, so ist (Nr. 140, Bd. II, 1, S. 36) die Untergruppe

$$S^{-1} M_2 S$$

mit M_2 innerhalb M gleichberechtigt. Da aber für eine Substitution A von M_2 offenbar

$$S^{-1} A S \equiv S^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2},$$

also $S^{-1}AS$ selbst eine Substitution von M_2 ist, so ist

$$S^{-1} M_2 S = M_2,$$

d. h. M_2 eine ausgezeichnete Untergruppe von M.

276. Moduln, die durch lineare Transformation des elliptischen Integrales entstehen. Biquadratische Form; ihre ganzen Invarianten und die absolute Invariante J.

Wenn auf τ die beliebige Substitution mit realen Coefficienten und positiver Determinante

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma > 0,$$

angewandt wird, so besitzt der Coefficient von i in

$$\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$$

dasselbe Vorzeichen, wie der Coefficient von i in τ, und zwar ist, wenn wir den Coefficienten von i einer complexen Grösse durch ein vorgesetzes J bezeichnen,

(25) $$J\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{|\gamma\tau+\delta|^2}J(\tau).$$

Hieraus folgt, dass die Function

(26) $$\Phi(S\tau),$$

wo S eine beliebige Substitution mit ganzzahligen Coefficienten und positiver Determinante bedeutet, für alle Werthe von τ, deren Coefficient von i positiv ist, existirt. Wenn die Determinante von S gleich n ist, so stellt die Function (26) das Quadrat des Moduls eines elliptischen Integrals erster Gattung dar, welches aus dem Integrale mit dem Modul

$$\varkappa=\sqrt{z}$$

durch eine Transformation n^{ter} Ordnung hervorgeht. Für $n=1$, d. h. wenn S eine Substitution von M ist, liefert also die Function (26) das Quadrat des Moduls eines elliptischen Integrals, welches aus dem zum Modul $\varkappa$ gehörigen durch eine Transformation ersten Grades oder eine lineare Transformation entsteht. Mit diesen linearen Transformationen entsprechenden Moduln haben wir uns einen Augenblick zu beschäftigen.

Da sich jede Substitution S von M in der Form

$$S=At_\varkappa$$

schreiben lässt, wo A eine Substitution von M_2 und $\varkappa$ eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 ist, so haben wir

$$\Phi(S\tau)=\Phi(t_\varkappa\tau),$$

so dass also nur die sechs Functionen

$$\Phi(t_\varkappa\tau) \qquad (\varkappa=1,2,3,4,5,6)$$

zu betrachten sind. Diese lassen sich aber mit Rücksicht auf die Gleichungen (22) und (24) sofort angeben. Es ist nämlich nach (22)

$$\Phi(t_6\tau)=1-z,\quad \Phi(t_3\tau)=\frac{z}{z-1},$$

ferner nach (24)

$$\Phi(t_5\tau)=\Phi(t_6t_3\tau)=1-\Phi(t_3\tau)=\frac{1}{1-z},$$

$$\Phi(t_4\tau)=\Phi(t_3t_6\tau)=\frac{z-1}{z},$$

$$\Phi(t_2\tau)=\Phi(t_6t_3t_6\tau)=\frac{1}{z},$$

wir können also den folgenden wichtigen Satz aussprechen:

Durch Anwendung einer Substitution S der Gruppe M auf die unabhängige Variable der Function

$$z = \Phi(\tau)$$

verwandelt sich diese Function beziehungsweise in

$$(27)\quad \begin{cases} z = T_1 z, & \frac{1}{z} = T_2 z, & \frac{z}{z-1} = T_3 z, \\ \frac{z-1}{z} = T_4 z, & \frac{1}{1-z} = T_5 z, & 1 - z = T_6 z, \end{cases}$$

je nachdem die Coefficienten von S modulo 2 das durch die Congruenzen 1)—6) (S. 65) fixirte Verhalten zeigen.

Die sechs linearen Substitutionen (27) sind genau diejenigen, welche, wie in der Nr. 73 (Bd. I, S. 261 ff.) gezeigt wurde, auf die unabhängige Variable einer Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe angewandt, diese Differentialgleichung in eine ebensolche überführen, in welcher die α, β, γ mit den entsprechenden Grössen der ursprünglichen Differentialgleichung durch lineare Gleichungen (a. a. O. S. 262 oben) verknüpft sind. In unserem Falle

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 1$$

geht die Differentialgleichung (L) durch Anwendung dieser Substitutionen auf die unabhängige Variable in sich selbst über.

Wir hatten bereits in der Nr. 73 (Bd. I, S. 265) hervorgehoben, dass die sechs Substitutionen (27) eine Gruppe bilden und dass sie die verschiedenen Werthe des Doppelverhältnisses von vier Punkten bei den vierundzwanzig möglichen Permutationen derselben darstellen. Diese Deutung der sechs Substitutionen (27) lässt in dem uns jetzt beschäftigenden Falle eine interessante analytische Begründung zu, die uns zu weiteren Untersuchungen hinleiten wird.

Gehen wir nämlich von einer beliebigen ganzen Function vierten Grades mit von einander verschiedenen Nullstellen a_1, a_2, a_3, a_4,

$$f(\xi) = (\xi - a_1)(\xi - a_2)(\xi - a_3)(\xi - a_4)$$

aus, und transformiren das elliptische Integral erster Gattung

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{f(\xi)}}$$

durch die Substitution

$$(\mathrm{I})\quad x = \frac{a_2 - a_3}{a_2 - \xi} : \frac{a_1 - a_3}{a_1 - \xi},$$

so verwandelt sich dasselbe in

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-z)}},$$

d. h. in die von uns stets benutzte Normalform, und das Quadrat des Moduls z erhält den Werth

$$\text{(II)} \qquad z = \frac{a_1 - a_4}{a_1 - a_3} : \frac{a_2 - a_4}{a_2 - a_3}.$$

Es wird also z gleich dem Doppelverhältnisse der beiden Punkte a_1, a_2 in Bezug auf die beiden Punkte a_4, a_3.

Permutiren wir nun in dem Ausdrucke (I) die vier Punkte a_1, a_2, a_3, a_4 auf alle möglichen Arten, so erhalten wir neue Normalformen des gegebenen elliptischen Integrals, die offenbar durch lineare Transformationen der Integrationsvariabeln aus einander hervorgehen. Die entsprechenden Quadrate der Moduln gehen dann aus z gerade durch die sechs Substitutionen (27) hervor, so dass also die sechs Ausdrücke

$$z, \quad \frac{1}{z}, \quad \frac{z}{z-1}, \quad \frac{z-1}{z}, \quad \frac{1}{1-z}, \quad 1-z$$

die sechs verschiedenen Werthe des Quadrates des Moduls darstellen, die zu einem und demselben elliptischen Gebilde gehören.

Nun ist das Doppelverhältniss von vier Punkten ein rein geometrischer Begriff, der von der Wahl des Coordinatensystems unabhängig ist. Deuten wir in üblicher Weise die Variable ξ geometrisch durch die Punkte einer geraden Linie, indem wir

$$\xi = \frac{\xi_1}{\xi_2}$$

setzen und ξ_1, ξ_2 als die mit bestimmten constanten Factoren multiplicirten Abstände eines Punktes unserer Geraden von zwei festen Fundamentalpunkten auffassen, so entspricht einer Aenderung der beiden Fundamentalpunkte, d. h. einer Aenderung des Coordinatensystems auf der Geraden, die Ausübung einer linearen Substitution

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} \alpha \xi_1 + \beta \xi_2, \\ \gamma \xi_1 + \delta \xi_2 \end{cases}$$

mit nicht verschwindender Determinante auf die ξ_1, ξ_2.

Die vier Punkte

$$\xi = a_1, \ a_2, \ a_3, \ a_4$$

werden durch die biquadratische Form

$$\text{(IV)} \quad \xi_2^4 f(\xi) = \alpha_0 \xi_1^4 + 4\alpha_1 \xi_1^3 \xi_2 + 6\alpha_2 \xi_1^2 \xi_2^2 + 4\alpha_3 \xi_1 \xi_2^3 + \alpha_4 \xi_2^4,$$

deren Nullstellen sie sind, gegeben, ihr Doppelverhältniss z muss also ungeändert bleiben, wenn wir von der Form (IV) durch die lineare Substitution (III) zu einer neuen Form übergehen. D. h. mit anderen Worten, das Doppelverhältniss, oder genauer, die sechs Werthe (27)

desselben sind absolute Invarianten für die linearen Transformationen (III), also absolute Invarianten im gewöhnlichen formentheoretischen Sinne.

Nun hat die biquadratische Form (IV) bekanntlich die beiden von einander unabhängigen ganzen rationalen Invarianten

$$g_2 = \alpha_0\alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 3\alpha_2^2,$$

$$g_3 = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{vmatrix},$$

die erstere vom Gewichte 4, die letztere vom Gewichte 6, aus denen sich die Discriminante Δ in der Form

$$\Delta = g_2^3 - 27\,g_3^2$$

zusammensetzt. Es ist dann Δ vom Gewicht 12, also

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta} = 1 + \frac{27\,g_3^2}{\Delta}$$

eine absolute (rationale) Invariante der Form (IV). Drückt man g_2, g_3 durch die Wurzeln a_1, a_2, a_3, a_4 der Form (IV) aus, so ergiebt sich

$$J = \frac{4(1 - z + z^2)^3}{27\,z^2(1 - z)^2}, \tag{28}$$

und man erkennt leicht, dass die Wurzeln der Gleichung sechsten Grades, der hiernach z als Function von J genügt, genau durch die sechs Grössen (27) dargestellt werden.

Die rationale Function J von z hat folglich die Eigenschaft, ungeändert zu bleiben, wenn man auf z die sechs linearen Substitutionen (27) ausübt.

277. Zwei neue eindeutig umkehrbare Dreiecksfunctionen, von denen die eine algebraisch ist. Discussion dieser algebraischen Function.

Setzen wir nun in die Gleichung (28) für z seinen Werth als Function von τ ein, so verwandelt sich J in eine ebenfalls eindeutige Function von τ

$$J(\tau),$$

diese Function hat zufolge des Satzes der Nr. 276 (S. 68) und des eben ausgesprochenen Theorems die Eigenschaft, ungeändert zu bleiben, wenn man auf τ irgend eine Substitution der Gruppe M anwendet.

Fassen wir umgekehrt τ als Function von J auf, so geschieht dies am zweckmässigsten, wenn wir erst τ als Function von z und dann z als Function von J betrachten. Zu einem willkürlichen (nicht singulären) Werthe von J gehören die sechs Werthe (27) von z; dem Werthe

$$T_{\varkappa} z$$

entsprechen dann vermöge der Gleichung

$$T_{\varkappa} z = \Phi(A t_{\varkappa} \tau),$$

wo A irgend eine Substitution der Gruppe M_2 bedeutet, genau die aus τ durch die Substitutionen

$$M_2 t_{\varkappa}$$

hervorgehenden Werthe von τ. Also entsprechen einem willkürlichen Werthe von J genau die sämmtlichen aus τ durch die Substitutionen der Gruppe M hervorgehenden Werthe. D. h.:

Die Function $J(\tau)$ bleibt nicht nur bei den Substitutionen von M ungeändert, sondern wenn für ein τ' die Gleichung

$$J(\tau) = J(\tau')$$

besteht und τ einen willkürlichen Punkt der oberen Halbebene bedeutet, so geht τ' aus τ nothwendig durch eine Substitution von M hervor.

Wir sind hier auf zwei Functionen der absoluten Invariante J geführt worden. Die eine, z, ist eine algebraische und hat die Eigenschaft, dass ihre sämmtlichen Zweige durch einen derselben mit Hülfe der Formeln (27) dargestellt werden, d. h. also mittelst der Substitutionen einer endlichen projectiven Gruppe, die andere, τ, ist eine transcendente von der Beschaffenheit, dass ihre sämmtlichen Zweige aus einem derselben durch die Substitutionen der projectiven Gruppe M hervorgehen. Beiden Functionen gemeinsam ist die Eigenschaft, dass ihre Umkehrungsfunction eindeutig ist.

Wir schliessen hieraus zunächst (ähnlich wie in der Nr. 215, Bd. II, 1, S. 338), dass für beide Functionen die Schwarz'schen Ableitungen

$$\Delta\binom{z}{J}, \quad \Delta\binom{\tau}{J}$$

eindeutige Functionen von J sind; insbesondere muss, da z eine algebraische Function von J ist,

$$(29) \qquad \Delta\binom{z}{J} = r(J)$$

eine rationale Function von J sein.

Ferner ist aber nach Nr. 180 (Bd. II, 1, S. 184)

$$\varDelta\binom{\tau}{J} = \varDelta\binom{\tau}{z}\frac{1}{\left(\frac{dJ}{dz}\right)^2} + \varDelta\binom{z}{J},$$

also muss, da in unserem Falle (vergl. die Gleichg. (3), (5) der **Nr.** 268, S. 32, worin $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ zu nehmen sind)

$$(30) \qquad \varDelta\binom{\tau}{z} = -\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{z^2} + \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{z(1-z)}\right\} = q_0(z)$$

ist, der Ausdruck

$$(31) \qquad \varDelta\binom{\tau}{J} = Q(J)$$

jedenfalls eine algebraische Function von J und demnach ebenfalls eine rationale Function von J sein. Es handelt sich nun um die Bestimmung der beiden rationalen Functionen

$$r(J), \quad Q(J).$$

Von den sechs Wurzeln der Gleichung (28) können zwei mit einander identisch sein:

1) für $z = 1$. Dann ist

$$z = T_2 z = 1, \quad T_3 z = T_5 z = \infty, \quad T_4 z = T_6 z = 0, \quad J = \infty,$$

die Determinante Δ der biquadratischen Form (IV) verschwindet, d. h. es fallen zwei ihrer Wurzeln zusammen;

2) wenn das Doppelverhältniss der vier Punkte a_1, a_2, a_3, a_4 den Werth -1 hat, d. h. wenn die vier Punkte harmonisch liegen, dann ist etwa

$$z = T_6 z = \frac{1}{2}, \quad T_2 z = T_5 z = 2, \quad T_3 z = T_4 z = -1, \quad J = 1;$$

3) wenn das Doppelverhältniss ein äquianharmonisches ist; dann ist z. B.

$$\left.\begin{array}{r} z = T_4 z = T_5 z = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) = \varepsilon \\ T_2 z = T_3 z = T_6 z = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) = 1 - \varepsilon \end{array}\right\} J = 0.$$

Also sind die Punkte

$$J = 0, \ 1, \ \infty$$

die einzigen Verzweigungspunkte der algebraischen Function z von J, und zwar ist in der Umgebung von $J = 1$ und von $J = \infty$ jeder Zweig von z nach positiven ganzen Potenzen von

$$(J-1)^{\frac{1}{2}} \text{ beziehungsweise } \left(\frac{1}{J}\right)^{\frac{1}{2}},$$

und in der Umgebung von $J=0$ nach ebensolchen Potenzen von

$$J^{\frac{1}{3}}$$

entwickelbar.

Hieraus schliessen wir, dass die Differentialgleichung (29) den Quotienten zweier Integrale einer Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe definirt, d. h. dass die Function z von J eine Dreiecksfunction (Nr. 270, S. 44) ist; und zwar haben wir, wie eben gefunden wurde,

$$(32)\qquad \delta_1 = \frac{1}{3}, \quad \delta_2 = \frac{1}{2}, \quad \delta_3 = \frac{1}{2},$$

d. h. z ist nichts anderes, wie

$$z = s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, J\right),$$

und die rechte Seite der Differentialgleichung (29) lautet nach Gleichung (3) der Nr. 268 (S. 32)

$$r(J) = \frac{1}{4}\left\{-\frac{8}{9}\frac{1}{J^2} - \frac{3}{4}\frac{1}{(1-J)^2} - \frac{8}{9}\frac{1}{J(1-J)}\right\}.$$

Wir haben also auf diese Weise einen Fall kennen gelernt, in welchem die Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe algebraisch integrirbar und überdies so beschaffen ist, dass die unabhängige Variable J als rationale Function des Integralquotienten z erscheint.

Wenn wir uns in der z-Ebene die reguläre Vierecks- beziehungsweise Dreieckstheilung denken, die die Abbildung der J-Ebene durch die verschiedenen Zweige der z-Function liefert, so kann dieselbe, da z eine sechswerthige Function von J ist, nur aus sechs Vierecken bestehen. Die J-Ebene werde wieder durch die beiden von 0 und 1 aus längs der realen Axe nach dem Unendlichen hin gelegten Querschnitte l_1, l_2 zerschnitten, dann haben wir also als Begrenzungslinien der sechs Vierecke diejenigen Curven der z-Ebene, die den beiden Ufern von l_1, l_2 entsprechen und als Diagonalen die den realen Werthen von J zwischen 0 und 1 entsprechenden z-Curven. Wenn wir also überhaupt die z-Curven construiren, die realen J-Werthen entsprechen, so erhalten wir die Theilung der z-Ebene in zwölf Dreiecke, die abwechselnd die Abbildungen der oberen und unteren J-Halbebene darstellen.

Nun ist aber offenbar nach Gleichung (28) J für reale Werthe von z ebenfalls real; wir können also immer bestimmte Zweige z so fixiren, dass für gewisse reale Werthe von J die Werthe dieser Zweige real ausfallen, d. h. die reale z-Axe ist in ihrer ganzen Ausdehnung Begrenzung der Dreieckstheilung. Bilden wir nun die der realen z-Axe entsprechende Spiegelung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{z}$$

und setzen dieselbe mit allen Substitutionen der Monodromiegruppe

$$(1,\ T_2,\ T_3,\ T_4,\ T_5,\ T_6)$$

der Function z von J zusammen, so müssen in der Form

$$T_\varkappa \bar{z}$$

alle Spiegelungen über die Seiten unserer Dreieckstheilung enthalten sein. Wir erhalten folglich alle diese Seiten, wenn wir diejenigen Curven

$$z = T_\varkappa \bar{z}$$

nehmen, die reale Kreise darstellen. Dies ist für $\varkappa = 1, 2, 3, 6$ der Fall, und zwar haben wir

$$\text{für}\quad \varkappa = 2, \qquad z\bar{z} = 1,$$
$$\text{für}\quad \varkappa = 3, \qquad (z-1)(\bar{z}-1) = 1,$$
$$\text{für}\quad \varkappa = 6, \qquad z + \bar{z} = 1,$$

so dass also die in der Fig. 21 dargestellte Theilung der z-Ebene in

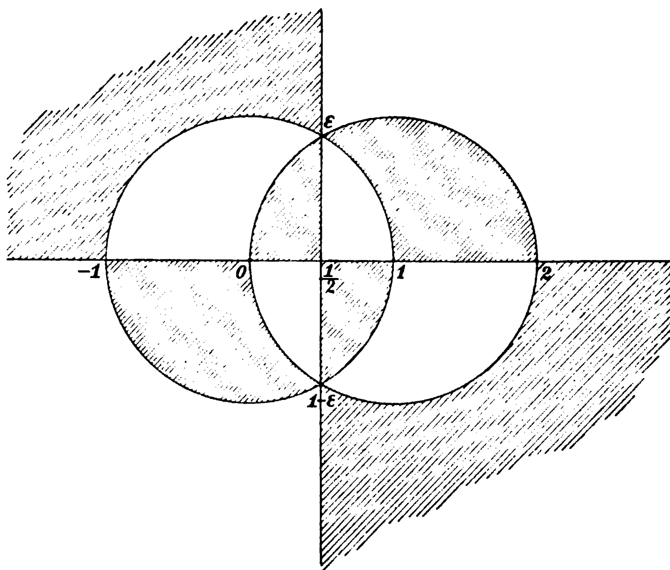


Fig. 21.

zwölf Kreisbogendreiecke entsteht. Als Ecken erscheinen die Punkte

$$\infty,\ -1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ \varepsilon,\ 1-\varepsilon,$$

und wir wissen nach dem Vorhergehenden schon, wie sich dieselben auf die singulären Punkte

$$J = 0,\ 1,\ \infty$$

vertheilen.

Betrachten wir z. B. das Dreieck

$$\left(1,\ \frac{1}{2},\ 1-\varepsilon\right),$$

so entsprechen den Ecken desselben in der angegebenen Reihenfolge die Punkte

$$J = \infty,\ 1,\ 0,$$

also ist das Dreieck selbst die Abbildung der unteren J-Halbebene, und folglich das Spiegelbild desselben in Bezug auf die Seite $\left(\frac{1}{2},\ 1-\varepsilon\right)$, die den realen J-Werthen zwischen 0 und 1 entspricht, d. h. das Dreieck

$$\left(\frac{1}{2},\ 1-\varepsilon,\ 0\right)$$

die Abbildung der oberen J-Halbebene. Das durch Vereinigung dieser beiden Dreiecke entstehende Viereck

$$\left(0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 1-\varepsilon\right)$$

ist demnach die Abbildung der durch die Querschnitte l_1, l_2 zerschnittenen J-Ebene, und die Substitution

$$T_4 z,$$

durch welche die dem negativen Ufer von l_1 entsprechende Seite $(1,\ 1-\varepsilon)$ in die dem positiven Ufer von l_1 entsprechende $(0,\ 1-\varepsilon)$ transformirt wird, ist diejenige, welche der betrachtete z-Zweig erfährt, wenn J den Querschnitt l_1 einmal in positiver Richtung überschreitet. Ebenso erleidet z die die Seite $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ in $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ transformirende Substitution

$$T_6 z,$$

wenn J den Querschnitt l_2 einmal in positiver Richtung überschreitet. Damit ist nun die Verzweigungsart der Function z von J vollständig charakterisirt.

278. Discussion der absoluten Invariante J als Function des Periodenquotienten.

Wir könnten jetzt mittelst der Formel

$$Q(J) = q_0(z)\left(\frac{dz}{dJ}\right)^2 + r(J)$$

die rechte Seite der Differentialgleichung (31) ausrechnen, ziehen es aber vor, die Form von $Q(J)$ durch functionentheoretische Betrachtungen zu bestimmen.

Zunächst ist evident, dass die einzigen singulären Stellen der Function τ von J die Punkte

$$J = 0,\ 1,\ \infty$$

sind, so dass also τ ebenfalls eine Dreiecksfunction von J ist. Es handelt sich nur noch um die Bestimmung der entsprechenden Werthe von δ_1, δ_2, δ_3.

Die Abbildung der zerschnittenen J-Ebene auf die τ-Ebene wird nach den allgemeinen Erörterungen der Nummern 269 und 270 ein Kreisbogenviereck sein, welches durch die den realen J-Werthen zwischen 0 und 1 entsprechende Diagonale in zwei symmetrische Kreisbogendreiecke zerfällt. Die Winkel eines solchen Kreisbogendreiecks sind die mit π multiplicirten δ_1, δ_2, δ_3. Durch successive Spiegelungen dieses Kreisbogendreiecks erhalten wir die der Function J entsprechende Theilung in der τ-Ebene, und diese muss so beschaffen sein, dass je sechs Dreiecke derselben sich zu einem Dreiecke der der Function z entsprechenden Theilung zusammenfügen.

Nehmen wir also z. B. das Ausgangsdreieck $(-1, 0, \infty)$ der Fig. 20 (S. 47), welches die Abbildung der unteren z-Halbebene darstellt, so muss dasselbe entsprechend der Theilung der unteren z-Halbebene in sechs Kreisbogendreiecke, wie sie in der Fig. 21 dargestellt ist, in sechs Dreiecke der der Function J entsprechenden Theilung der τ-Ebene zerfallen. Wir können die τ-Curven, die den Begrenzungscurven der in der z-Ebene gefundenen Theilung entsprechen, sofort angeben.

Zunächst entsprechen, wie wir bereits wissen, den Werthen von z auf der realen Axe die Seiten

$$\tau + \bar{\tau} = 0, \quad \tau + \bar{\tau} = -2, \quad 2\tau\bar{\tau} + \tau + \bar{\tau} = 0$$

des Ausgangsdreieckes der τ-Ebene. Ferner ist für den Einheitskreis

$$z\bar{z} = 1$$

der z-Ebene

$$\bar{z} = \frac{1}{z},$$

also für die entsprechenden τ-Werthe, da nach den Formeln der Nr. 275 (S. 64)

$$\bar{z} = \Phi(-\bar{\tau}), \quad \frac{1}{z} = \Phi\left(\frac{\tau}{\tau+1}\right)$$

gefunden wird,

$$-\bar{\tau} = \frac{\tau}{\tau+1},$$

oder allgemeiner

$$-\bar{\tau} = A\left(\frac{\tau}{\tau+1}\right),$$

wo A eine Substitution der Gruppe M_2 bedeutet. Also entspricht dem Einheitskreise der z-Ebene z. B. der Kreis

(33) $$\tau\bar{\tau} + \bar{\tau} + \tau = 0$$

der τ-Ebene. Für den Kreis

$$(z-1)(\bar{z}-1) = 1$$

der z-Ebene haben wir

$$\bar{z} = \frac{z}{z-1},$$

also lauten, da

$$\bar{z} = \Phi(-\bar{\tau}), \quad \frac{z}{z-1} = \Phi(\tau+1)$$

ist, die Gleichungen der entsprechenden Curven der τ-Ebene

$$-\bar{\tau} = A(\tau+1),$$

wir erhalten also für $A = 1$ die Gerade

(34) $$\tau + \bar{\tau} = -1.$$

Endlich ist für

$$z + \bar{z} = 1, \quad \bar{z} = 1 - z,$$

also haben wir, da

$$\bar{z} = \Phi(-\bar{\tau}), \quad 1 - z = \Phi\left(\frac{-1}{\tau}\right)$$

ist, als Gleichungen der entsprechenden τ-Curven

$$-\bar{\tau} = A\left(\frac{-1}{\tau}\right)$$

und für $A = 1$ insbesondere

(35) $$\tau\bar{\tau} = 1.$$

In der Fig. 22 sind die Curven (33), (34), (35) nebst ihren Spiegelbildern in Bezug auf die laterale τ-Axe in den Fundamentalbereich der Function z von τ eingezeichnet; wir sehen, in welcher Weise der Fundamentalbereich, entsprechend der in der Fig. 21 dargestellten Theilung der z-Ebene, in zwölf Kreisbogendreiecke der der Function J entsprechenden Theilung zerfällt, auch ist sofort zu erkennen, wie die Dreiecke der Figuren 21 und 22 einander gegenseitig entsprechen. Nehmen wir z. B. das Dreieck $\left(1, \frac{1}{2}, 1-\varepsilon\right)$ der unteren z-Halbebene, so entspricht demselben das Dreieck $(0, i, \varepsilon - 1)$ der τ-Ebene, ebenso dem Dreiecke $\left(0, \frac{1}{2}, 1-\varepsilon\right)$ der z-Ebene das Dreieck $(\infty, i, \varepsilon - 1)$ der τ-Ebene. Also stellt das Dreieck $(0, i, \varepsilon - 1)$ der τ-Ebene die Abbildung der unteren, sein Spiegelbild $(\infty, i, \varepsilon - 1)$ in Bezug auf die Seite $(i, \varepsilon - 1)$ die Abbildung der oberen J-Halbebene dar;

und zwar entspricht die Ecke $\varepsilon - 1$ dem Punkte $J = 0$, die Ecke i dem Punkte $J = 1$, während die Ecken ∞ und 0 dem Punkte $J = 0$ zugehören. Wir haben folglich in den Winkeln bei 0, i, $\varepsilon - 1$ die Werthe von

$$\pi\delta_3, \quad \pi\delta_2, \quad \pi\delta_1,$$

d. h. es ist

$$\pi\delta_3 = 0, \quad \pi\delta_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \pi\delta_1 = \frac{\pi}{3},$$

die Function τ von J stellt sich demnach in der Form

$$\tau = s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0, J\right)$$

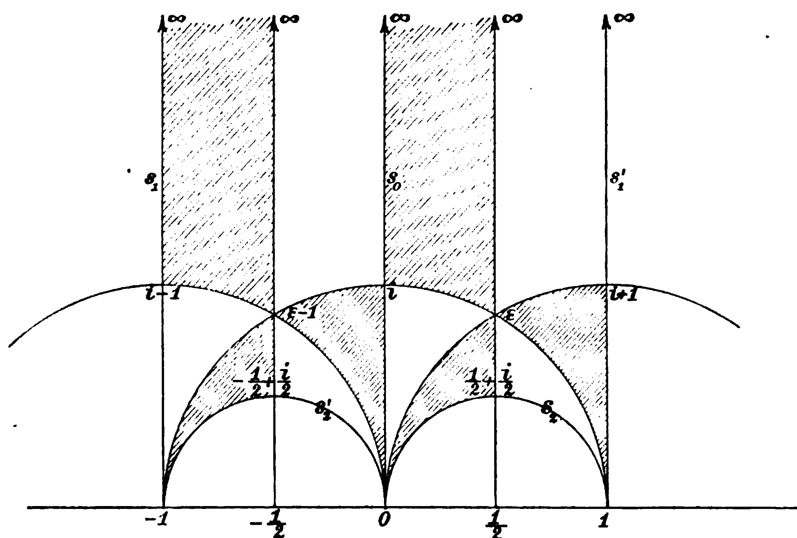


Fig. 22.

dar, und die rechte Seite der Differentialgleichung (31) lautet

$$Q(J) = \frac{1}{4}\left\{-\frac{8}{9}\frac{1}{J^2} - \frac{3}{4}\frac{1}{(1-J)^2} - \frac{23}{36}\frac{1}{J(1-J)}\right\}.$$

Die Fundamentalsubstitutionen, die τ bei einfachen Umläufen von J um die singulären Punkte 0, 1, ∞ erleidet, lassen sich auch sofort angeben. Wenn J den Querschnitt l_1 einmal in positiver Richtung überschreitet, so erfährt τ die Substitution

$$\mathsf{A}_1 = \frac{\tau + 1}{-\tau},$$

welche die dem negativen Ufer von l_1 entsprechende Seite $(0, \varepsilon - 1)$ in die dem positiven Ufer von l_1 entsprechende Seite $(\infty, \varepsilon - 1)$ überführt, und ebenso verwandelt sich τ in

$$A_2 = \frac{-1}{\tau},$$

wenn J den Querschnitt l_2 einmal in positiver Richtung durchquert, weil diese Substitution die dem negativen Ufer von l_2 entsprechende Seite (∞, i) in die dem positiven Ufer von l_2 entsprechende Seite $(0, i)$ überführt. In Uebereinstimmung mit den allgemeinen Ergebnissen der Nr. 269 (S. 39) setzen sich die Substitutionen A_1, A_2 aus den den Seiten des Dreiecks $(0, i, \varepsilon - 1)$ entsprechenden Spiegelungen

$$B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

in der Form

$$A_1 = B_0 B_{-1}, \quad A_2 = B_2 B_0$$

zusammen. Das Kreisbogenviereck

$$(\infty, \varepsilon - 1, 0, i, \infty),$$

welches in unserem Falle, wo die beiden Seiten $(0, i)$ und (i, ∞) in eine Gerade fallen, eigentlich ein Kreisbogendreieck ist, stellt die eindeutig conforme Abbildung der durch die Querschnitte l_1, l_2 zerschnittenen J-Ebene dar. Durch Anwendung der Substitutionen von M auf diesen Fundamentalbereich oder durch successive Spiegelung des Ausgangsdreiecks $(0, i, \varepsilon - 1)$, ergiebt sich die der Function J entsprechende Theilung der oberen τ-Halbebene.

279. Beziehungen zur Theorie der binären quadratischen Formen mit negativer Discriminante. Uebersicht über die im gegenwärtigen Abschnitte erlangten Resultate.

Wenn wir die J-Ebene nicht durch die Querschnitte l_1, l_2, sondern durch einen von 1 über 0 nach ∞ längs der realen Axe hin erstreckten Schnitt zerschneiden, so kann als das Abbild der so zerschnittenen J-Ebene das Viereck

$$(\infty, \varepsilon - 1, i, \varepsilon, \infty) = \mathfrak{F}_0$$

angesehen werden, welches aus unserem bisherigen Fundamentalbereiche durch erlaubte Abänderung (Nr. 210, Bd. II, 1, S. 315) hervorgeht. Die correspondirenden Seiten dieses neuen Fundamentalbereiches gehen durch die beiden Substitutionen

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

von denen wir in der Nr. 275 (S. 64) ausgegangen waren, in einander über, auch knüpft sich an diese Gestalt des Fundamentalbereiches eine sowohl sachlich als auch historisch bemerkenswerthe Beziehung zwischen

unserer Theorie und der arithmetischen Theorie der binären quadratischen Formen, wie sie Gauss zuerst systematisch entwickelt hat.

Betrachten wir nämlich eine quadratische Form

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (a, b, c),$$

wo a, b, c ganze Zahlen sind. Setzen wir

$$a\tau^2 + 2b\tau + c = 0,$$

so ist

$$\tau = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{a},$$

wo wir mit

$$D = b^2 - ac$$

die Discriminante (nach Gauss den Determinanten) der quadratischen Form bezeichnet haben.

Sei D negativ und wählen wir z. B. τ als einen Punkt der oberen Halbebene, sei ferner

$$a > 0, \quad c > 0,$$

d. h. die Form eine positive; dann ist durch Angabe von τ und D die Form vollkommen bestimmt. D. h. unter den positiven Formen, die zu einer bestimmten negativen Discriminante gehören, wird jedes Individuum durch den zugehörigen Werth von τ vollkommen bestimmt.

Geht man durch eine Substitution der Gruppe M

$$\tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

zu der dem τ' entsprechenden Form (a', b', c') über, so ist

$$a'(\alpha x + \beta y)^2 + 2b'(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y) + c'(\gamma x + \delta y)^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

d. h. die Formen

$$(a, b, c), \quad (a', b', c')$$

sind in der Bezeichnung von Gauss eigentlich äquivalent. Wenn τ innerhalb des Fundamentalbereiches $\mathfrak{F}_0$ liegt, so muss für die entsprechende Form

$$c \geqq a \geqq 2\,|b|$$

sein, d. h. die Form ist im Sinne von Gauss eine reducirte. Auf Grund dieser Bemerkungen lassen sich nun die von Gauss arithmetisch bewiesenen Sätze über die Aequivalenz quadratischer Formen mit negativer Discriminante ohne weiteres aus den Eigenschaften der der Function J oder der Gruppe M entsprechenden Theilung der oberen τ-Halbebene ablesen. Auch die uneigentliche Aequivalenz findet ihre Interpretation durch die mit einer Spiegelung in Bezug auf eine Seite des entsprechenden Bereiches componirten Substitutionen von M.

Diesen Zusammenhang der Theorie der Function

$$z = \Phi(\tau)$$

mit der Theorie der quadratischen Formen hat Gauss selbst bemerkt, wie aus den nachgelassenen Aufzeichnungen, besonders den Bemerkungen auf S. 386 und 477, 478 des dritten Bandes der von Herrn Schering herausgegebenen „Gesammelten Werke von C. F. Gauss" deutlich hervorgeht.

Unsere von der Betrachtung der Differentialgleichung (L) ausgehenden Untersuchungen haben uns zu drei Fällen von Dreiecksfunctionen geführt, für welche die Umkehrungsfunction eine eindeutige war. Zwei von diesen Fällen, nämlich

$$\tau = s(0,\ 0,\ 0,\ z),$$
$$\tau = s\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 0,\ J\right),$$

lieferten transcendente Umkehrungsfunctionen, die nur für Punkte der oberen τ-Halbebene, oder allgemeiner, wenn

$$\eta = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}$$

einen beliebigen Integralquotienten bedeutet, innerhalb eines gewissen Kreises existirten. Dieser Kreis ergab sich für die Function

$$\tau = s(0,\ 0,\ 0,\ z)$$

als der Orthogonalkreis der drei Seiten des Ausgangsdreiecks. Offenbar hat er aber auch für die andere Function

$$\tau = s\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 0,\ J\right)$$

dieselbe Bedeutung; denn für die τ-Ebene, wo jener Kreis in die reale Axe degenerirt, schneidet derselbe die drei Seiten des Ausgangsdreiecks der Function J in der That unter rechten Winkeln, das Gleiche findet also auch in der Ebene eines beliebigen Integralquotienten η statt, da die Abbildung durch die monogene Function

$$\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}$$

eine winkeltreue ist.

Von besonderem Interesse ist der Umstand, dass die projectiven Gruppen M, M_2, die auf das Argument τ der beiden Functionen J beziehungsweise z angewandt dieselben nicht verändern, in einfacher Weise arithmetisch charakterisirt werden können. Wir heben noch ausdrücklich hervor, dass zufolge der Sätze der Nr. 215 (Bd. II, 1, S. 336) jede eindeutige Function von τ, die bei den Substitutionen von M_2 ungeändert bleibt und innerhalb des Fundamentalbereiches das

Verhalten einer rationalen Function zeigt, rational durch z, und jede eindeutige Function von τ, die die Substitutionen von M zulässt und innerhalb des entsprechenden Fundamentalbereiches den Charakter einer rationalen Function besitzt, rational durch J ausdrückbar ist.

Die elliptische Modulfunction

$$z = \Phi(\tau)$$

ist zuerst von Herrn Hermite als selbstständige Transcendente in die Analysis eingeführt worden und spielt bei den auf die Transformation der elliptischen Functionen bezüglichen Untersuchungen eine fundamental wichtige Rolle. Ihre grosse Bedeutung für die Theorie der durch die allgemeine Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe definirten Function wird später hervortreten.

Von wesentlich anderem Charakter als die beiden eben erwähnten Dreiecksfunctionen ist die dritte

$$z = s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, J\right),$$

die den Uebergang zwischen den beiden ersten vermittelt. Ihre Umkehrung ist rational und existirt demzufolge in der ganzen unendlichen z-Ebene, d. h. für alle complexen Werthe der unabhängigen Variabeln. Die aus dem Ausgangsdreiecke $\left(1, \frac{1}{2}, 1-\varepsilon\right)$ der Fig. 21 durch successive Spiegelung entstehenden Dreiecke erfüllen die ganze z-Ebene, nicht wie in den beiden ersten Fällen der Functionen z und J von τ nur das Innere eines Kreises. Es liegt dies daran, dass im Falle der Function J von z ein Orthogonalkreis für die drei Seiten des Ausgangsdreiecks nicht vorhanden ist.

Diese Bemerkung liefert uns einen Fingerzeig für die Untersuchung der allgemeinen Dreiecksfunction

$$\eta = s(\delta_1, \delta_2, \delta_3, z),$$

in welcher $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ reciproke ganze Zahlen oder Null sind, und die, wie wir wissen, alle Fälle liefern muss, in denen die Umkehrungsfunction z von η eindeutig ist. Wir wenden uns jetzt dieser allgemeinen Untersuchung zu.

Vierzehnter Abschnitt.

Theorie der eindeutig umkehrbaren Dreiecksfunctionen.

Erstes Kapitel.

280. Einige geometrische Sätze über Kreise.

Wir beginnen mit einigen einfachen geometrischen Betrachtungen. Seien drei Kreise in der η-Ebene gegeben

$$k_0 = \eta\bar{\eta} + a_0\eta + \bar{a}_0\bar{\eta} + b_0 = 0,$$
$$k_1 = \eta\bar{\eta} + a_1\eta + \bar{a}_1\bar{\eta} + b_1 = 0,$$
$$k_2 = \eta\bar{\eta} + a_2\eta + \bar{a}_2\bar{\eta} + b_2 = 0,$$

wo a_0, a_1, a_2 beliebige complexe, b_0, b_1, b_2 reale Grössen bedeuten, und betrachten wir mit Hesse die Gesammtheit von Kreisen, die durch die Formel

(I) $$\alpha k_0 + \beta k_1 + \gamma k_2 = 0$$

für willkürliche reale α, β, γ dargestellt werden, so gehören die gemeinsamen Secanten je zweier dieser Kreise dem durch die Gleichung

$$k_0 - k_1 + \lambda(k_0 - k_2) = 0$$

dargestellten Strahlenbüschel an, wo λ einen realen Parameter bedeutet. Der Mittelpunkt oder Träger dieses Strahlenbüschels ist folglich nach bekannten geometrischen Sätzen so beschaffen, dass die Länge der von ihm aus an die Kreise (I) gelegten Tangenten für alle diese Kreise dieselbe ist, d. h. wenn wir die Coordinaten dieses Punktes mit m, n bezeichnen und

$$\eta_0 = m + ni$$

setzen, so ist η_0 der Mittelpunkt desjenigen Kreises, der die sämmtlichen Kreise (I) unter rechtem Winkel schneidet.

Das Quadrat des Radius dieses, wie wir ihn nennen wollen, Orthogonalkreises wird durch den Ausdruck

$$c = \eta_0\bar{\eta}_0 + a_0\eta_0 + \bar{a}_0\bar{\eta}_0 + b_0 = \eta_0\bar{\eta}_0 + a_1\eta_0 + \bar{a}_1\bar{\eta}_0 + b_1 = \eta_0\bar{\eta}_0 + a_2\eta_0 + a_2\bar{\eta}_0 + b_2$$

gegeben. Je nachdem dieser Ausdruck positiv oder negativ ist, besitzt die Kreisschaar (I) einen realen oder einen imaginären Orthogonalkreis; wenn c verschwindet, so schrumpft der Orthogonalkreis auf einen einzigen Punkt, den Punkt η_0 zusammen, in welchem sich dann die sämmtlichen Kreise (I) schneiden. Wenn für $c = 0$ der Punkt η_0 insbesondere noch in's Unendliche rückt, so degeneriren die Kreise (I) in die sämmtlichen geraden Linien der Ebene.

Wir werden im Folgenden nicht nur mit realen, sondern auch mit imaginären Kreisen zu operiren haben, und setzen darum fest, dass wir unter einem imaginären Kreise stets die Gesammtheit von imaginären Punkten der η-Ebene verstehen, die einer Gleichung von der Form

$$d\eta\bar{\eta} + a\eta + \bar{a}\bar{\eta} + b = 0$$

genügen, wo a beliebig complex, b, d real und die Determinante

$$-a\bar{a} + bd > 0$$

ist. Ein imaginärer Kreis hat also stets einen realen Mittelpunkt, und das Quadrat des Radius ist eine negative Grösse.

Unter den Kreisen (I) ist allemal einer vorhanden, der mit dem Orthogonalkreise concentrisch ist. Sei die Gleichung des Orthogonalkreises

(II) $$(\eta - \eta_0)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) - c = 0,$$

so lautet die Gleichung des concentrischen, der Schaar (I) angehörigen Kreises

(III) $$(\eta - \eta_0)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) + c = 0.$$

Da ferner offenbar die beiden Geraden

(IV) $$\eta + \bar{\eta} = \eta_0 + \bar{\eta}_0,$$

(V) $$\eta - \bar{\eta} = \eta_0 - \bar{\eta}_0$$

den Kreis (II) unter rechtem Winkel schneiden, so gehören die drei Curven (III), (IV), (V) der Schaar (I) an; wir können folglich die Gesammtheit der den Kreis (II) rechtwinkelig schneidenden Kreise auch in der Form

(VI) $$\mathfrak{a}[(\eta-\eta_0)(\bar{\eta}-\bar{\eta}_0)+c]+\mathfrak{b}(\eta-\eta_0+\bar{\eta}-\bar{\eta}_0)-\mathfrak{c}i(\eta-\eta_0-\bar{\eta}+\bar{\eta}_0)=0$$

darstellen, wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ reale Constanten bedeuten.

Wenn drei reale Kreise gegeben sind, die sich in realen Punkten schneiden, so können wir die Bedingung für das Eintreffen der drei Fälle

$$c > 0, \quad c = 0, \quad c < 0$$

geometrisch dahin formuliren, dass die beiden Durchschnittspunkte zweier der gegebenen Kreise im ersten Falle zur selben Seite des

dritten (d. h. beide innerhalb oder beide ausserhalb) im letzten Falle zu verschiedenen Seiten des dritten (d. h. der eine innerhalb, der andere ausserhalb) gelegen sind, während im zweiten Falle die drei Kreise durch einen Punkt hindurchgehen.

Die drei Kreise begrenzen im Allgemeinen acht Kreisbogendreiecke mit hohlen Winkeln, die sich in vier Paare von Dreiecken mit gleichen Winkeln anordnen lassen. Bezeichnet man die Winkel des einen Paares mit

$$\pi\delta_1', \quad \pi\delta_2', \quad \pi\delta_3',$$

wo also δ_1', δ_2', δ_3' positive Zahlen bedeuten, die zwischen Null und Eins liegen, so sind die Winkel der drei anderen Paare durch

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} \pi\delta_1', & \pi(1-\delta_2'), & \pi(1-\delta_3'), \\ \pi(1-\delta_1'), & \pi\delta_2', & \pi(1-\delta_3'), \\ \pi(1-\delta_1'), & \pi(1-\delta_2'), & \pi\delta_3' \end{cases}$$

gegeben, und für das eine dieser vier Paare ist die Summe der drei Winkel ein Minimum. Wir bezeichnen die einem Dreiecke dieses Paares angehörenden Winkel durch

$$\pi\delta_1, \quad \pi\delta_2, \quad \pi\delta_3.$$

Man übersieht diese einfachen geometrischen Verhältnisse am besten, wenn man sich die η-Ebene durch eine lineare Function

$$\zeta = \frac{\lambda\eta + \mu}{\nu\eta + \varrho} \qquad (\lambda\varrho - \mu\nu \neq 0)$$

so auf eine ζ-Ebene abgebildet denkt, dass zweien der gegebenen Kreise der η-Ebene gerade Linien der ζ-Ebene entsprechen (vergl. die Fig. 23). Der Schnittpunkt μ_1 dieser beiden Geraden liegt dann im Falle eines realen Orthogonalkreises O $(c > 0)$ ausserhalb, im Falle eines imaginären Orthogonalkreises $(c < 0)$ innerhalb des dem dritten Kreise der η-Ebene entsprechenden Kreises der ζ-Ebene, während im Falle eines Orthogonalkreises mit verschwindendem Radius $(c = 0)$ auch dieser dritte Kreis der ζ-Ebene zur geraden Linie wird, wenn man dem gemeinsamen Punkte der drei Kreise der η-Ebene den Punkt $\zeta = \infty$ der ζ-Ebene entsprechen lässt. Man hat also für $c > 0$ in der That zwei Dreiecke mit den Winkeln

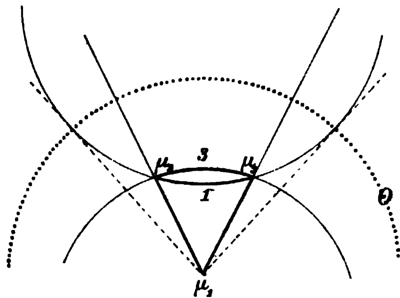


Fig. 23.

$$\pi\delta_1, \quad \pi\delta_2, \quad \pi\delta_3,$$

von denen das eine ganz im Innern, das andere ganz ausserhalb des Orthogonalkreises O liegt, zugleich übersieht man, dass in diesem Falle

$$\pi\delta_1 + \pi\delta_2 + \pi\delta_3 < \pi$$

sein muss. Für $c = 0$ tritt ein wirkliches Dreieck mit den Winkeln

$$\pi\delta_1, \quad \pi\delta_2, \quad \pi\delta_3$$

und der Winkelsumme

$$\pi\delta_1 + \pi\delta_2 + \pi\delta_3 = \pi$$

auf, endlich ist für $c < 0$

$$\pi\delta_1 + \pi\delta_2 + \pi\delta_3 > \pi.$$

281. Arteintheilung der Dreiecksfunctionen.

Betrachten wir die Dreiecksfunctionen, die den von drei Kreisen der η-Ebene begrenzten Kreisbogendreiecken entsprechen, so können wir uns, da wir hauptsächlich die Behandlung der Fälle im Auge haben, wo die Differenzen der Wurzeln der zu den singulären Punkten $0, 1, \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen reciproke ganze Zahlen oder Null sind (vergl. Nr. 271, S. 45), darauf beschränken, als Ausgangsdreieck eines derjenigen zu nehmen, welche die kleinste Winkelsumme, also die Winkel

$$\pi\delta_1, \quad \pi\delta_2, \quad \pi\delta_3$$

besitzen. In der That lehrt ein Blick auf die Tabelle (α) (S. 85), dass, wenn eines der Dreiecke die Winkel

$$\frac{\pi}{g_1}, \quad \frac{\pi}{g_2}, \quad \frac{\pi}{g_3}$$

hat, wo g_1, g_2, g_3 von Eins verschiedene positive ganze Zahlen oder unendlich sind, die Winkelsumme in keinem der anderen Dreiecke einen kleineren Werth haben kann, so dass also in diesen Fällen

$$\frac{\pi}{g_1} = \pi\delta_1, \quad \frac{\pi}{g_2} = \pi\delta_2, \quad \frac{\pi}{g_3} = \pi\delta_3$$

ist. Wir können also sagen:

Die Dreiecksfunctionen

$$s(\delta_1, \delta_2, \delta_3, z),$$

wo die $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ reciproke positive ganze Zahlen oder Null sind, ordnen sich in drei Arten, je nachdem

$$1) \quad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 < 1,$$

$$2) \quad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1,$$

$$3) \quad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 > 1$$

ist. Die drei Kreise, welche die Seiten des Ausgangsdreiecks bilden, besitzen für die erste Art einen realen Orthogonalkreis mit nicht verschwindendem Radius, für die zweite schneiden sich die Dreiecksseiten in einem Punkte, auf den der Orthogonalkreis zusammenschrumpft, für die dritte ist der Orthogonalkreis imaginär. D. h. kurz ausgesprochen: für die drei Arten ist beziehungsweise

$$c > 0, \quad c = 0, \quad c < 0.$$

Wir hatten bereits in der Nr. 271 (S. 49) den Satz angemerkt und angewandt, dass die Spiegelung in Bezug auf einen Kreis jeden Orthogonalkreis desselben ungeändert lässt. Wir wollen durch eine einfache Rechnung zeigen, dass dieser Satz nicht nur für die realen, sondern auch für die imaginären Orthogonalkreise und für die mit verschwindendem Radius richtig ist.

Sei nämlich

$$(\beta) \qquad d\eta\bar{\eta} + a\eta + \bar{a}\bar{\eta} + b = d(\eta - \eta_0)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) - c = 0,$$

wo b, c, d real, d insbesondere nicht negativ, a beliebig complex ist, die Gleichung des gegebenen Kreises (der auch imaginär sein kann), dann lautet die Gleichung eines beliebigen, diesen Kreis rechtwinkelig schneidenden Kreises nach einer oben gemachten Bemerkung

$$(\gamma) \quad \mathfrak{a}[d(\eta-\eta_0)(\bar{\eta}-\bar{\eta}_0)+c]+\mathfrak{b}[\eta-\eta_0+\bar{\eta}-\bar{\eta}_0]-\mathfrak{c}i[\eta-\eta_0-\bar{\eta}+\bar{\eta}_0]=0.$$

Wenden wir in dieser Gleichung die dem gegebenen Kreise entsprechende Spiegelung

$$(\delta) \qquad d(\eta' - \eta_0) = \frac{c}{\bar{\eta} - \bar{\eta}_0}$$

an, so geht die Gleichung in der That in sich selbst über.

Denken wir uns nun in der η-Ebene das Ausgangsdreieck irgend einer Dreiecksfunction und die aus demselben durch wiederholte Spiegelungen entstandene Theilung, ebenso wie die entsprechende projective Monodromiegruppe ϑ gegeben.

Dann ist zunächst evident, dass die Seiten eines jeden Dreiecks der Theilung den Orthogonalkreis der drei Seiten des Ausgangsdreiecks unter rechtem Winkel schneiden, und zwar gleichgültig ob die betrachtete Dreiecksfunction der ersten, zweiten oder dritten Art angehört. Hieraus folgt aber nach dem vorhin bewiesenen Satze, dass jede Spiegelung in Bezug auf eine Seite irgend eines Dreiecks der Theilung den Orthogonalkreis in sich selbst transformirt. Wir haben also den Satz:

Der Orthogonalkreis der drei Seiten des Ausgangsdreiecks einer beliebigen Dreiecksfunction wird durch alle Substitu-

tionen der entsprechenden Monodromiegruppe ϑ in sich selbst übergeführt.

Im Falle wo die Dreiecksfunction der zweiten Art angehört, gehen also alle Seiten der entsprechenden Dreieckstheilung der η-Ebene durch einen und denselben Punkt $\eta = \eta_0$ hindurch, und dieser Punkt ist ein gemeinsamer Doppelpunkt aller Substitutionen der zugehörigen Monodromiegruppe ϑ.

282. Eigenschaften projectiver Substitutionen, die einen Kreis in sich selbst transformiren.

Wir müssen nun einige Eigenschaften der projectiven Substitutionen

$$\eta' = A\eta = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$$

kennen lernen, die einen Kreis (mit realem, imaginärem oder verschwindendem Radius) in sich selbst transformiren. Wir wollen diesen Kreis

$$(\eta - \eta_0)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) - c = 0$$

im Folgenden auch stets den Orthogonalkreis nennen und bezeichnen denselben demgemäss mit O.

Die Gesammtheit der Substitutionen A, die den Kreis O in sich selbst überführen, bildet offenbar eine Gruppe, und zwar eine algebraische Untergruppe der projectiven Gruppe, die von zwei Parametern abhängt, da die Bedingung, dass der Kreis O bei einer Substitution A ungeändert bleiben soll, eine algebraische Beziehung zwischen den Coefficientenverhältnissen der Substitution A festsetzt.

Setzen wir in die Gleichung von O an Stelle von η die Grösse η' ein, so erhalten wir nach Multiplication mit

$$(\gamma\eta + \delta)(\bar{\gamma}\bar{\eta} + \bar{\delta}) = |\gamma\eta + \delta|^2$$

die Gleichung

$$[\alpha\eta + \beta - \eta_0(\gamma\eta + \delta)][\bar{\alpha}\bar{\eta} + \bar{\beta} - \bar{\eta}_0(\bar{\gamma}\bar{\eta} + \bar{\delta})] - c(\gamma\eta + \delta)(\bar{\gamma}\bar{\eta} + \bar{\delta}) = 0,$$

die mit der Gleichung von O übereinstimmen muss. Setzen wir also

$$\zeta = \eta - \eta_0,$$

$$\alpha_1 = \alpha - \eta_0\gamma, \quad \beta_1 = \beta + \eta_0(\alpha - \delta) - \eta_0^2\gamma, \quad \gamma_1 = \gamma, \quad \delta_1 = \delta + \eta_0\gamma,$$

so ist

$$\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1 = 1,$$

und es muss

$$\varrho(\zeta\bar{\zeta} - c) = (\alpha_1\zeta + \beta_1)(\bar{\alpha}_1\bar{\zeta} + \bar{\beta}_1) - c(\gamma_1\zeta + \delta_1)(\bar{\gamma}_1\bar{\zeta} + \bar{\delta}_1)$$

sein, wo ϱ einen von ζ unabhängigen Factor bedeutet.

Wir erhalten demnach die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varrho &= \alpha_1 \bar{\alpha}_1 - c\gamma_1 \bar{\gamma}_1, \\ 0 &= \alpha_1 \bar{\beta}_1 - c\gamma_1 \bar{\delta}_1, \\ 0 &= \bar{\alpha}_1 \beta_1 - c\bar{\gamma}_1 \delta_1, \\ -c\varrho &= \beta_1 \bar{\beta}_1 - c\delta_1 \bar{\delta}_1, \end{aligned}$$

woraus sich, wenn c von Null verschieden ist, entweder

$$\alpha_1 = -\bar{\delta}_1, \quad \beta_1 = -c\bar{\gamma}_1, \quad \varrho = -1$$

oder

$$\alpha_1 = \bar{\delta}_1, \quad \beta_1 = c\bar{\gamma}_1, \quad \varrho = 1$$

ergiebt, so dass also im ersten Falle

$$\text{(VII)} \quad (\eta - \eta_0)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) - c = -|\gamma\eta + \delta|^2 [(\eta' - \eta_0)(\bar{\eta}' - \bar{\eta}_0) - c],$$

im zweiten Falle

$$\text{(VIII)} \quad (\eta - \eta_0)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) - c = |\gamma\eta + \delta|^2 [(\eta' - \eta_0)(\bar{\eta}' - \bar{\eta}_0) - c]$$

sein muss. Wir bezeichnen die Substitutionen $A\eta$, je nachdem für dieselben die Gleichung (VII) oder (VIII) erfüllt ist, als negative beziehungsweise positive.

Für negative Werthe von c involvirt die Gleichung (VII) einen Widerspruch; im Falle eines imaginären Orthogonalkreises sind also alle projectiven Substitutionen, die diesen Kreis ungeändert lassen, positive.

Für positive Werthe von c, d. h. im Falle eines realen Orthogonalkreises O mit nicht verschwindendem Radius, haben die positiven Substitutionen offenbar die Eigenschaft, dass sie Punkte, die innerhalb von O liegen, wieder in Punkte innerhalb, und Punkte die ausserhalb von O liegen, in Punkte ausserhalb verwandeln, während durch eine negative Substitution Punkte im Innern von O in Punkte ausserhalb und umgekehrt übergeführt werden.

Wir werden es in der Theorie der Dreiecksfunctionen erster Art und ebenso auch in späteren allgemeineren Untersuchungen ausschliesslich mit positiven Substitutionen zu thun haben; in der That lässt sich leicht einsehen, dass die Substitutionen der zu einer Dreiecksfunction erster Art gehörigen Monodromiegruppe ϑ stets positive sind.

Wie wir schon in der Nr. 271 (S. 49) bemerkt haben, wird nämlich durch Spiegelung in Bezug auf einen Kreis jeder Punkt, der im Innern eines diesen Kreis rechtwinkelig schneidenden Kreises liegt, wieder in einen innern Punkt, und jeder Punkt der ausserhalb eines

solches Orthogonalkreises liegt, in einen äussern Punkt verwandelt. Man kann diesen geometrisch evidenten Satz auch analytisch sofort einsehen, denn wenn wir in der für die Variable η' geschriebenen linken Seite der Gleichung (γ) (Nr. 281, S. 87), die einen beliebigen, den Kreis (β) (ebenda) rechtwinkelig schneidenden Kreis darstellt, die der Spiegelung über den Kreis (β) entsprechende Substitution (δ) machen, so verwandelt sich diese linke Seite in sich selbst multiplicirt mit dem für positives c stets positiven Ausdrucke

$$\frac{c}{d(\eta-\eta_0)(\bar\eta-\bar\eta_0)},$$

so dass also die linke Seite der Gleichung (γ) für η' dasselbe Vorzeichen besitzt, wie für das Spiegelbild η von η' in Bezug auf den Kreis (β).

Wir haben also den allgemeinen Satz:

Substitutionen, die sich aus Spiegelungen in Bezug auf Kreise, die einen realen Kreis O rechtwinkelig schneiden, zusammensetzen, sind stets positive Substitutionen,

aus welchem die Richtigkeit der für die Monodromiegruppe der Dreiecksfunctionen aufgestellten Behauptung unmittelbar erhellt.

Um weitere Eigenschaften der Substitutionen A, die den Kreis O ungeändert lassen, zu erforschen, betrachten wir zunächst eine nicht parabolische Substitution A und denken uns dieselbe in der canonischen Form

$$\frac{\eta'-\lambda}{\eta'-\mu}=K\frac{\eta-\lambda}{\eta-\mu}$$

geschrieben. Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen, dass der Nullpunkt der Mittelpunkt des Orthogonalkreises O sei, so dass also die Gleichung desselben

$$\eta\bar\eta-c=0$$

lautet. Setzen wir dann

$$\zeta=\frac{\eta-\lambda}{\eta-\mu},\qquad \zeta'=\frac{\eta'-\lambda}{\eta'-\mu},$$

so können wir die Gleichung von O in der Form

$$(\varepsilon)\qquad \frac{\mu\zeta-\lambda}{\zeta-1}\,\frac{\bar\mu\bar\zeta-\bar\lambda}{\bar\zeta-1}-c=0$$

schreiben. Setzen wir hierin ζ' an die Stelle von ζ, so erhalten wir

$$\frac{\mu K\zeta-\lambda}{K\zeta-1}\cdot\frac{\bar\mu\bar K\bar\zeta-\bar\lambda}{\bar K\bar\zeta-1}-c=0,$$

und diese Gleichung muss, da die Substitution A den Kreis O ungeändert lassen sollte, mit (ε) übereinstimmen. Dies liefert nach Entfernung der Nenner und durch Coefficientenvergleichung die Relationen

$$\mu\bar{\mu} - c = \varrho(\mu\bar{\mu}K\overline{K} - cK\overline{K}),$$
$$\lambda\bar{\mu} - c = \varrho(\lambda\bar{\mu}\overline{K} - c\overline{K}),$$
$$\bar{\lambda}\mu - c = \varrho(\bar{\lambda}\mu K - cK),$$
$$\lambda\bar{\lambda} - c = \varrho(\lambda\bar{\lambda} - c),$$

wo ϱ einen jedenfalls nicht verschwindenden Proportionalitätsfactor bedeutet.

Wenn nun $c < 0$ ist, so muss jedenfalls

$$\lambda\bar{\lambda} \neq c, \quad \mu\bar{\mu} \neq c$$

sein, und wir haben folglich

$$\varrho = 1, \quad K\overline{K} = 1,$$

d. h. die Substitution A ist eine elliptische. Da ferner K nicht gleich Eins sein kann, muss

$$\lambda\bar{\mu} = c, \quad \bar{\lambda}\mu = c$$

sein, d. h. die Doppelpunkte μ, λ sind harmonische Pole (Spiegelbilder) in Bezug auf den imaginären Orthogonalkreis O.

Wenn $c > 0$ ist, und man hat

$$\lambda\bar{\lambda} \neq c,$$

so ist wiederum

$$\varrho = 1,$$

und wenn auch

$$\mu\bar{\mu} \neq c$$

ist, so ergiebt sich wie oben

$$K\overline{K} = 1, \quad \lambda\bar{\mu} = c, \quad \bar{\lambda}\mu = c,$$

die Substitution ist also wieder eine elliptische, und zwar ist sie, da ϱ den positiven Werth 1 hat, offenbar positiv; ihre Doppelpunkte sind harmonische Pole in Bezug auf den jetzt realen Orthogonalkreis O. Ist dagegen

$$\mu\bar{\mu} = c,$$

so kann nicht auch

$$\lambda\bar{\mu} = c$$

sein, da sonst $\lambda = \mu$ sein müsste. Also folgt

$$K = \overline{K} = \frac{1}{\varrho},$$

d. h. K ist real, die Substitution demnach im Allgemeinen hyperbolisch und nur für

$$K = -1, \quad \varrho = -1$$

elliptisch. Da K nicht gleich Eins sein kann, so muss auch

$$\lambda\bar{\lambda} = c$$

sein, d. h. die Doppelpunkte μ, λ liegen auf dem Orthogonalkreise. Je nachdem K positiv oder negativ ist, ist auch die Substitution positiv oder negativ.

Für $c = 0$ muss entweder λ oder μ verschwinden.

Sei endlich die Substitution A eine parabolische und

$$\frac{1}{\eta' - \lambda} = \frac{1}{\eta - \lambda} + \gamma$$

ihre canonische Form. Setzen wir dann

$$\frac{1}{\eta - \lambda} = \zeta, \quad \frac{1}{\eta' - \lambda} = \zeta',$$

so lautet die Gleichung des Orthogonalkreises

$$\frac{\lambda\zeta + 1}{\zeta} \frac{\bar{\lambda}\bar{\zeta} + 1}{\bar{\zeta}} = c,$$

und wenn wir ζ' an Stelle von ζ setzen, erhalten wir

$$\frac{\lambda\zeta + \lambda\gamma + 1}{\zeta + \gamma} \frac{\bar{\lambda}\bar{\zeta} + \bar{\lambda}\bar{\gamma} + 1}{\bar{\zeta} + \bar{\gamma}} = c.$$

Die beiden letzten Gleichungen müssen wieder übereinstimmen, wir finden also durch Coefficientenvergleichung

$$\lambda\bar{\lambda} - c = \varrho(\lambda\bar{\lambda} - c),$$
$$\bar{\lambda} = \varrho(\lambda\bar{\lambda}\gamma + \bar{\lambda} - c\gamma),$$
$$\lambda = \varrho(\lambda\bar{\lambda}\bar{\gamma} + \lambda - c\bar{\gamma}),$$
$$1 = \varrho[(\lambda\gamma + 1)(\bar{\lambda}\bar{\gamma} + 1) + c\gamma\bar{\gamma}],$$

wo ϱ einen Proportionalitätsfactor bedeutet. Wäre nun

$$\lambda\bar{\lambda} \neq c,$$

so müsste γ gleich Null sein. Es ist also nothwendig

$$\lambda\bar{\lambda} = c, \quad \varrho = 1,$$

d. h. die Substitution ist eine positive und der Doppelpunkt liegt auf dem Orthogonalkreise. Für ein nicht positives c kann demnach der Fall einer parabolischen Substitution niemals vorkommen.

Wir erhalten also die folgenden Sätze:

1. Die Substitutionen A, die einen Kreis O mit nicht verschwindendem Radius

$$(\eta - \eta_0)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) - c = 0$$

ungeändert lassen, können niemals loxodromische sein.

2. Wenn c positiv ist, so liegen die Doppelpunkte der hyperbolischen und parabolischen Substitutionen A auf dem Kreise O, die elliptischen Substitutionen, deren Multiplicator

nicht gleich -1 ist, sind positive Substitutionen und ihre Doppelpunkte sind Spiegelbilder in Bezug auf den Kreis O.

3. Wenn c negativ ist, so sind alle Substitutionen A elliptische und ihre Doppelpunkte λ, μ befriedigen die Gleichung

$$(\lambda - \eta_0)(\bar{\mu} - \eta_0) = c.$$

4. Wenn c verschwindet, so sind die Substitutionen, die den Punkt η_0 ungeändert lassen, einfach diejenigen, die diesen Punkt zum Doppelpunkte haben.

Die beiden ersten Sätze enthalten den in der Nr. 272 (S. 53) für unimodulare Substitutionen mit realen Coefficienten abgeleiteten Satz als speciellen Fall. In der That lassen Substitutionen mit realen Coefficienten die reale Axe, die dann die Rolle des Orthogonalkreises spielt, ungeändert und sind positive Substitutionen, wenn ihre Determinanten den Werth Eins haben.

283. Verschiebungen in der Ebene. Differentialinvariante. Linienelement einer Fläche von constantem Krümmungsmaass.

Betrachten wir den Fall $c = 0$, und denken wir uns den Punkt η_0 in's Unendliche verlegt; dann haben die Substitutionen A, die diesen Punkt ungeändert lassen, die Form

$$\eta' = A\eta = \alpha\eta + \beta.$$

Wir sondern dieselben in zwei Kategorieen, je nachdem $|\alpha| = 1$ oder $|\alpha| \neq 1$ ist. Für die erste Kategorie ist offenbar

$$|d\eta'| = |d\eta|,$$

wir bezeichnen diese Art von Substitutionen als Verschiebungen. Bei Anwendung derselben auf die Punkte einer Figur der η-Ebene wird nämlich diese Figur in eine ihr congruente verwandelt.

Für die zweite Kategorie ist

$$|d\eta'| = |\alpha|\,|d\eta|,$$

wir bezeichnen diese Art von Substitutionen als Aehnlichkeitstransformationen, da bei Anwendung derselben eine Figur der η-Ebene in eine ähnliche Figur verwandelt wird.

In den Fällen, wo c von Null verschieden ist, zeigen die Substitutionen A, die den Kreis O ungeändert lassen, ein den Verschiebungen analoges Verhalten. Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, die für das Folgende ohne Bedeutung sind, beschränken wir uns im Falle $c > 0$ auf die Betrachtung positiver Substitutionen A, wir handeln also, wie wir kurz sagen können, von Substitutionen A, die

die Gleichung (VIII) (S. 89) befriedigen. Für einen gegebenen Kreis O bildet die Gesammtheit dieser Substitutionen offenbar eine Gruppe.

Sei
$$\eta' = A\eta = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$
dann ist bekanntlich
$$\frac{d\eta'}{d\eta} = \frac{1}{(\gamma\eta + \delta)^2}$$
und folglich

(IX)
$$\left|\frac{d\eta'}{d\eta}\right| = \frac{1}{(\gamma\eta + \delta)(\bar{\gamma}\bar{\eta} + \bar{\delta})}.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung (VIII) erhalten wir also
$$\frac{|d\eta'|}{(\eta' - \eta_0)(\bar{\eta}' - \bar{\eta}_0) - c} = \frac{|d\eta|}{(\eta - \eta_0)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) - c}.$$

Der Differentialausdruck

(1)
$$\frac{|d\eta|}{(\eta - \eta_0)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) - c}$$

ist demnach eine bei allen Substitutionen A, die die Gleichung (VIII) befriedigen, unveränderliche Grösse. Es ist eine Differentialinvariante der von diesen Substitutionen gebildeten Gruppe.

Wenn $c = 0$ ist, so ist der Differentialausdruck (1) nur für diejenigen unter den Substitutionen, die den Punkt η_0 ungeändert lassen, invariant, die den Verschiebungen im Falle $\eta_0 = \infty$ entsprechen. Diese sind aber offenbar nichts Anderes, wie die parabolischen und elliptischen unter den Substitutionen mit dem Doppelpunkte η_0, und für diese ist, wie eine einfache Rechnung zeigt, in der That die Gleichung (VIII) erfüllt.

Der Differentialausdruck (1) spielt also allgemein bei von Null verschiedenem c für alle positiven Substitutionen A, bei verschwindendem c für die parabolischen und elliptischen unter diesen Substitutionen eine ähnliche Rolle, wie der Ausdruck $|d\eta|$ für die Verschiebungen der η-Ebene. Da nun $|d\eta|$ nichts Anderes ist, wie das Linienelement einer Curve der η-Ebene, so wollen wir jetzt allgemein den Differentialausdruck (1) als das Linienelement einer Curve auf einer gewissen noch näher zu bestimmenden Fläche ansehen.

Wir werden dann auf diesen Differentialausdruck die von Gauss in den „Disquisitiones circa superficies curvas“ begründeten Methoden anwenden und dadurch zu einem Zusammenhange zwischen der Natur unserer Substitutionen A und der Geometrie auf gewissen Flächen

geführt werden, welcher auch für spätere allgemeinere Untersuchungen von Wichtigkeit ist.

Wir spalten die complexe Grösse η in ihren realen und imaginären Theil

$$\eta = p + qi$$

und schreiben die Gleichung des Orthogonalkreises in der Form

$$(2) \qquad (\eta - \eta_0)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) - c = (p - m)^2 + (q - n)^2 - c = 0.$$

Es soll dann

$$(3) \qquad ds^2 = \frac{4\,|d\eta|^2}{[(\eta - \eta_0)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) - c]^2} = \frac{4(dp^2 + dq^2)}{[(p-m)^2 + (q-n)^2 - c]^2}$$

als das Quadrat des Linienelementes einer Curve auf einer Fläche aufgefasst werden, auf der wir uns p, q als krummlinige Coordinaten denken. Die gewöhnlichen rechtwinkeligen Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 eines Punktes dieser Fläche sind dann, als Functionen von p, q gegeben,

$$\xi_1 = \varphi_1(p, q), \quad \xi_2 = \varphi_2(p, q), \quad \xi_3 = \varphi_3(p, q),$$

und es werde nach Gauss

$$E = \sum_{\varkappa=1}^{3} \left(\frac{\partial \xi_\varkappa}{\partial p}\right)^2, \quad F = \sum_{\varkappa=1}^{3} \frac{\partial \xi_\varkappa}{\partial p}\frac{\partial \xi_\varkappa}{\partial q}, \quad G = \sum_{\varkappa=1}^{3} \left(\frac{\partial \xi_\varkappa}{\partial q}\right)^2$$

gesetzt. Aus der von Gauss gegebenen Form des Linienelementes

$$ds^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2$$

schliessen wir dann, dass für unsere Fläche

$$(4) \qquad E = G = \frac{4}{[(p-m)^2 + (q-n)^2 - c]^2}, \quad F = 0$$

ist. Das Gauss'sche Krümmungsmaass für die Fläche ist folglich nach Art. 19 der genannten Gauss'schen Abhandlung durch die Formel

$$k = \frac{1}{4E^4}\left\{2E\left[\left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)^2\right] - 2E^2\left(\frac{\partial^2 E}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial q^2}\right)\right\}$$

dargestellt; setzt man hierin für E und seine partiellen Ableitungen die sich aus (4) ergebenden Werthe ein, so findet man durch einfache Rechnung für das Krümmungsmaass den Werth

$$k = -c.$$

Unsere Fläche hat also die constante Krümmung $-c$, sie ist demnach, wenn c negativ ist, auf eine Kugel vom Radius

$$\left|\frac{1}{\sqrt{-c}}\right|,$$

wenn c verschwindet, auf eine Ebene, und wenn c positiv ist, auf eine pseudosphärische Fläche von der Krümmung $-c$ abwickelbar. Ferner

ist die Fläche, wenn wir p, q als rechtwinkelige Coordinaten der η-Ebene deuten, in den kleinsten Theilen ähnlich d. h. winkeltreu auf die η-Ebene abgebildet, da ja das Linienelement ds auf der Fläche dem Linienelemente

$$|d\eta| = \sqrt{dp^2 + dq^2}$$

in der η-Ebene proportional ist.

Betrachten wir irgend eine rectificirbare Curve $\mathfrak{C}$ auf der Fläche, dann wird ihre Länge zwischen zweien ihrer Punkte (p_1, q_1), (p_2, q_2) durch das längs $\mathfrak{C}$ genommene Integral

$$(5)\qquad \int\limits_{(p_1, q_1)}^{(p_2, q_2)} ds = 2 \int\limits_{(p_1, q_1)}^{(p_2, q_2)} \sqrt{\frac{dp^2 + dq^2}{[(p-m)^2 + (q-n)^2 - c]^2}}$$

dargestellt. Wir sehen, dass für den Fall eines positiven c diese Länge stets einen endlichen Werth hat, wenn kein Punkt der Curve die Gleichung

$$(6)\qquad (p-m)^2 + (q-n)^2 - c = 0$$

befriedigt. Für verschwindendes c ist die Curvenlänge nur unendlich, wenn der Punkt

$$p = m, \quad q = n$$

auf der betrachteten Strecke liegt. Für negatives c kann für kein reales Werthesystem (p, q) die Gleichung (6) befriedigt werden, d. h. die Curvenlänge besitzt stets einen endlichen Werth.

284. Geodätische Linien auf der Fläche. Geodätische Polarcoordinaten. Inhalt eines Flächenstückes.

Bestimmen wir nunmehr die geodätischen (kürzesten) Linien auf unserer Fläche.

Die Differentialgleichung für die geodätischen Linien ergiebt sich aus den Formeln des Art. 18 der Gauss'schen Disquisitiones in der Form

$$\left(E + \frac{dq}{dp} F\right)\left\{\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q} + \frac{\partial G}{\partial p}\frac{dq}{dp} + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial q}\left(\frac{dq}{dp}\right)^2 + G\frac{d^2q}{dp^2}\right\}$$
$$- \left(F + \frac{dq}{dp} G\right)\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial p} + \frac{\partial E}{\partial q}\frac{dq}{dp} + \left(\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}\right)\left(\frac{dq}{dp}\right)^2 + F\frac{d^2q}{dp^2}\right\} = 0,$$

also lautet dieselbe für unsere Fläche, wo E, F, G die Werthe (4) haben:

$$[(p-m)^2 + (q-n)^2 - c]\frac{d^2q}{dp^2} - 2(p-m)\left(\frac{dq}{dp}\right)^3 + 2(q-n)\left(\frac{dq}{dp}\right)^2$$
$$- 2(p-m)\frac{dq}{dp} + 2(q-n) = 0.$$

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung ergiebt sich leicht in der Form

(7) $\mathfrak{a}[(p-m)^2+(q-n)^2+c]+2\mathfrak{b}(p-m)+2\mathfrak{c}(q-n)=0,$

wo die $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ willkürliche (Integrations-)Constanten bedeuten. Diese Gleichung stimmt aber mit der Gleichung (VI) der Nr. 280 (S. 84) überein, d. h.:

Die geodätischen Linien auf der Fläche sind diejenigen Curven, die solchen Kreisen der η-Ebene entsprechen, welche den Orthogonalkreis (2) unter rechtem Winkel schneiden.

Wählen wir die $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ als reale Constanten, so ist die entsprechende geodätische Linie für nicht positive Werthe von c stets real; die Gleichung derselben lässt sich nämlich in die Form setzen

$$\left(p-m+\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right)^2+\left(q-n+\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}}\right)^2+c-\frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2}-\frac{\mathfrak{c}^2}{\mathfrak{a}^2}=0,$$

und für $c \leqq 0$ ist ja stets

$$-c+\frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2}+\frac{\mathfrak{c}^2}{\mathfrak{a}^2}>0.$$

Dagegen sind für ein positives c nur diejenigen geodätischen Linien real, für welche

$$\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2-\mathfrak{a}^2 c>0$$

ist.

Betrachten wir die Gesammtheit der geodätischen Linien, die durch den Punkt

$$p=m, \quad q=n$$

hindurchgehen, so muss für dieselben, wenn c von Null verschieden ist, $\mathfrak{a}$ verschwinden, d. h. ihre Gleichung lautet

(8) $$\mathfrak{b}(p-m)+\mathfrak{c}(q-n)=0.$$

Da die Abbildung der Fläche auf die η-Ebene eine winkeltreue ist, so ist der Neigungswinkel φ der geodätischen Linie (8) zu der Curve

$$q=n$$

durch die Formel

$$\varphi=\operatorname{arctg}\left(\frac{-\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}}\right)$$

gegeben. Tragen wir nun auf den geodätischen Linien des Büschels (8) vom Punkte (m, n) aus constante geodätische Längen r ab, so ist für die Endpunkte (p, q) derselben

$$r=2\int_{(m,n)}^{(p,q)}\sqrt{\frac{dp^2+dq^2}{[(p-m)^2+(q-n)^2-c]^2}}.$$

Wenn wir nun

$$(9)\qquad \begin{cases} p - m = \varrho \cos\varphi, \\ q - n = \varrho \sin\varphi \end{cases}$$

setzen, wodurch also

$$(p - m)^2 + (q - n)^2 - c = \varrho^2 - c$$

wird, so verwandelt sich, da φ längs der Curve (8) einen constanten Werth hat, der Ausdruck für r in

$$r = \pm 2\int_0^\varrho \frac{d\varrho}{\varrho^2 - c},$$

wo das Vorzeichen so zu wählen ist, dass r positiv ist, wenn es einen realen Werth besitzt.

Wenn c negativ ist, so setzen wir

$$k = \sqrt{-c} > 0,$$

dann haben wir

$$(10)\qquad r = 2\int_0^\varrho \frac{d\varrho}{\varrho^2 + k^2} = \frac{2}{k} \operatorname{arctg} \frac{\varrho}{k},$$

es ist also für jeden Punkt (p, q) der η-Ebene der entsprechende Werth von r real und endlich.

Ist dagegen c positiv, und setzen wir mit Rücksicht auf eine später zu treffende Convention

$$k = \sqrt{c} > 0,$$

$$(11)\qquad r = 2\int_0^\varrho \frac{d\varrho}{k^2 - \varrho^2} = \frac{1}{k} \log \frac{k + \varrho}{k - \varrho},$$

so folgt, dass r nur für diejenigen Punkte real ist, die der Ungleichung $\varrho < k$ oder

$$(p - m)^2 + (q - n)^2 < c$$

Genüge leisten; d. h.:

Nur den Punkten der η-Ebene, die innerhalb des Orthogonalkreises liegen, entsprechen reale Flächenpunkte; für die den Punkten der Peripherie des Orthogonalkreises entsprechenden Flächenpunkte ist r unendlich gross, diese Punkte liegen also in unendlicher Entfernung.

Diejenigen Punkte der η-Ebene, welche Flächenpunkten im constanten geodätischen Abstande r von dem Punkte (m, n) entsprechen, liegen auf einem mit dem Orthogonalkreise concentrischen Kreise, dessen Radius den Werth

(12) $$\varrho = k \operatorname{tg} \frac{rk}{2} \quad \text{für} \quad c = -k^2 < 0,$$
beziehungsweise

(13) $$\varrho = k \frac{e^{kr} - 1}{e^{kr} + 1} \quad \text{für} \quad c = k^2 > 0$$

besitzt. In beiden Fällen bestimmen die Grössen r, φ ein System von sogenannten geodätischen Polarcoordinaten auf der Fläche.

Wir wollen nun noch den Inhalt einer von einer geschlossenen Curve begrenzten Figur auf unserer Fläche zu bestimmen suchen.

Nimmt man als Flächenelement den Inhalt eines unendlich kleinen, von den vier Curven
$$p, \; p + dp, \quad q, \; q + dq$$
begrenzten Rechtecks, so wird dieser Inhalt nach Art. 17 der Gaussschen „Disquisitiones" durch die Formel
$$dp\,dq\sqrt{EG - F^2},$$
also in unserem Falle durch
$$\frac{4\,dp\,dq}{[(p-m)^2 + (q-n)^2 - c]^2}$$
gegeben. Der Inhalt des von einer geschlossenen Curve $\mathfrak{C}$ begrenzten Flächenstückes ist demnach gleich dem Doppelintegrale

(14) $$4\iint \frac{dp\,dq}{[(p-m)^2 + (q-n)^2 - c]^2} = 4\iint \frac{\varrho\,d\varrho\,d\varphi}{(\varrho^2 - c)^2},$$

erstreckt über das Innere dieser Curve.

285. Verschiebungen auf der Fläche von constanter Krümmung. Superficielle Länge und superficieller Inhalt. Beziehungen zur Nicht-Euklid'schen Geometrie.

Betrachten wir jetzt irgend eine projective Substitution
$$\eta' = A\eta = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$
die den Orthogonalkreis (2) ungeändert lässt. Setzen wir
$$\eta' = p' + q'i,$$
so entspricht also die Ausübung der linearen Substitution A auf einen Punkt der η-Ebene dem Uebergange von einem Flächenpunkte (p, q) zu dem Punkte (p', q'). Wenn für die Substitution A die Gleichung (VIII) der Nr. 282 (S. 89) erfüllt ist, so bleibt bei Anwendung derselben das Linienelement ds ungeändert, d. h. wenn wir den Punkt (p, q) eine Curve auf der Fläche durchlaufen lassen, so durchläuft der Punkt (p', q') eine Curve von derselben Länge. Dies ist also für $c \neq 0$ für alle

positiven Substitutionen A, für $c = 0$ für die elliptischen und parabolischen unter denselben der Fall.

Ferner folgt daraus, dass die Abbildung der Fläche auf die η-Ebene eine winkeltreue ist, dass, wenn wir den Punkt (p, q) zwei Curven auf der Fläche beschreiben lassen, die sich unter einem gewissen Winkel φ schneiden, die entsprechenden von dem Punkte (p', q') durchlaufenen Curven den selben Winkel φ mit einander einschliessen müssen. Endlich ist nach der Transformationsformel für Doppelintegrale und mit Rücksicht auf die Gleichung (VIII)

$$\int\int \frac{dp'\,dq'}{[(p'-m)^2+(q'-n)^2-c]^2}$$
$$= \int\int \left(\frac{\partial p'}{\partial p}\frac{\partial q'}{\partial q} - \frac{\partial p'}{\partial q}\frac{\partial q'}{\partial p}\right) \frac{(\gamma\eta+\delta)^2\,(\bar\gamma\bar\eta+\bar\delta)^2 dp\,dq}{[(p-m)^2+(q-n)^2-c]^2}.$$

Nun ist aber für die monogene Function $p' + q'i$ von $p + qi$

$$\frac{\partial p'}{\partial p} = \frac{\partial q'}{\partial q}, \quad \frac{\partial p'}{\partial q} = -\frac{\partial q'}{\partial p},$$
$$\frac{d\eta'}{d\eta} = \frac{\partial p'}{\partial p} + i\frac{\partial q'}{\partial p} = -i\frac{\partial p'}{\partial q} + \frac{\partial q'}{\partial q},$$

wir haben folglich

$$\text{(X)} \qquad \frac{\partial p'}{\partial p}\frac{\partial q'}{\partial q} - \frac{\partial p'}{\partial q}\frac{\partial q'}{\partial p} = \left|\frac{d\eta'}{d\eta}\right|^2$$

und demnach, mit Rücksicht auf die Gleichung (IX) der Nr. 283 (S. 94)

$$4\int\int \frac{dp'\,dq'}{[(p'-m)^2+(q'-n)^2-c]^2} = 4\int\int \frac{dp\,dq}{[(p-m)^2+(q-n)^2-c]^2},$$

d. h. wenn der Punkt (p, q) eine geschlossene Curve beschreibt, so beschreibt der Punkt (p', q') eine ebenfalls geschlossene Curve, und die von beiden Curven umschlossenen Flächeninhalte haben denselben Werth.

Aus diesen drei Bemerkungen (von denen übrigens die dritte eine unmittelbare Folge der beiden ersten ist) ergiebt sich, dass der Anwendung einer Substitution A, die der Gleichung (VIII) genügt, auf die complexe Variable η eine Transformation der Punkte unserer Fläche vom constanten Krümmungsmaasse $-c$ entspricht, bei der jede auf der Fläche gezeichnete Figur in eine ihr congruente Figur übergeht.

Wir sehen also, dass die Fläche vom constanten Krümmungsmaasse $-c$ im allgemeinen Falle für die Substitutionen A, die der Gleichung (VIII) genügen, genau dasselbe Verhalten zeigt, wie die gewöhnliche η-Ebene in dem Falle

$$c = 0, \quad \eta_0 = m + ni = \infty,$$

den wir in der Nr. 283 (S. 93) betrachtet hatten, für die Verschiebungen.

Die von der Gesammtheit der Substitutionen A, die die Gleichung (VIII) befriedigen, gebildete Gruppe liefert, aufgefasst als Gruppe von Transformationen der Punkte (p, q) unserer Fläche, die doppelt unendliche Mannigfaltigkeit der Verschiebungen der Fläche in sich selbst.

Kommen wir überein, die Fläche, welche die Abbildung der η-Ebene oder für $c > 0$ der Punkte im Innern des Orthogonalkreises darstellt, als eine „Ebene" zu bezeichnen, nennen wir ferner die geodätischen Linien dieser Fläche „Geraden", so erhalten wir in dieser „Ebene" eine Geometrie, die für $c = 0$ mit der gewöhnlichen Euklidschen, für $c > 0$ mit der von Lobatscheffskij und J. Bólyai begründeten, für $c < 0$ mit der sogenannten Riemann'schen übereinstimmt.

In der That ist z. B. zufolge des Satzes der Nr. 281 (S. 86) die Summe der Winkel eines „geradlinigen" Dreieckes in dieser „Ebene", je nachdem c gleich Null, positiv oder negativ ist, gleich, kleiner oder grösser als π, eine Eigenschaft, die sich übrigens aus den entwickelten flächentheoretischen Formeln auch leicht ableiten lässt.

In Uebertragung dieser Verhältnisse auf die η-Ebene werden wir uns allgemein für $c \gtreqless 0$ bei der Betrachtung von Gruppen von Substitutionen A, die der Gleichung (VIII) genügen, der folgenden Bezeichnungen bedienen.

Eine Substitution A, die der Gleichung (VIII) genügt, heisst eine Verschiebung. Punkte, die durch eine Verschiebung aus einander hervorgehen, heissen correspondirend, ebene Figuren, die durch eine Verschiebung aus einander entstehen, heissen congruent. Für eine Curve $\mathfrak{C}$, die zwischen zwei Punkten η_1, η_2 verläuft, heisst das längs derselben erstreckte Integral

$$2\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{|d\eta|}{|(\eta-\eta_0)(\bar{\eta}-\bar{\eta}_0)-c|}$$

ihre superficielle Länge, für eine geschlossene Figur das über dieselbe genommene Integral

$$4\iint \frac{dp\,dq}{[(\eta-\eta_0)(\bar{\eta}-\bar{\eta}_0)-c]^2}$$

ihr superficieller Inhalt. Es gelten dann nach den vorhergehenden Betrachtungen die folgenden Sätze:

1) Wenn $c > 0$ ist, so liegen die mit einem Punkte innerhalb des Orthogonalkreises correspondirenden Punkte ebenfalls innerhalb des Orthogonalkreises.

2) Für $c \gtreqless 0$ haben congruente Figuren in correspondirenden Ecken gleiche Winkel. Congruente Curven haben gleiche superficielle Länge, congruente geschlossene Figuren gleichen superficiellen Inhalt.

3) Die superficielle Länge einer Curve, die keinen Punkt mit dem Orthogonalkreise gemein hat, besitzt einen endlichen Werth. Ebenso der superficielle Inhalt einer geschlossenen Figur, die keinen Punkt des Orthogonalkreises in ihrem Innern enthält. Für $c < 0$ gilt dieser Satz also für jede beliebige Curve und jede beliebige geschlossene Figur, selbst wenn sich dieselbe in's Unendliche erstreckt. Für $c \geq 0$ ist die superficielle Länge einer Curve, die den Orthogonalkreis trifft, unendlich gross.

Wenn c einen negativen Werth hat, so sind alle Substitutionen A, die den Orthogonalkreis ungeändert lassen, Verschiebungen. Für positives c sind es nur die positiven unter diesen Substitutionen, für $c = 0$ nur die elliptischen und parabolischen. Allemal bildet aber die Gesammtheit aller Verschiebungen eine Gruppe, da offenbar zwei Verschiebungen hintereinander angewandt wieder eine Verschiebung geben. Ferner ist klar, dass eine Gruppe, die aus einer gewissen Anzahl von Verschiebungen als Basis gebildet ist, nur Verschiebungen (d. h. also im Falle $c = 0$ nur elliptische und parabolische Substitutionen) enthalten kann.

Dass es für $c = 0$ nebst den Verschiebungen noch Substitutionen giebt, die den Punkt η_0 ungeändert lassen, jedoch den Differentialausdruck (1) mit einer von Eins verschiedenen Constanten multipliciren, nämlich diejenigen Substitutionen, die den für $\eta_0 = \infty$ als Aehnlichkeitstransformationen bezeichneten entsprechen, bedingt die specifische Eigenthümlichkeit der dem Falle $c = 0$ entsprechenden Euklid'schen Geometrie, wonach es in dieser Geometrie eine Aehnlichkeit von Figuren giebt, was weder für die Lobatscheffskij-Bólyai'sche noch für die Riemann'sche Geometrie der Fall ist. Es möge noch hervorgehoben werden, dass in der Euklid'schen Geometrie der Ebene, von der hier die Rede ist, die sämmtlichen geraden Linien der Ebene als durch einen und denselben „unendlich fernen Punkt" hindurchgehend vorzustellen sind, eine Vorstellung, die ja auch der Darstellung der complexen Grössen durch die Punkte einer Ebene zu Grunde liegt, und die gegenüber der in der projectivischen Geometrie üblichen Annahme einer „unendlich fernen Geraden" nur den einen Nachtheil hat, dass dem „unendlich fernen Punkte" andere Eigenschaften zukommen, wie den im Endlichen gelegenen Punkten.

In Bezug auf die parabolischen Substitutionen ist für den Fall eines realen Orthogonalkreises ($c \geqq 0$) noch Folgendes zu bemerken: Setzen wir für

$$\frac{1}{\eta' - \lambda} = \frac{1}{\eta - \lambda} + \gamma,$$

wo λ der Gleichung

$$(\lambda - \eta_0)(\bar{\lambda} - \bar{\eta}_0) = c$$

genügt, wie oben

$$\zeta = \frac{1}{\eta - \lambda}, \qquad \zeta' = \frac{1}{\eta' - \lambda},$$

so bewegt sich, wenn ζ eine gerade Linie durchläuft, der correspondirende Punkt ζ' auf einer parallelen Geraden. D. h. wenn η einen durch den Punkt λ hindurchgehenden Kreis beschreibt, so durchläuft der correspondirende Punkt η' einen Kreis, der den von η beschriebenen im Punkte λ berührt. Bewegt sich also η auf einem Kreise C_0, der den Orthogonalkreis O in λ unter rechtem Winkel schneidet, so beschreibt η' einen Kreis C_1, der O ebenfalls in λ unter rechtem Winkel schneidet und C_0 berührt; ebenso beschreibt

$$\eta^{(\varkappa)} = A^{\varkappa} \eta \qquad (\varkappa = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots)$$

einen Kreis $C_\varkappa$, der $C_0, C_1, \cdots$ in λ berührt. Da aber (Nr. 199, Bd. II, 1, S. 269)

$$\lim_{\varkappa} A^{\varkappa} \eta = \lambda$$

ist, so nähern sich die Kreise $C_\varkappa$ mit wachsenden Werthen von $|\varkappa|$ unbegrenzt dem Doppelpunkte λ. Wir schliessen hieraus den für das Folgende wichtigen Satz:

Eine Curve, die den Orthogonalkreis nicht schneidet, kann stets nur eine endliche Anzahl der Kreise $C_\varkappa$ treffen.

Zweites Kapitel.

286. Ansatz zum Discontinuitätsbeweise für die Gruppe gewisser Dreiecksfunctionen.

Wir kehren nun zur Untersuchung der Dreiecksfunctionen

$$\eta = s(\delta_1, \delta_2, \delta_3, z)$$

zurück, wo $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ reciproke ganze positive Zahlen oder Null sind. Sei

$$(\eta - \eta_0)(\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) - c = 0$$

die Gleichung des Orthogonalkreises O, der zu den Seiten s_0, s_1, s_2' des Ausgangsdreieckes $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ gehört, und setzen wir fest, dass wir, falls $c > 0$ ist (in Uebereinstimmung mit der bereits in der Theorie der Modulfunction festgehaltenen Convention) von den beiden Kreisbogendreiecken mit den Winkeln

$$\pi\delta_1, \quad \pi\delta_2, \quad \pi\delta_3,$$

von denen (Nr. 280, S. 86) das eine ganz innerhalb, das andere ganz ausserhalb des Orthogonalkreises liegt, immer das im Innern von O gelegene als Ausgangsdreieck ansehen wollen. Dann haben wir für die Dreiecksfunctionen der in der Nr. 281 (S. 86) unterschiedenen drei Arten zunächst die folgenden Resultate.

In allen drei Fällen schneiden die Seiten der sämmtlichen Dreiecke der Theilung unserer Fläche F, die über der η-Ebene ausgebreitet die Verzweigung der Function z darstellt, den Orthogonalkreis unter rechtem Winkel (Nr. 281, S. 87) und die Substitutionen der projectiven Monodromiegruppe ϑ sind Verschiebungen.

Für ein negatives c folgt das letztere unmittelbar aus dem Satze der Nr. 281 (S. 87), wonach die Substitutionen von ϑ den Orthogonalkreis in sich selbst transformiren, für ein positives c aus dem Satze der Nr. 282 (S. 89). Für $c = 0$ sind die Fundamentalsubstitutionen A_1, A_2 (da δ_1, δ_2 reale Grössen sind) elliptische oder parabolische Substitutionen, also Verschiebungen; nach den Ergebnissen am Schlusse der vorigen Nummer gilt folglich das Gleiche auch für alle Substitutionen von ϑ.

Für die Dreiecksfunctionen zweiter Art sind also alle Substitutionen von ϑ elliptische oder parabolische von der Form

$$\frac{\eta' - \eta_0}{\eta' - \mu} = K \frac{\eta - \eta_0}{\eta - \mu}, \quad |K| = 1,$$

beziehungsweise

$$\frac{1}{\eta' - \eta_0} = \frac{1}{\eta - \eta_0} + \gamma,$$

wenn η_0 den Punkt bedeutet, in welchem sich die drei Kreise s_0, s_1, s_2' schneiden.

Für die Dreiecksfunctionen dritter Art sind die Substitutionen der Gruppe ϑ elliptische. Für die Dreiecksfunctionen erster Art endlich können elliptische, parabolische oder hyperbolische Substitutionen vorkommen; über die Lage der Doppelpunkte geben die Sätze der Nr. 282 (S. 92) erschöpfenden Aufschluss.

Wir stellen uns nun die Aufgabe zu beweisen, dass unter der für die δ_1, δ_2, δ_3 gemachten Annahme die Gruppe ϑ stets eine discontinuirliche, d. h. dass die Function z von η eine eindeutige ist.

Das Fundamentalpolygon F_0, welches durch Spiegelung des Ausgangsdreieckes $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ in Bezug auf die Seite s_0 entsteht, ist ein schlichtes Kreisbogenviereck, welches für die Dreiecksfunctionen erster Art jedenfalls ganz innerhalb des realen Orthogonalkreises liegt. Die aus F_0 durch die Substitutionen der Gruppe ϑ hervorgehenden Bereiche

$$F_{\pm \varkappa_1, \pm \varkappa_2, \cdots \pm \varkappa_\nu}$$

sind untereinander und mit F_0 congruent und befinden sich für die Functionen erster Art ebenfalls ganz innerhalb des Kreises O. Es sind nun zwei Fälle als möglich in's Auge zu fassen.

1) Die Bereiche $F_{\pm \varkappa_1, \pm \varkappa_2, \cdots \pm \varkappa_\nu}$ lagern sich schlicht und lückenlos nebeneinander, d. h. die Fläche F bedeckt die η-Ebene nirgends mehrfach; dann ist nach den Ergebnissen der Nr. 216 (Bd. II, 1, S. 344 ff.) die Gruppe ϑ discontinuirlich.

2) Dies ist nicht der Fall, sondern es kommt vor, dass mehrere jener Bereiche übereinander greifen.

In den Fällen

$$\delta_1 = 0, \quad \delta_2 = 0, \quad \delta_3 = 0,$$
$$\delta_1 = \frac{1}{3}, \quad \delta_2 = \frac{1}{2}, \quad \delta_3 = 0,$$
$$\delta_1 = \frac{1}{3}, \quad \delta_2 = \frac{1}{2}, \quad \delta_3 = \frac{1}{2}$$

hatten wir gezeigt, dass nur die unter 1) angegebene Möglichkeit eintreten kann. Um dies auch in dem allgemeinen Falle

$$\delta_1 = \frac{1}{g_1}, \quad \delta_2 = \frac{1}{g_2}, \quad \delta_3 = \frac{1}{g_3},$$

wo g_1, g_2, g_3 positive ganze Zahlen oder unendlich sind, beweisen zu können, müssen wir uns einer Methode bedienen, die Herr Poincaré für die Untersuchung analoger Fragen von viel grösserer Allgemeinheit angegeben hat. Der Grund, weshalb die im Falle

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$$

angewandte Beweismethode (Nr. 272, S. 50) im Allgemeinen nicht ausreicht, ist in dem Umstande zu suchen, dass, wenn nicht alle drei $\delta_\varkappa$ verschwinden, nothwendig Ecken von F_0 vorhanden sein müssen, die nicht auf dem Orthogonalkreise liegen. Es sind dies nämlich die Ecken, die Doppelpunkte elliptischer Substitutionen sind.

Im Falle einer Dreiecksfunction erster Art liegen alle Bereiche

$$F_{\pm\varkappa_1, \pm\varkappa_2, \cdots \pm\varkappa_\nu}$$

nothwendig innerhalb des Orthogonalkreises O, da jeder ihrer Punkte mit einem Punkte von F_0 correspondirt. Die von der Gesammtheit dieser Bereiche gebildete Fläche F kann also nicht über den Kreis O hinweggreifen. Für die Dreiecksfunctionen zweiter Art ist der Punkt η_0, durch den alle Seiten der mit F_0 congruenten Bereiche hindurchgehen, keinesfalls ein Punkt, der im Innern der Fläche F liegt. Für die Functionen dritter Art kann F dagegen die ganze η-Ebene erfüllen.

Denken wir uns einen Punkt a im Innern des Fundamentalbereiches F_0 und einen beliebigen Punkt b der η-Ebene. Legen wir von a nach b hin eine Curve $\mathfrak{C}$, die sich nicht unendlich oft windet, und verfolgen wir den Verlauf dieser Curve in der Fläche F. Die Curve $\mathfrak{C}$ wird F_0 über eine gewisse Seite hinweg verlassen und in den benachbarten Bereich F_{ω_1} eintreten, wird dann diesen Bereich abermals über eine Seite hinweg verlassen, um in den benachbarten Bereich F_{ω_2} zu gelangen u. s. w. Wenn wir auf diese Weise fortfahrend die Reihe der Bereiche

$$F_0, \; F_{\omega_1}, \; F_{\omega_2}, \; F_{\omega_3}, \cdots$$

bestimmen, die von der Curve $\mathfrak{C}$ durchquert werden, so sind zwei Fälle möglich.

Es wird sich entweder ein Bereich F_{ω_n} ergeben, den die Curve $\mathfrak{C}$ nicht mehr verlässt, dann befindet sich der Punkt b in diesem Bereiche, d. h. b liegt jedenfalls in dem von der Fläche F bedeckten Theile der

η-Ebene und $\mathfrak{C}$ verläuft ganz innerhalb F. Wenn der Bereich F_{ω_n}, den die Curve nicht mehr verlässt, nach einer endlichen Anzahl von Schritten erreicht wird, so sagen wir, die Curve $\mathfrak{C}$ sei von der ersten Art.

Oder man wird, wie weit man auch gehen mag, niemals auf einen Bereich der Fläche F stossen, den die Curve $\mathfrak{C}$ nicht verlässt, dann sagen wir, $\mathfrak{C}$ sei von der zweiten Art.

Wenn der Punkt b so beschaffen ist, dass jede Curve $\mathfrak{C}$, die denselben mit a verbindet, von der zweiten Art ist, dann liegt b offenbar ausserhalb des von der Fläche F bedeckten Theiles der η-Ebene.

Giebt es dagegen Curven $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots$ erster Art, die a mit b verbinden, und endet $\mathfrak{C}_1$ in F_{α_1}, $\mathfrak{C}_2$ in $F_{\alpha_2}, \cdots$, so befindet sich der Punkt b innerhalb des von der Fläche F bedeckten Gebietes der η-Ebene, und zwar lagern sich in der Nähe von b die Bereiche $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \cdots$ übereinander. Wenn also die Gruppe ϑ eine discontinuirliche sein soll, so müssen die Bereiche

$$F_{\alpha_1},\ F_{\alpha_2}, \cdots,$$

in denen die von a nach b gelegten Curven erster Art endigen, mit einander identisch sein.

Lassen wir b mit a zusammenfallen, so sind die Curven $\mathfrak{C}$ geschlossen, und es giebt unter ihnen jedenfalls solche, die von erster Art sind. Für die Discontinuität der Gruppe ϑ ist dann offenbar nothwendig, dass der Bereich F_α, in welchem irgend eine von a ausgehende geschlossene Curve erster Art endet, mit F_0 identisch ist. Hinreichend für die Discontinuität von ϑ ist, dass jede von a ausgehende, innerhalb der Fläche F verlaufende Curve, die zu demselben Punkte $\eta = a$ zurückführt, auch in dem Bereiche F_0 endet, d. h. eine in der Fläche F geschlossene Curve ist, denn aus der Congruenz der Bereiche

$$F_{\pm\varkappa_1,\ \pm\varkappa_2, \cdots \pm\varkappa_\nu}$$

mit F_0 folgt dann, dass jede Curve, die von einem beliebigen Punkte des von der Fläche F bedeckten Theiles der η-Ebene ausgeht, ganz innerhalb F verläuft und zu demselben η-Werthe zurückkehrt, auch eine innerhalb F geschlossene Curve sein muss, und dies besagt nichts anderes, als dass sich die Fläche F an keiner Stelle mehrfach überdeckt.

287. Beweis eines Hülfssatzes. Sätze über Dreiecksfunctionen. Discontinuitätsbeweis.

Wir beweisen zuvörderst den folgenden Hülfssatz:

Jede Curve $\mathfrak{C}$ die von a ausgeht und nach einem Punkte b hinführt, ohne den Orthogonalkreis O zu treffen, ist von der ersten Art.

Denken wir uns die Reihe der von $\mathfrak{C}$ durchquerten Bereiche

$$F_0, \; F_{\omega_1}, \; F_{\omega_2}, \cdots$$

bestimmt, und bezeichnen wir mit l_p das innerhalb F_{ω_p} gelegene Stück der Curve $\mathfrak{C}$, mit l_0 das innerhalb F_0 verlaufende Stück dieser Curve, so ist also

$$\mathfrak{C} = l_0 + l_1 + l_2 + \cdots.$$

Das Curvenstück l_p verbindet offenbar zwei Punkte der Begrenzung von F_{ω_p}; diese Punkte können entweder auf zwei in einer Ecke $\lambda^{(p)}$ von F_{ω_p} zusammenstossenden Seiten dieses Bereiches liegen, wir sagen dann, l_p umspannt die Ecke $\lambda^{(p)}$, oder sie gehören zwei nicht benachbarten Seiten von F_{ω_p} an. Wenn l_p keine Ecke umspannt, so construiren wir die mit l_p congruente, innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 verlaufende Curve $l_p^{(0)}$; dann umspannt $l_p^{(0)}$ auch keine Ecke von F_0, die superficielle Länge von $l_p^{(0)}$ hat demnach einen endlichen, von Null verschiedenen Werth, der eine bestimmte angebbare Grösse K übertreffen muss. Also ist auch die superficielle Länge von l_p selbst grösser wie K.

Da die Curve $\mathfrak{C}$ den Orthogonalkreis O nicht trifft, so hat ihre superficielle Länge einen endlichen Werth L, die Anzahl derjenigen Curvenstücke, die keine Ecke umspannen, ist also jedenfalls kleiner wie

$$\frac{L}{K}.$$

Wir können folglich die positive ganze Zahl q so gross wählen, dass alle Curvenstücke, die keine Ecke umspannen, unter den

$$l_1, \; l_2, \cdots l_{q-1}$$

enthalten sind; die folgenden

$$l_q, \; l_{q+1}, \cdots$$

umspannen also Ecken.

Betrachten wir unter den letzteren zwei auf einander folgende und den durch Vereinigung derselben entstehenden Bogen

$$m_p = l_p + l_{p+1}, \qquad (p \geq q),$$

dann können l_p und l_{p+1} entweder dieselbe Ecke $\lambda^{(p)}$ umspannen, so dass also m_p selbst diese Ecke umspannt, oder l_p, l_{p+1} umspannen verschiedene Ecken.

Wenn m_p keine Ecke umspannt, so beginnt dieser Curvenbogen in einem Punkte einer Seite $s^{(p)}$ von F_{ω_p}, der in der Ecke $\lambda^{(p)}$ mündet, überschreitet die Seite $(\lambda^{(p)}, \lambda^{(p+1)})$, die die gemeinsame Grenze der beiden Bereiche F_{ω_p}, $F_{\omega_{p+1}}$ bildet, und endet in einem Punkte der Seite $s^{(p+1)}$ von $F_{\omega_{p+1}}$, die von der Ecke $\lambda^{(p+1)}$ ausgeht (vergl. Fig. 24). Construiren wir die mit l_p, l_{p+1} congruenten Curven innerhalb F_0, so erhalten wir einen Curvenzug $m_p^{(0)}$ innerhalb F_0, der Punkte von drei Seiten des Fundamentalbereiches mit einander verbindet. Die superficielle Länge von $m_p^{(0)}$ besitzt folglich einen endlichen von Null verschiedenen Werth, der nicht unterhalb einer gewissen angebbaren Grenze $\overline{K}$ liegen kann. Die Anzahl der Curvenbogen m_p, die keine Ecke umspannen, ist demnach ebenfalls eine endliche, nämlich kleiner wie

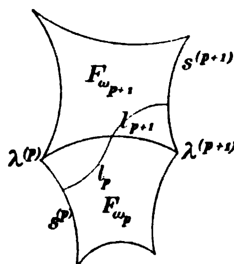


Fig. 24.

$$\frac{L}{\overline{K}}.$$

Wir können also die positive ganze Zahl r so gross wählen, dass alle Curvenstücke

$$l_r, \; l_{r+1}, \; \cdots$$

eine und dieselbe Ecke $\lambda^{(r)}$ umspannen. Es sind dann zwei Fälle möglich.

Die Ecke $\lambda^{(r)}$ kann Doppelpunkt einer elliptischen Substitution der Gruppe ϑ sein. Diese Substitution geht dann nothwendig aus einer der drei Substitutionen

$$A_1, \; A_2, \; A_3$$

durch Transformation mittelst einer Substitution von ϑ hervor. Ihr Multiplicator hat also die Form

$$e^{2\pi i \delta_\varkappa} = e^{\frac{2\pi i}{g_\varkappa}}. \qquad (\varkappa = 1, 2, 3).$$

Es lagern sich folglich genau $g_\varkappa$ Bereiche der Fläche F um den Punkt $\lambda^{(r)}$ herum, die Anzahl der Curvenstücke l_p, die die Ecke $\lambda^{(r)}$ umspannen, kann demnach nicht grösser wie $g_\varkappa$ sein. In diesem Falle ist also gezeigt, dass die Anzahl aller Curvenstücke

$$\lambda_0, \; \lambda_1, \; \lambda_2, \; \cdots$$

eine endliche ist.

Die Ecke $\lambda^{(r)}$ kann aber auch Doppelpunkt einer **parabolischen** Substitution der Gruppe ϑ sein. In diesem Falle liegt $\lambda^{(r)}$ auf dem Orthogonalkreise O, und die in $\lambda^{(r)}$ mündenden Seiten der Bereiche $F_{\pm\varkappa_1, \pm\varkappa_2, \cdots \pm\varkappa_\nu}$ schneiden den Kreis O unter rechtem Winkel und berühren einander in $\lambda^{(r)}$. Nach dem Satze der Nr. 285 (S. 103) kann eine Curve, die den Orthogonalkreis nicht trifft, nur eine endliche Anzahl solcher sich in $\lambda^{(r)}$ berührender Kreise durchschneiden, die Curve $\mathfrak{C}$ kann folglich auch nur eine endliche Anzahl der sich um $\lambda^{(r)}$ herumlagernden Bereiche von F durchqueren, d. h. auch in diesem Falle ist die Anzahl der Curvenstücke

$$l_r, \ l_{r+1}, \cdots$$

und folglich auch die der Curvenstücke

$$l_0, \ l_1, \ l_2, \cdots$$

überhaupt eine endliche.

Damit ist also der Beweis unseres Hülfssatzes geliefert.

Für die Dreiecksfunctionen dritter Art, wo der Orthogonalkreis imaginär ist, folgt hieraus, dass jede in der η-Ebene gelegene Curve $\mathfrak{C}$ von der ersten Art sein muss, das ist offenbar nur möglich, wenn die Anzahl der Bereiche

$$F_{\pm\varkappa_1, \pm\varkappa_2, \cdots \pm\varkappa_\nu}$$

und folglich auch die Anzahl der Substitutionen der Gruppe ϑ eine endliche ist. D. h.:

Für die Dreiecksfunctionen dritter Art ist η eine algebraische Function der unabhängigen Variabeln z.

Für die Dreiecksfunctionen erster und zweiter Art ist der Orthogonalkreis real. Denken wir uns eine von a ausgehende, ganz innerhalb der Fläche F verlaufende Curve $\mathfrak{C}$, die den Orthogonalkreis in einem Punkte trifft und die durch keine Ecke eines der Bereiche von F hindurchgeht. Möge $\mathfrak{C}$ die Bereiche

$$F_0, \ F_{\omega_1}, \ F_{\omega_2}, \cdots$$

durchqueren, und bezeichne wieder l_p das innerhalb F_{ω_p} gelegene Stück dieser Curve. Dann ist die superficielle Länge eines jeden solchen Stückes l_p eine endliche, die superficielle Länge der ganzen Curve $\mathfrak{C}$ ist aber nach dem Satze 3 der Nr. 285 (S. 102) unendlich gross; es muss folglich die Anzahl der Stücke l_p eine unendliche sein. Da für $c > 0$ nicht jeder Punkt des Orthogonalkreises eine Ecke sein kann, und für $c = 0$ der Punkt η_0, auf den der Orthogonalkreis zusammenschrumpft, keine Ecke ist (es schneiden sich ja alle Seiten der Bereiche von F

in diesem Punkte), so giebt es stets Curven von der für $\mathfrak{C}$ geforderten Beschaffenheit. D. h.:

Für die Dreiecksfunctionen erster und zweiter Art ist die Anzahl der Bereiche von F und folglich die Anzahl der Substitutionen der Gruppe ϑ unendlich gross, η ist eine transcendente Function von z, und jede Curve, die den Orthogonalkreis in einem Punkte trifft der keine Ecke ist, ist im Sinne der oben (Nr. 286, S. 107) gegebenen Definition von der zweiten Art.

Hieraus folgt ferner:

Für die Dreiecksfunctionen erster Art bedeckt die Fläche F das Innere des Orthogonalkreises vollständig und lückenlos. Für die Dreiecksfunctionen zweiter und dritter Art gilt das Gleiche für die ganze unendliche η-Ebene; nur ist bei den Functionen zweiter Art die Fläche F durch den Punkt η_0 begrenzt, während sie für die dritte Art unbegrenzt ist.

In allen drei Fällen ist also die Fläche F eine einfach zusammenhängende.

Der Discontinuitätsbeweis lässt sich nunmehr mit Leichtigkeit führen.

Eine von dem Punkte a des Fundamentalbereiches F_0 ausgehende und zu demselben η-Werthe zurückkehrende ganz innerhalb der Fläche F verlaufende Curve $\mathfrak{C}$ könnte, da F einfach zusammenhängend ist, nur dann in einem von F_0 verschiedenen Bereiche endigen, wenn diese Curve einen Windungspunkt der Fläche F einschlösse. Die Fläche F besitzt aber, da die δ_1, δ_2, δ_3 reciproke ganze Zahlen oder Null sind, in ihrem Innern keinen Windungspunkt, also führt jede Curve $\mathfrak{C}$ nothwendig in den Bereich F_0 zurück. Etwas anders gefasst lautet dieser Beweis so:

Zwischen der Zusammenhangszahl $2p+1$, der Anzahl der Windungspunkte w und der Anzahl der Blätter n einer Fläche besteht nach Riemann die Beziehung

$$w - 2n = 2p - 2,$$

für unsere Fläche F ist $p = 0$, $w = 0$, folglich

$$n = 1.$$

288. Die Dreiecksfunctionen erster Art.

Wir erkennen, dass für die allgemeinste Dreiecksfunction

$$\eta = s(\delta_1, \delta_2, \delta_3, z),$$

wo die δ_1, δ_2, δ_3 reciproke ganze Zahlen oder Null sind, ähnliche Verhältnisse bestehen, wie im Falle

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0.$$

Allemal ist die zugehörige Monodromiegruppe ϑ eigentlich discontinuirlich für alle Punkte der η-Ebene, die nicht auf dem Orthogonalkreise liegen. Dies ist für die Dreiecksfunctionen zweiter und dritter Art unmittelbar evident, für die Functionen erster Art haben wir dagegen die Discontinuität der Gruppe ϑ nur für die Punkte innerhalb des Orthogonalkreises bewiesen. Man braucht aber nur zu beachten, dass die Punkte ausserhalb des Orthogonalkreises Spiegelbilder sind von den Punkten innerhalb dieses Kreises, um zu erkennen, dass, wenn wir von dem Spiegelbilde des Fundamentalbereiches F_0 in Bezug auf O ausgegangen wären, die sämmtlichen Bereiche, die aus diesem Spiegelbilde durch die Substitutionen von ϑ hervorgehen, eine Fläche gebildet hätten, die als das Spiegelbild von F das Aeussere des Orthogonalkreises vollständig lückenlos und einfach bedeckt.

Wir haben also für die Dreiecksfunctionen erster Art zwei Continua von Punkten, innerhalb derer die Gruppe ϑ eigentlich discontinuirlich ist, diese beiden Continua werden durch die Peripherie des Orthogonalkreises von einander getrennt. Diese Peripherie ist also die in der Nr. 202 (Bd. II, 1, S. 280) charakterisirte Punktmenge P, die aus der Gesammtheit Q der Doppelpunkte der nicht elliptischen Substitutionen von ϑ und aus der ersten Ableitung Q' dieser Gesammtheit besteht. Die allgemeinen Resultate der Nr. 204 (Bd. II, 1, S. 286) geben uns nunmehr vollständigen Aufschluss über die Natur der Umkehrungsfunction z von η.

Wir hatten das Ausgangsdreieck als innerhalb des Orthogonalkreises gelegen angenommen, d. h. wir hatten uns den Integralquotienten η so gewählt gedacht, dass für einen bestimmten regulären Werth $z = z_0$ der zugehörige η-Werth im Innern von O lag. Halten wir an dieser Voraussetzung fest, so ist also z eine eindeutige Function von η, die ungeändert bleibt, wenn η eine Substitution der Gruppe ϑ erfährt, die nur im Innern des Orthogonalkreises O existirt und für welche jede Stelle der Peripherie von O eine Unbestimmtheitsstelle ist. Diese Function z nimmt innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 jeden Werth nur ein einziges Mal an, und es ist jede eindeutige Function von η, die die Gruppe ϑ zulässt und sich innerhalb F_0 wie eine rationale Function verhält, nach den Ergebnissen der Nr. 215 (Bd. II, 1, S. 336) rational durch z darstellbar.

Würden wir η so gewählt haben, dass dieser Integralquotient für einen regulären Werth von z einen Werth erhält, der ausserhalb des Orthogonalkreises der entsprechenden Gruppe liegt, d. h. hätten wir das Ausgangsdreieck als ausserhalb des Orthogonalkreises befindlich gewählt, so würden wir zu einer eindeutigen, bei den Substitutionen der Gruppe unveränderlichen Function gelangt sein, die ausserhalb dieses Orthogonalkreises existirt.

Die Gesammtheit der eindeutigen Functionen, die bei den Substitutionen unserer Gruppe ϑ ungeändert bleiben, zerfällt demnach in zwei Typen. Der eine Typus existirt innerhalb, der andere ausserhalb des Orthogonalkreises O dieser Gruppe. Der Uebergang von einer Function des einen Typus zu einer Function des anderen erfolgt, indem man z. B. in einer dieser Functionen an die Stelle der unabhängigen Variabeln η das Spiegelbild derselben in Bezug auf den Orthogonalkreis setzt. Wir werden späterhin eine Darstellung dieser Functionen kennen lernen, bei welcher dieser Uebergang in höchst anschaulicher Weise vollzogen werden kann.

Wir heben noch einmal hervor, dass also für diejenigen Dreiecksfunctionen, für welche

$$\delta_1 = \frac{1}{g_1}, \quad \delta_2 = \frac{1}{g_2}, \quad \delta_3 = \frac{1}{g_3}$$

und die Summe

$$\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_3} < 1$$

ist, die eben dargelegten Verhältnisse Platz greifen. Solcher Dreiecksfunctionen erster Art mit eindeutiger Umkehrungsfunction giebt es offenbar unendlich viele.

289. Die Dreiecksfunctionen zweiter Art.

Die Dreiecksfunctionen zweiter Art, die zu discontinuirlichen Gruppen führen, sind durch die Bedingung

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_3} = 1$$

charakterisirt. Für dieselben ergiebt sich sofort nur eine sehr beschränkte Anzahl von Möglichkeiten; in der That besitzt die Gleichung (α), als Diophantische Gleichung für die ganzen positiven Zahlen g_1, g_2, g_3 aufgefasst, nur die folgenden Lösungen, wenn wir von Permutationen der g_1, g_2, g_3 absehen:

$$g_1 = 2, \quad g_2 = 2, \quad g_3 = \infty,$$
$$g_1 = 2, \quad g_2 = 4, \quad g_3 = 4,$$
$$g_1 = 2, \quad g_2 = 3, \quad g_3 = 6,$$
$$g_1 = 3, \quad g_2 = 3, \quad g_3 = 3,$$

wir erhalten also die Dreiecksfunctionen zweiter Art:

$$s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, z\right),$$
$$s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, z\right),$$
$$s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, z\right),$$
$$s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, z\right)$$

und die aus denselben durch Permutation der δ_1, δ_2, δ_3 hervorgehenden. Von diesen Permutationen können wir aber absehen, da dieselben nach den Ergebnissen der Nr. 73 (Bd. I, S. 264) auf den Uebergang von z zu einer linear gebrochenen Function dieser Grösse hinauskommen.

In diesen vier Fällen ist z eine in der ganzen η-Ebene existirende eindeutige Function von η, die nur in dem Punkte $\eta = \eta_0$, auf den der Orthogonalkreis zusammengeschrumpft ist, eine Unbestimmtheitsstelle besitzt. Wenn wir den Integralquotienten η so wählen, dass der Punkt η_0 in's Unendliche fällt, so sind die Seiten der Dreieckstheilung gerade Linien in der η-Ebene, die Substitutionen der Gruppe ϑ sind wirkliche Verschiebungen der η-Ebene, und wir können uns nun auch mit Leichtigkeit die entsprechenden Ausgangsdreiecke und Fundamentalbereiche construiren.

Für die erste Function

$$s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, z\right)$$

ist die dem Umlaufe um $z = \infty$ entsprechende Substitution eine parabolische, ihr Doppelpunkt, d. h. die Ecke λ_3 des Ausgangsdreieckes, befindet sich folglich in dem unendlich fernen Punkte η_0 der η-Ebene. Die beiden anderen Ecken λ_1, λ_2 können wir noch nach Belieben wählen und dadurch den Integralquotienten η völlig bestimmen. Sei z. B.

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1,$$

dann lauten also die Substitutionen A_1, A_2 in der canonischen Form

$$A_1\eta = -\eta, \quad A_2\eta - 1 = -(\eta - 1),$$

da ja die Multiplicatoren

$$e^{2\pi\delta_1 i} = e^{2\pi\delta_2 i} = -1$$

sind. Die Substitution A_3 lautet demgemäss

$$A_3\eta = \eta - 2,$$

und der Fundamentalbereich F_0 hat die in der Fig. 25 dargestellte Form. Die Function z von η ist demnach eine einfach-periodische Function mit der Periode 2, die aber innerhalb des Periodenstreifens, der von den Parallelen zur lateralen Axe in den Punkten -1 und $+1$ begrenzt wird, jeden Werth zweimal annimmt, nämlich in zwei Punkten η und $A_1\eta$. Wir können diese Function in einfachster Weise finden, wenn wir beachten, dass nach den Gleichungen (1) der Nr. 268 (S. 32) in unserem Falle

$$\alpha = \beta = 0, \quad \gamma = \frac{1}{2}$$

Fig. 25.

genommen werden kann. Es ist folglich z. B.

$$u_{01} = 1,$$
$$u_{02} = z^{\frac{1}{2}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, z\right).$$

Nun ist aber, wie Gauss bemerkt hat,

$$t = \sin t \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \sin^2 t\right)$$

und demnach

$$u_{02} = \arcsin\sqrt{z},$$

d. h. wir haben

$$z = \sin^2\left(\frac{u_{02}}{u_{01}}\right),$$

also, da für $z = 0$, $\eta = 0$ und für $z = 1$, $\eta = 1$ sein sollte,

$$z = \sin^2\frac{\pi\eta}{2}.$$

Für die Function

$$\eta = s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, z\right)$$

ist das Ausgangsdreieck ein rechtwinkelig gleichschenkeliges, der Fundamentalbereich F_0 hat also die in der Fig. 26 dargestellte Form. Die Abbildung von F_0 mittelst der Substitution A_1 liefert den Bereich F_1, der mit F_0 zusammen ein Quadrat bildet. Innerhalb dieses Quadrates $(\lambda_2, \lambda_3', \lambda_2', \lambda_3)$ nimmt die eindeutige Function z von η jeden Werth zweimal an und zwar immer in Punkten, die der Gleichung

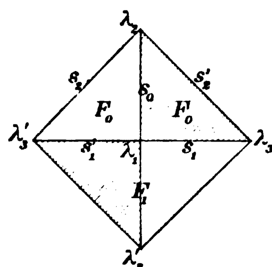


Fig. 26.

$$\eta' - \lambda_1 = -(\eta - \lambda_1)$$

Genüge leisten. Insbesondere hat also z auf je zwei gegenüberliegenden Seiten jenes Quadrates denselben Werth, es ist demnach z eine eindeutige doppeltperiodische Function von η mit den Perioden

$$\omega_1 = \lambda_2 - \lambda_3, \quad \omega_2 = \lambda_3' - \lambda_2,$$

die innerhalb des Periodenparallelogramms jeden Werth zweimal annimmt. Da der Quotient der Perioden

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\lambda_3' - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3} = i$$

ist, so haben wir in z eine lemniscatische Function von η.

Für die Function

$$\eta = s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, z\right)$$

ist das Ausgangsdreieck ebenfalls rechtwinkelig, der Fundamentalbereich F_0 ist in der Fig. 27 dargestellt. Auch hier ist z eine doppeltperiodische eindeutige Function von η mit den Perioden

$$\omega_1 = \lambda_2 - \lambda_3, \quad \omega_2 = \lambda_3' - \lambda_2,$$

die in zwei Punkten des Periodenparallelogramms $(\lambda_2, \lambda_3', \lambda_2', \lambda_3)$, die durch die Gleichung

$$\eta' - \lambda_1 = -(\eta - \lambda_1)$$

mit einander verknüpft sind, denselben Werth annimmt.

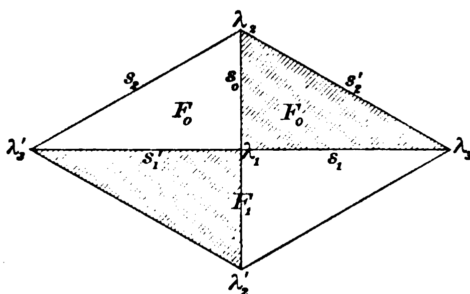


Fig. 27.

Der Periodenquotient hat den Werth

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = e^{\frac{\pi i}{3}}.$$

Für die Function

$$\eta = s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, z\right)$$

endlich ist das Ausgangsdreieck ein gleichseitiges; die Fig. 28 veranschaulicht den Fundamentalbereich F_0. Die Substitutionen A_1, A_2, A_3 lauten

$$A_\varkappa \eta - \lambda_\varkappa = e^{\frac{2\pi i}{3}} (\eta - \lambda_\varkappa),$$
$$(\varkappa = 1, 2, 3).$$

Spiegeln wir das Ausgangsdreieck $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ in Bezug auf die Seite s_2', das so entstehende Dreieck $(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_1')$ in Bezug auf die Seite (λ_1', λ_3), das entstandene Spiegelbild $(\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3)$ in Bezug auf die Seite (λ_1', λ_2'), das neue Dreieck $(\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'')$ weiter in Bezug auf $(\lambda_2', \lambda_3'')$, das neue Dreieck $(\lambda_2', \lambda_3'', \lambda_1'')$ in Bezug auf $(\lambda_1'', \lambda_3'')$, so erhalten wir drei schraffirte und drei unschraffirte Dreiecke. Innerhalb des Parallelogramms $(\lambda_1, \lambda_1', \lambda_2'', \lambda_2')$ nimmt dann die Function z von η jeden Werth zweimal an, und die gegenüberliegenden Seiten dieses Parallelogramms bestehen aus correspondirenden Punkten.

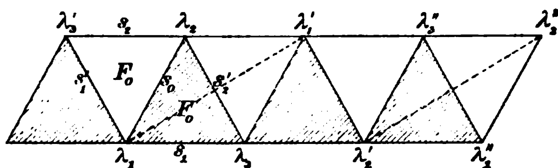


Fig. 28.

Es ist folglich z eine eindeutige doppeltperiodische Function von η, die innerhalb des Periodenparallelogramms $(\lambda_1, \lambda_1', \lambda_2'', \lambda_2')$ jeden Werth zweimal annimmt, und die Perioden haben die Werthe

$$\omega_1 = \lambda_2' - \lambda_1, \quad \omega_2 = \lambda_1' - \lambda_1,$$

während der Quotient derselben

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{\pi i}{6}}$$

gefunden wird.

Die Darstellung der drei so gefundenen doppeltperiodischen Functionen bietet hiernach keine Schwierigkeiten, wenn man sich der aus den Elementen der Theorie der elliptischen Functionen bekannten Formeln bedient.

Drittes Kapitel.

290. Die möglichen Fälle von Dreiecksfunctionen dritter Art. Allgemeine Festsetzungen.

Durch die Betrachtungen der beiden letzten Nummern sind alle Fälle erschöpft, in denen für eine Gauss'sche Differentialgleichung die unabhängige Variable z eine transcendente eindeutige Function des Integralquotienten η darstellt. Wir haben nun noch die Dreiecksfunctionen dritter Art zu studiren, für welche

$$\delta_1 = \frac{1}{g_1}, \quad \delta_2 = \frac{1}{g_2}, \quad \delta_3 = \frac{1}{g_3}$$

ist, und die ganzen positiven Zahlen g_1, g_2, g_3 der Ungleichung

$$(\beta) \qquad \frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_3} > 1$$

Genüge leisten.

Wir wissen, dass in diesen Fällen die Gruppe ϑ eine endliche, aus lauter elliptischen Substitutionen zusammengesetzte sein muss, dass also η eine algebraische Function von z, und folglich, da die Gruppe discontinuirlich und demnach z eindeutig in η ist, z eine rationale Function von η darstellen muss.

Da jede der Zahlen g_1, g_2, g_3 grösser wie Eins ist, ergeben sich, von Permutationen abgesehen, für diese Zahlen gemäss der Ungleichung (β) nur die folgenden Möglichkeiten:

$$\begin{array}{llll} \text{I.} & g_1 = 2, & g_2 = 2, & g_3 = \text{beliebig} = n, \\ \text{II.} & g_1 = 2, & g_2 = 3, & g_3 = 3, \\ \text{III.} & g_1 = 2, & g_2 = 3, & g_3 = 4, \\ \text{IV.} & g_1 = 2, & g_2 = 3, & g_3 = 5. \end{array}$$

Dieselben stellen alle Fälle dar, in denen für eine Gauss'sche Differentialgleichung die unabhängige Variable z eine rationale Function des Integralquotienten ist. Der bereits früher aufgetretene Fall der Dreiecksfunction

$$s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z\right)$$

(vergl. Nr. 277, S. 73), ordnet sich nach Vertauschung von δ_1 mit δ_3 in den Fall I ein. Wir stellen uns die Aufgabe, in allen vier angegebenen Fällen die rationale Function z von η wirklich aufzufinden und die Integration der entsprechenden Gaussschen Differentialgleichung, beziehungsweise der entsprechenden Differentialgleichung (2) der Nr. 268, S. 32

$$(1)\qquad \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{4}\left\{\frac{\delta_1^{\,2}-1}{z^2} + \frac{\delta_2^{\,2}-1}{(1-z)^2} + \frac{\delta_1^{\,2}+\delta_2^{\,2}-\delta_3^{\,2}-1}{z(1-z)}\right\} w,$$

durch explicite Formeln zu vollziehen.

Wir nehmen den Integralquotienten η so, dass der Mittelpunkt η_0 des imaginären Orthogonalkreises O in den Nullpunkt fällt, und dass das Quadrat c des imaginären Radius von O den Werth -1 erhält. Die Gleichung von O lautet dann

$$\eta\bar{\eta} = -1,$$

und die Verschiebungen der Fläche, deren Linienelement durch

$$\frac{2\,|\,d\eta\,|}{\eta\bar{\eta}+1}$$

dargestellt wird, sind nach dem Satze 3 der Nr. 282 (S. 93) von der Form

$$(2)\qquad \eta' = A\eta, \quad \frac{\eta'-\lambda}{\eta'-\mu} = K\,\frac{\eta-\lambda}{\eta-\mu},$$

woselbst

$$(3)\qquad |\,K\,| = 1, \quad \lambda\bar{\mu} = \lambda\mu = -1$$

ist. Wenn

$$\eta = p + qi$$

gesetzt wird, so besteht nach Nr. 284 (S. 98) zwischen p, q und den geodätischen Polarcoordinaten r, φ auf der Fläche vom constanten Krümmungsmaasse

$$\left|\frac{1}{\sqrt{-c}}\right| = 1$$

die Beziehung (vergl. a. a. O. Glgn. (9), (12))

$$(4)\qquad \begin{cases} p = \varrho\cos\varphi, \quad q = \varrho\sin\varphi, \\ \varrho = \operatorname{tg}\frac{r}{2}. \end{cases}$$

Wir können jetzt die Fläche vom constanten Krümmungsmaasse 1 speciell als eine Kugel S vom Radius 1 wählen, dann sind also auf dieser Kugel die Grössen r, φ nichts anderes, wie die Polhöhe und die geographische Länge, und wenn wir demgemäss durch die Formeln

$$\xi_1 = \sin r\cos\varphi,$$
$$\xi_2 = \sin r\sin\varphi,$$
$$\xi_3 = \cos r$$

die rechtwinkeligen Coordinaten eines Punktes dieser Kugel darstellen, so erscheint dieselbe durch Vermittelung der Gleichungen

$$p = \frac{\xi_1}{1+\xi_3}, \quad q = \frac{\xi_2}{1+\xi_3}, \quad \eta = \operatorname{tg}\frac{r}{2}\cdot e^{\varphi i}$$

auf die η-Ebene durch stereographische Projection abgebildet.

Sei $A\eta$ eine Verschiebung, und möge der eine Doppelpunkt

$$\lambda = \operatorname{tg}\frac{r_0}{2}\cdot e^{\varphi_0 i}$$

sein, so hat der andere Doppelpunkt den Werth

$$\mu = -\frac{1}{\bar{\lambda}} = \operatorname{tg}\frac{r_0+\pi}{2}\cdot e^{\varphi_0 i},$$

d. h. die beiden Doppelpunkte entsprechen den beiden Endpunkten eines Durchmessers auf der Kugel S. Die Verschiebung selbst ist nichts anderes, wie eine Drehung der Kugel S um diesen Durchmesser als Axe, und zwar eine Drehung um den Winkel

$$\operatorname{Arg} K.$$

291. Abbildung auf die Kugel. Zusammenhang mit den regulären Körpern.

Denken wir uns die der projectiven Gruppe ϑ entsprechende Theilung der η-Ebene, insbesondere den Fundamentalbereich F_0, auf die Kugel S übertragen, so entspricht dem F_0 ein von geodätischen Linien, d. h. also von grössten Kreisen gebildetes Viereck, welches durch die Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt wird, die jetzt in Bezug auf den diese Diagonale bildenden grössten Kreis im gewöhnlichen Sinne des Wortes symmetrisch sind. Wir bezeichnen die Ecken und Seiten dieser sphärischen Dreiecke durch dieselben Buchstaben, wie die ihnen entsprechenden Punkte und Kreise der η-Ebene und denken uns auch, wie in der η-Ebene, das der unteren z-Halbebene entsprechende Dreieck (das Ausgangsdreieck) schraffirt. Die den übrigen Bereichen der η-Ebene entsprechenden Bereiche auf der Kugel sind dann mit dem dem Fundamentalbereiche F_0 entsprechenden sphärischen Vierecke im gewöhnlichen Sinne congruent und bestehen auch wie dieses aus je zwei symmetrischen sphärischen Dreiecken, die wir uns ebenfalls abwechselnd schraffirt und unschraffirt denken wollen.

Die Kugel S erscheint auf diese Weise mit einem Netze theils schraffirter, theils unschraffirter Dreiecke überzogen, von denen je zwei längs einer Seite benachbarte in Bezug auf den diese Seite bildenden grössten Kreis symmetrisch sind. Diese Dreiecke erfüllen die Oberfläche

der Kugel vollständig und lückenlos und lagern sich schlicht neben einander. Die Winkel eines solchen sphärischen Dreiecks werden durch die Zahlen

$$\frac{\pi}{g_1}, \quad \frac{\pi}{g_2}, \quad \frac{\pi}{g_3}$$

gegeben, die sämmtlichen Dreiecke haben demnach gleichen Flächeninhalt, nämlich

$$J = \frac{\pi}{g_1} + \frac{\pi}{g_2} + \frac{\pi}{g_3} - \pi.$$

Dividiren wir also die Oberfläche 4π der gesammten Kugel durch diesen Flächeninhalt J, so erhalten wir die Anzahl der Dreiecke unserer Theilung, d. h. die doppelte Anzahl der aus F_0 durch die Substitutionen der Gruppe ϑ hervorgehenden Bereiche, also die doppelte Anzahl der Substitutionen von ϑ.

Wenn wir die Anzahl der Substitutionen von ϑ durch ν bezeichnen, so ist demnach

$$2\nu = \frac{4\pi}{\frac{\pi}{g_1} + \frac{\pi}{g_2} + \frac{\pi}{g_3} - \pi} = \frac{4}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_3} - 1},$$

wir finden also in den vier möglichen Fällen

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \nu = 2n, \\ \text{II.} & \nu = 12, \\ \text{III.} & \nu = 24, \\ \text{IV.} & \nu = 60. \end{array}$$

Die Zahl ν giebt allemal zugleich die Anzahl der Zweige der algebraischen Function η von z an.

Von der geometrischen Gestalt der auf der Kugel entstehenden Dreieckstheilung können wir uns nun leicht eine klare Vorstellung bilden.

Im Falle I stehen die Seiten (λ_1, λ_3) und (λ_2, λ_3) des Ausgangsdreiecks auf der Seite (λ_1, λ_2) senkrecht und schneiden sich im Punkte λ_3 unter dem Winkel $\frac{\pi}{n}$; der Punkt λ_3 ist also der Pol des die Seite (λ_1, λ_2) bildenden grössten Kreises, den wir als den Aequator der Kugel auffassen wollen, Durch symmetrische Abbildung in Bezug auf den Aequator entsteht dann das Dreieck $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3')$, welches mit dem Ausgangsdreiecke zusammen den Fundamentalbereich F_0 bildet. Die Ecke λ_3' liegt der Ecke λ_3 diametral gegenüber und ist folglich der zweite Pol des Aequatorkreises. Wir erhalten also die Kugeltheilung in diesem Falle, wenn wir von λ_1 ausgehend den Aequator in $2n$ gleiche Theile theilen und die Theilpunkte mit den beiden Polen λ_3, λ_3' durch

grösste Kreise verbinden. Die Ecken dieser Theilung sind nichts anderes wie die Eckpunkte einer der Kugel eingeschriebenen Doppelpyramide.

Denken wir uns mit Herrn Klein in der Aequatorebene ein dem Aequatorkreise eingeschriebenes regelmässiges n-Eck, dessen eine Ecke in λ_1 liegt, doppelt genommen und diese Doppelfläche als die Begrenzung eines Körpers (vom Rauminhalte Null), des sogenannten Dieders, aufgefasst, so können wir kurz sagen: Die Ebenen der die Seiten unserer Kugeltheilung bildenden grössten Kreise sind die Symmetrieebenen dieses Dieders, und die Substitutionen der Gruppe ϑ sind nichts anderes als Drehungen der Kugel, bei welchen die durch die Diederecken gebildete Punktgruppe in sich selbst übergeht. Bei denselben Drehungen bleibt dann auch die Polarfigur des Dieders, d. h. die Gruppe der beiden Punkte λ_3, λ_3' und ebenso die Gruppe der mit λ_2 correspondirenden Punkte, die als Centralprojectionen der Kantenhalbirungspunkte des Dieders vom Kugelmittelpunkte aus auf die Kugel aufgefasst werden können, ungeändert.

Im Falle II bilden die $\frac{\nu}{g_2} = 4$ mit λ_2 correspondirenden Eckpunkte der Dreieckstheilung die Eckpunkte eines der Kugel eingeschriebenen regelmässigen Tetraeders, die $\frac{\nu}{g_3} = 4$ mit λ_3 correspondirenden Eckpunkte die Ecken des Polar- oder Gegentetraeders, die $\frac{\nu}{g_1} = 6$ mit λ_1 correspondirenden Eckpunkte die Centralprojectionen der Kantenhalbirungspunkte beider Tetraeder auf die Kugel. Die Ebenen der die Seiten der Dreieckstheilung bildenden grössten Kreise sind die Symmetrieebenen der beiden Tetraeder, und den Substitutionen der Gruppe ϑ entsprechen diejenigen Drehungen der Kugel, bei denen die beiden Eckenquadrupel der beiden Tetraeder und die Gruppe der sechs Projectionen der Kantenhalbirungspunkte in sich selbst übergehen.

Im Falle III bilden die $\frac{\nu}{g_3} = 6$ mit λ_3 correspondirenden Ecken der Dreieckstheilung die Eckpunkte eines regelmässigen Oktaeders, die $\frac{\nu}{g_2} = 8$ mit λ_2 correspondirenden Ecken die Eckpunkte seiner Polarfigur, d. i. eines Hexaeders, die $\frac{\nu}{g_1} = 12$ mit λ_1 correspondirenden die Centralprojectionen der Kantenhalbirungspunkte des Oktaeders auf die Kugel. Die Ebenen der die Dreiecksseiten bildenden grössten Kreise sind die Symmetrieebenen des Oktaeders, und den Substitutionen der Gruppe ϑ entsprechen diejenigen Drehungen der Kugel, die die Oktaederecken, die Hexaederecken und die Projectionen der Kantenhalbirungspunkte in sich selbst überführen.

Im Falle IV endlich bilden die $\frac{\nu}{g_3} = 12$ mit λ_3 correspondirenden Ecken der Dreieckstheilung die Ecken eines regelmässigen **Ikosaeders**, die $\frac{\nu}{g_2} = 20$ mit λ_2 correspondirenden Eckpunkte die Ecken seiner Polarfigur, d. i. eines regelmässigen **Dodekaeders**, die $\frac{\nu}{g_1} = 30$ mit λ_1 correspondirenden Eckpunkte die Centralprojectionen der **Kantenhalbirungspunkte** des Ikosaeders auf die Kugel. Die Ebenen der die Seiten der Dreieckstheilung bildenden grössten Kreise sind die Symmetrieebenen des Ikosaeders, und die den Substitutionen der Gruppe ϑ entsprechenden Kugeldrehungen sind genau diejenigen, bei denen die Ikosaederecken, die Dodekaederecken und die Gruppe der Projectionen der Kantenhalbirungspunkte in sich selbst übergeführt werden.

Entsprechend dieser von den Herren **Schwarz** und **Klein** gegebenen Deutung der den vier Fällen der Dreiecksfunctionen dritter Art mit eindeutiger Umkehrungsfunction entsprechenden Kugeltheilungen charakterisirt man diese Fälle wohl auch kurz als die des **Dieders**, **Tetraeders**, **Oktaeders** und **Ikosaeders** und nennt die zugehörige Gruppe ϑ die Dieder-, Tetraeder-, Oktaeder- beziehungsweise Ikosaeder-Gruppe.

292. Analytische Discussion der Dreiecksfunctionen dritter Art. Homogene Formen der Elemente eines Fundamentalsystems.

Wir wenden uns nun zur analytischen Untersuchung der eben geometrisch charakterisirten Dreiecksfunctionen.

Da η eine ν-deutige algebraische Function von z ist, so wird, wenn wir uns die rationale Function z von η in der Form

$$z = \frac{g(\eta)}{h(\eta)} \tag{5}$$

dargestellt denken, wo $g(\eta)$, $h(\eta)$ ganze rationale Functionen ohne gemeinsamen Theiler sind, der Grad dieser ganzen Functionen gleich ν sein.

Die einzigen Verzweigungspunkte der algebraischen Function η von z sind die singulären Stellen

$$z = 0,\ 1,\ \infty$$

der Differentialgleichung (1); in der Umgebung derselben ist η beziehungsweise nach ganzen Potenzen von

$$z^{\frac{1}{g_1}},\quad (z-1)^{\frac{1}{g_2}},\quad \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{g_3}}$$

entwickelbar. Bezeichnen wir durch

$$A_1 = 1, \quad A_2, \quad A_3, \cdots A_\nu$$

die sämmtlichen Substitutionen der Gruppe ϑ, so gehören zu einem regulären z-Werthe die ν von einander verschiedenen Werthe

$$\eta, \quad A_2\eta, \quad A_3\eta, \cdots A_\nu\eta$$

von η; dagegen fallen von diesen ν Werthen für $z = 0$ je g_1, für $z = 1$ je g_2 und für $z = \infty$ je g_3 zusammen.

Nun ist aber

$$\text{für } z = 0, \quad g(\eta) = 0,$$
$$\text{für } z = 1, \quad g(\eta) - h(\eta) = 0,$$
$$\text{für } z = \infty, \quad h(\eta) = 0,$$

es muss folglich

$$(6) \quad g(\eta) = [f_1(\eta)]^{g_1}, \quad g(\eta) - h(\eta) = [f_2(\eta)]^{g_2}, \quad h(\eta) = [f_3(\eta)]^{g_3}$$

sein, wo $f_1(\eta)$, $f_2(\eta)$, $f_3(\eta)$ ganze rationale Functionen von η sind, die lauter einfache lineare Factoren enthalten. Zwischen diesen drei ganzen Functionen besteht die Beziehung

$$(7) \quad [f_1(\eta)]^{g_1} - [f_2(\eta)]^{g_2} - [f_3(\eta)]^{g_3} = 0.$$

Bezeichnen wir mit ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 die Grade der ganzen Functionen f_1, f_2, f_3, so ist

$$\varrho_1 = \frac{\nu}{g_1} = \frac{\nu}{2}, \quad \varrho_2 = \frac{\nu}{g_2}, \quad \varrho_3 = \frac{\nu}{g_3},$$

wir haben also in unseren vier Fällen für diese drei Zahlen die Werthe:

$$\text{I.} \quad \varrho_1 = n, \quad \varrho_2 = n, \quad \varrho_3 = 2,$$
$$\text{II.} \quad \varrho_1 = 6, \quad \varrho_2 = 4, \quad \varrho_3 = 4,$$
$$\text{III.} \quad \varrho_1 = 12, \quad \varrho_2 = 8, \quad \varrho_3 = 6,$$
$$\text{IV.} \quad \varrho_1 = 30, \quad \varrho_2 = 20, \quad \varrho_3 = 12.$$

Da für $z = 0$, 1, ∞ der Ausgangszweig η die Werthe λ_1, λ_2, λ_3 an nimmt, ist

$$[f_1(\eta)]^{g_1} = c_1 \prod_{\varkappa=1}^{\nu} (\eta - A_\varkappa \lambda_1), \quad [f_2(\eta)]^{g_2} = c_2 \prod_{\varkappa=1}^{\nu} (\eta - A_\varkappa \lambda_2),$$

$$[f_3(\eta)]^{g_3} = c_3 \prod_{\varkappa=1}^{\nu} (\eta - A_\varkappa \lambda_3),$$

wo die c_1, c_2, c_3 Constanten bedeuten.

In der Umgebung von $z = 0$ ist $\eta - \lambda_1$ in der Form

$$\eta - \lambda_1 = \alpha_1 z^{\frac{1}{g_1}} + \alpha_2 z^{\frac{1}{g_1}+1} + \cdots, \quad \alpha_1 \gtrless 0,$$

dargestellt; durch Umkehrung dieser Entwickelung ergiebt sich

$$z = \beta_1(\eta - \lambda_1)^{g_1} + \beta_2(\eta - \lambda_1)^{g_1+1} + \cdots, \quad \beta_1 = \frac{1}{\alpha_1},$$

und hieraus folgt

$$(8) \qquad \frac{dz}{d\eta} = \beta_1 g_1 (\eta - \lambda_1)^{g_1 - 1} + \beta_2(g_1 + 1)(\eta - \lambda_1)^{g_1} + \cdots.$$

Analog ist in der Umgebung von $\eta = \lambda_2$

$$(9) \qquad \frac{dz}{d\eta} = \gamma_1 g_2 (\eta - \lambda_2)^{g_2 - 1} + \gamma_2(g_2 + 1)(\eta - \lambda_2)^{g_2} + \cdots,$$

und in der Umgebung von $\eta = \lambda_3$

$$(10) \qquad -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{d\eta} = \varepsilon_1 g_3 (\eta - \lambda_3)^{g_3 - 1} + \varepsilon_2(g_3 + 1)(\eta - \lambda_3)^{g_3} + \cdots.$$

Aehnliche Entwickelungen gelten in der Umgebung der mit λ_1, λ_2, λ_3 correspondirenden η-Werthe.

Hieraus schliessen wir, dass die ganze Function $(2\nu - 1)^{\text{ten}}$ Grades

$$h(\eta)g'(\eta) - h'(\eta)g(\eta)$$

für die mit λ_1 correspondirenden Punkte, d. h. für die Wurzeln der Gleichung

$$f_1(\eta) = 0,$$

von der Ordnung $g_1 - 1$, für die mit λ_2 correspondirenden Punkte, d. h. für die Wurzeln der Gleichung

$$f_2(\eta) = 0,$$

von der Ordnung $g_2 - 1$, für die mit λ_3 correspondirenden Punkte, d. h. für die Wurzeln der Gleichung

$$f_3(\eta) = 0,$$

von der Ordnung $g_3 - 1$ verschwinden muss. Bei geeigneter Wahl der Constanten c_1, c_2, c_3 ist demnach

$$(11) \qquad h(\eta)g'(\eta) - g(\eta)h'(\eta) = [f_1(\eta)]^{g_1 - 1}[f_2(\eta)]^{g_2 - 1}[f_3(\eta)]^{g_3 - 1}.$$

Für die folgenden Untersuchungen ist es zweckmässig, die hier auftretenden ganzen rationalen Functionen von η durch Multiplication mit geeigneten Factoren in homogene Functionen von zwei Grössen umzuwandeln. Zu dem Ende führen wir die beiden Lösungen

$$(12) \qquad w_1 = \sqrt{\frac{dz}{d\eta}}, \quad w_2 = \eta\sqrt{\frac{dz}{d\eta}}$$

der Differentialgleichung (1) ein, als deren Quotient

$$\frac{w_2}{w_1} = \eta$$

unser Integralquotient η erscheint.

Setzen wir dann

(13) $$w_1^{\nu}\, g(\eta) = G(w_1, w_2), \quad w_1^{\nu} h(\eta) = H(w_1, w_2),$$

(14) $$\begin{cases} w_1^{\varrho_1} f_1(\eta) = F_1(w_1, w_2), \quad w_1^{\varrho_2} f_2(\eta) = F_2(w_1, w_2), \\ w_1^{\varrho_3} f_3(\eta) = F_3(w_1, w_2), \end{cases}$$

so ergeben sich aus den Gleichungen (6) und (7)

(15) $$\begin{cases} G(w_1, w_2) = F_1^{g_1}(w_1, w_2), \quad H(w_1, w_2) = F_3^{g_3}(w_1, w_2), \\ G(w_1, w_2) - H(w_1, w_2) = F_2^{g_2}(w_1, w_2), \end{cases}$$

(16) $$F_1^{g_1}(w_1, w_2) - F_2^{g_2}(w_1, w_2) - F_3^{g_3}(w_1, w_2) = 0.$$

Die Discussion der Gleichung (16), die eine identische Beziehung zwischen drei binären Formen der w_1, w_2 darstellt, reicht, wie Halphén gezeigt hat, zur vollständigen Bestimmung der möglichen Gestalten dieser Formen aus. Wir wollen aber zur Herstellung der F_1, F_2, F_3 den Weg einschlagen, den Herr Fuchs ursprünglich bei analogen Fragen von grösserer Allgemeinheit angegeben hat und der zu mannigfachen Eigenschaften dieser Formen führen wird.

293. Reducirtes Werthesystem eines Integrals. Begriff der Primformen.

Sei u ein beliebiger regulärer Werth von z, und betrachten wir die Form

(17) $$G(w_1, w_2) - uH(w_1, w_2) = F(w_1, w_2),$$

so lässt sich dieselbe in der Gestalt

$$F(w_1, w_2) = w_1^{\nu}[g(\eta) - uh(\eta)]$$

schreiben. Die Wurzeln der Gleichung

$$g(\eta) - uh(\eta) = 0$$

sind offenbar nichts anderes, wie die η-Werthe, die dem Werthe $z = u$ entsprechen, d. h. also die Ausdrücke

$$\eta(u), \quad A_2\eta(u), \quad A_3\eta(u), \cdots A_{\nu}\eta(u).$$

Wir haben folglich

$$F(w_1, w_2) = c w_1^{\nu} \prod_{\varkappa=1}^{\nu} [\eta(z) - A_{\varkappa}\eta(u)],$$

wo c eine Constante bedeutet.

Setzen wir

$$A_\varkappa \eta = \frac{d_\varkappa \eta + c_\varkappa}{b_\varkappa \eta + a_\varkappa}, \qquad a_\varkappa d_\varkappa - b_\varkappa c_\varkappa = 1,$$
$$(\varkappa = 1, 2, \cdots \nu)$$

so verwandelt der Umlauf von z, durch welchen η in $A_\varkappa \eta$ übergeht, die Integrale w_1, w_2 in

$$\Theta_\varkappa w_1 = \pm (a_\varkappa w_1 + b_\varkappa w_2),$$
$$\Theta_\varkappa w_2 = \pm (c_\varkappa w_1 + d_\varkappa w_2).$$

Wir erhalten demnach

$$F(w_1, w_2) = \frac{c}{\prod\limits_{\varkappa=1}^{\nu} (b_\varkappa \eta(u) + a_\varkappa)} \prod_{\varkappa=1}^{\nu} [\eta(u)(-d_\varkappa w_1 + b_\varkappa w_2) - (c_\varkappa w_1 - a_\varkappa w_2)].$$

Nun ist aber

$$\begin{pmatrix} a_\varkappa & b_\varkappa \\ c_\varkappa & d_\varkappa \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -d_\varkappa & b_\varkappa \\ c_\varkappa & -a_\varkappa \end{pmatrix},$$

und da die Gesammtheit der Substitutionen $A_\varkappa^{-1}$ mit der Gesammtheit der Substitutionen $A_\varkappa$ identisch ist, so können wir auch schreiben

$$F(w_1, w_2) = \frac{c}{\prod\limits_{\varkappa=1}^{\nu} (b_\varkappa \eta(u) + a_\varkappa)} \prod_{\varkappa=1}^{\nu} [(a_\varkappa w_1 + b_\varkappa w_2)\eta(u) - (c_\varkappa w_1 + d_\varkappa w_2)].$$

Da u ein willkürlicher fester Werth von z sein sollte, so können wir auch $\eta(u)$ als eine willkürliche Constante, also auch die Werthe der Integrale w_1, w_2 im Punkte u

$$w_1(u) = \gamma_2, \quad w_2(u) = -\gamma_1$$

als willkürliche Constanten ansehen. Setzen wir ferner

$$\frac{c}{\gamma_2^{\nu} \prod\limits_{\varkappa=1}^{\nu} (b_\varkappa \eta(u) + a_\varkappa)} = C,$$

so ist auch C eine Constante, und wir erhalten

$$(18) \qquad F(w_1, w_2) = C \prod_{\varkappa=1}^{\nu} [\gamma_1 (a_\varkappa w_1 + b_\varkappa w_2) + \gamma_2 (c_\varkappa w_1 + d_\varkappa w_2)].$$

Der Ausdruck

$$\gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 = w$$

ist nichts anderes wie das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1); die Gesammtheit aller Zweige von w, die durch alle möglichen Umläufe

der unabhängigen Variabeln z zum Vorschein kommen können, ist in der Formel

$$\pm [\gamma_1(a_\varkappa w_1 + b_\varkappa w_2) + \gamma_2(c_\varkappa w_1 + d_\varkappa w_2)]$$

enthalten. Für unbestimmtes u kann es sich nicht ereignen, dass der Quotient

$$\frac{\gamma_1(a_\varkappa w_1 + b_\varkappa w_2) + \gamma_2(c_\varkappa w_1 + d_\varkappa w_2)}{\gamma_1(a_i w_1 + b_i w_2) + \gamma_2(c_i w_1 + d_i w_2)} \qquad (i \neq \varkappa)$$

einen von z unabhängigen Werth erhält, da sonst zwei lineare Factoren der ganzen Function

$$g(\eta) - u\,h(\eta)$$

identisch sein müssten, was wegen der Irreductibilität der Gleichung

$$g(\eta) - z\,h(\eta) = 0$$

nicht möglich ist.

Dagegen ist für $u = 0$

$$F(w_1, w_2) = F_1^{g_1}(w_1, w_2),$$

d. h. wenn wir

$$w_1(0) = \mathfrak{a}_2, \quad w_2(0) = -\mathfrak{a}_1$$

setzen, so erhalten wir in

$$\mathfrak{w}_1 = \mathfrak{a}_1 w_1 + \mathfrak{a}_2 w_2$$

ein Integral von (1), welches so beschaffen ist, dass von den ν Zweigen

$$\mathfrak{a}_1(a_\varkappa w_1 + b_\varkappa w_2) + \mathfrak{a}_2(c_\varkappa w_1 + d_\varkappa w_2) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \nu)$$

je g_1 sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden.

Setzen wir analog

$$w_1(1) = \mathfrak{b}_2, \quad w_2(1) = -\mathfrak{b}_1,$$
$$w_1(\infty) = \mathfrak{c}_2, \quad w_2(\infty) = -\mathfrak{c}_1,$$

so hat das Integral

$$\mathfrak{w}_2 = \mathfrak{b}_1 w_1 + \mathfrak{b}_2 w_2$$

nur ϱ_2 Zweige, die nicht durch Multiplication mit constanten Factoren aus einander hervorgehen, und das Integral

$$\mathfrak{w}_3 = \mathfrak{c}_1 w_1 + \mathfrak{c}_2 w_2$$

nur ϱ_3 Zweige von dieser Beschaffenheit.

Wir bezeichnen mit Herrn Fuchs ein System von Zweigen eines Integrals w, in welchem keine zwei Zweige enthalten sind, die einen von z unabhängigen Quotienten haben, als ein reducirtes Werthesystem dieses Integrals. Die eben angestellten Betrachtungen liefern dann den Satz:

Für unbestimmte γ_1, γ_2 besteht ein reducirtes Werthesystem des Integrals

$$\gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2$$

aus ν Zweigen, und es giebt (abgesehen von constanten Factoren) nur drei Integrale, deren reducirte Werthesysteme weniger wie ν Zweige enthalten. Es sind dies nämlich die Integrale

$$\mathfrak{w}_1, \quad \mathfrak{w}_2, \quad \mathfrak{w}_3,$$

deren reducirte Werthesysteme beziehungsweise aus ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 Zweigen bestehen.

Bezeichnen wir durch

$$\mathfrak{w}^{(1)}, \quad \mathfrak{w}^{(2)}, \cdots \mathfrak{w}^{(\mu)}$$

ein reducirtes Werthesystem des Integrals

$$\mathfrak{w} = \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2,$$

so ist das Product

$$\text{const.}\, \mathfrak{w}^{(1)} \mathfrak{w}^{(2)} \cdots \mathfrak{w}^{(\mu)} = \mathfrak{F}(w_1, w_2)$$

eine homogene ganze Function μ-ten Grades von w_1, w_2. Diese Form $\mathfrak{F}$ hat die Eigenschaft, dass sie sich nur mit einem constanten Factor multiplicirt, wenn z irgend welche geschlossene Wege beschreibt. Die logarithmische Ableitung von $\mathfrak{F}$ ist demnach eine eindeutige Function, und zwar, da die Differentialgleichung (1) zur Fuchs'schen Classe gehört, eine rationale Function von z. Da aber $\mathfrak{F}$ eine algebraische Function von z sein muss, so schliessen wir:

Die Form $\mathfrak{F}$ ist gleich der Wurzel aus einer rationalen Function von z.

Nun ist $F(w_1, w_2)$ das Product der Elemente eines reducirten Werthesystems des allgemeinen Integrals w, die Formen

$$F_1(w_1, w_2), \quad F_2(w_1, w_2), \quad F_3(w_1, w_2)$$

sind beziehungsweise die Producte der Elemente je eines reducirten Werthesystems der Integrale $\mathfrak{w}_1$, $\mathfrak{w}_2$, $\mathfrak{w}_3$; wir können also sagen:

Die Formen

(19) $$F(w_1, w_2), \quad F_1(w_1, w_2), \quad F_2(w_1, w_2), \quad F_3(w_1, w_2)$$

sind Wurzeln aus rationalen Functionen von z.

Eine Form $\mathfrak{F}(w_1, w_2)$, die gleich dem Producte der Elemente eines reducirten Werthesystems eines Integrals der Differentialgleichung (1) ist, nennen wir nach Herrn Fuchs eine Primform. Abgesehen von einem constanten Factor stellen uns die Formen (19) alle möglichen Primformen dar, und zwar enthält die Primform ν-ten Grades $F(w_1, w_2)$ noch den willkürlichen Parameter u, während die Primformen niedrigeren als ν-ten Grades F_1, F_2, F_3 vollkommen bestimmt sind.

294. Invariante Formen. Neue Definition der Primformen. Sätze von Fuchs.

Betrachten wir allgemeiner eine homogene ganze Function von w_1, w_2, die gleich der Wurzel aus einer rationalen Function von z ist, so nennen wir eine solche Function (vergl. Nr. 195, Bd. II, 1, S. 250), eine invariante Form der w_1, w_2. Sei

$$M(w_1, w_2) = w_1^r m(\eta) = R(z) \tag{20}$$

eine so beschaffene Form vom Grade r, also $m(\eta)$ eine ganze Function r-ten Grades von η, $R(z)$ die Wurzel aus einer rationalen Function von z. Da $m(\eta)$ für keinen endlichen Werth von η unendlich wird, kann $R(z)$ nur so unendlich werden, wie w_1^r. Nun ist aber bei geeigneter Wahl von η das Integral w_1 für jeden regulären Werth von z endlich und von Null verschieden. Da ferner

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{g_\varkappa}\right), \quad \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{g_\varkappa}\right)$$

für $\varkappa = 1, 2$ die Wurzeln der zu $z = 0$ und $z = 1$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen,

$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{g_3}\right), \quad -\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{g_3}\right)$$

die Wurzeln der zu $z = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung sind, so verschwindet w_1

für $z = 0$ von der Ordnung $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_1}\right)$,

für $z = 1$ von der Ordnung $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_2}\right)$

und wird

für $z = \infty$ von der Ordnung $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{g_3}\right)$

unendlich gross. Wenn wir also, wie üblich, die Unendlichkeitsstelle $z = \infty$ als Nullstelle von negativer Ordnung auffassen, so ist die Gesammtzahl der Nullstellen erster Ordnung von w_1 gleich

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_3} = \frac{-1}{\nu}. \tag{21}$$

Die Function $R(z)$ hat demnach die Gestalt

$$R(z) = z^{r\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{g_1}\right)} (z-1)^{r\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{g_2}\right)} \Gamma(z), \tag{22}$$

wo Γ die Wurzel aus einer ganzen Function von z bedeutet, deren

Dimension in z gleich $\frac{r}{\nu}$ sein muss, damit $R(z)$ für $z = \infty$ von derselben Ordnung unendlich werde, wie w_1^r. Setzen wir

$$\Gamma(z) = \prod_{\varkappa=1}^{\lambda} (z - c_\varkappa)^{\mu_\varkappa}, \tag{23}$$

wo die $c_1, c_2, \cdots c_\lambda$ sämmtlich von einander verschieden und die $\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_\lambda$ positive rationale Zahlen sind, so ist also

$$\sum_{\varkappa=1}^{\lambda} \mu_\varkappa = \frac{r}{\nu}. \tag{24}$$

Sei $\gamma_\varkappa$ derjenige innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 gelegene η-Werth, für welchen z den Werth $c_\varkappa$ annimmt, dann wird die Function

$$m(\eta) = w_1^{-r} R(z)$$

für $\gamma_\varkappa$ und die aus $\gamma_\varkappa$ durch die Substitutionen der Gruppe ϑ hervorgehenden Werthe

$$A_2 \gamma_\varkappa, \quad A_3 \gamma_\varkappa, \cdots A_\nu \gamma_\varkappa$$

verschwinden, und zwar wenn $c_\varkappa$ ein regulärer Punkt ist, von der Ordnung $\mu_\varkappa$, wenn $c_\varkappa = 0$ ist, von der Ordnung $\mu_\varkappa g_1$, und wenn $c_\varkappa = 1$ ist, von der Ordnung $\mu_\varkappa g_2$. Da aber $m(\eta)$ eine ganze rationale Function von η sein sollte, so folgt hieraus:

Für einen regulären Werth $c_\varkappa$ ist $\mu_\varkappa$ eine ganze Zahl, für $c_\varkappa = 0$ beziehungsweise $c_\varkappa = 1$ ist $\mu_\varkappa$ ein ganzzahliges Vielfaches von

$$\frac{1}{g_1} \text{ beziehungsweise } \frac{1}{g_2}.$$

Wenn umgekehrt diese Bedingungen für die Exponenten $\mu_\varkappa$ eines Ausdruckes von der Form (23) erfüllt sind, so ist das Product

$$w_1^{-r} R(z),$$

wo $R(z)$ durch die Gleichung (22) und r als ganze Zahl durch die Gleichung (24) bestimmt ist, eine in der Umgebung jeder Stelle η eindeutige, also unverzweigte Function von η; dieses Product ist folglich eine ganze Function von η, und der Ausdruck $R(z)$ stellt demnach eine invariante Form von w_1, w_2 vom Grade r dar.

Hierdurch ist die allgemeine Gestalt einer invarianten Form als Function von z vollkommen bestimmt.

Wenn eine invariante Form nur an einer Stelle des Fundamentalbereiches F_0 von der ersten Ordnung verschwindet, so ist dieselbe offenbar eine Primform. Wir können also für die Primformen auch die folgende Definition aufstellen:

Eine invariante Form $M(w_1, w_2)$ ist eine Primform, wenn das zu derselben gehörige $m(\eta)$ nur an einer Stelle des Fundamentalbereiches und an den sämmtlichen correspondirenden Stellen von der ersten Ordnung verschwindet.

Eine Primform ist demnach durch Angabe ihrer Nullstelle innerhalb des Fundamentalbereiches F_0, abgesehen von einem constanten Factor, vollkommen bestimmt. Wenn diese Nullstelle $\eta = \gamma$ keine Ecke von F_0 ist, so ist die betreffende Primform

$$F_\gamma(w_1, w_2) = G(w_1, w_2) - uH(w_1, w_2) = w_1^\nu f_\gamma(\eta),$$

wo u den zu $\eta = \gamma$ gehörigen Werth von z bedeutet; sie ist also vom ν-ten Grade und hat als Function von z die Gestalt:

$$(25)\qquad F_\gamma(w_1, w_2) = (z-u)\, z^{\nu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{g_1}\right)} (z-1)^{\nu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{g_2}\right)}.$$

Die für $\eta = \lambda_1$ verschwindende Primform F_1 ist vom Grade ϱ_1 und hat die Gestalt:

$$(26)\qquad F_1(w_1, w_2) = z^{\frac{1}{g_1}+\varrho_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{g_1}\right)} (z-1)^{\varrho_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{g_2}\right)},$$

ebenso lautet die für $\eta = \lambda_2$ verschwindende Primform

$$(27)\qquad F_2(w_1, w_2) = (z-1)^{\frac{1}{g_2}+\varrho_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{g_2}\right)} z^{\varrho_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{g_1}\right)},$$

und die für $\eta = \lambda_3$ verschwindende Primform ist

$$(28)\qquad F_3(w_1, w_2) = z^{\varrho_3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{g_1}\right)} (z-1)^{\varrho_3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{g_2}\right)};$$

Aus dieser Darstellung ergiebt sich der Satz:

Jede invariante Form ist als ein Product von Primformen darstellbar.

Dieser Satz ist aber auch eine unmittelbare Folge aus der Definition einer invarianten Form. Wenn nämlich die invariante Form $M(w_1, w_2)$ einen linearen Factor

$$\gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2$$

enthält, so muss sie, da sie sich als Wurzel aus einer rationalen Function bei jedem Umlaufe von z nur mit einer Constanten multipliciren kann, die sämmtlichen Elemente eines reducirten Werthesystems des Integrals $\gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2$ ebenfalls als Factoren enthalten. Da ferner auch alle Elemente eines reducirten Werthesystems eines Integrals in M zur selben Potenz erhoben auftreten müssen, so folgt hieraus in der That, dass M nur ein Product von Primformen sein kann.

Aus diesem von Herrn Fuchs herrührenden Satze ergeben sich die folgenden Consequenzen.

1) **Wenn eine invariante Form von niedrigerem als dem ν-ten Grade ist, so kann ihr Grad nicht kleiner sein als die kleinste der Zahlen ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3,** d. h. **nicht kleiner als ϱ_3. Ist derselbe gleich ϱ_3, so ist die invariante Form die Primform $F_3(w_1, w_2)$.**

2) **Ergiebt sich für eine invariante Form, dass ihr Grad kleiner ist wie ϱ_3, so verschwindet diese Form identisch.**

Wenn eine Form $M(w_1, w_2)$ eine invariante Form ist, so gilt, wie Herr Fuchs bemerkt hat, das Gleiche für jede Covariante dieser Form.

In der That multiplicirt sich $M(w_1, w_2)$ als invariante Form mit einem constanten Factor, wenn wir auf w_1, w_2 eine Substitution der Transformationsgruppe der Differentialgleichung (1) anwenden. Eine Covariante von $M(w_1, w_2)$ wird also (vergl. Nr. 191, Bd. II, 1, S. 228) bei Anwendung einer solchen Substitution auf die w_1, w_2 ebenfalls in sich selbst multiplicirt mit einer Constanten übergehen. Also ist die logarithmische Ableitung einer solchen Covariante nach z eine bei den Substitutionen der Transformationsgruppe unveränderliche rationale Differentialfunction von w_1, w_2 und demnach eine rationale Function von z. Da ferner die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen von (1) rationale Zahlen sind, so ergiebt sich ohne Weiteres, dass die Covariante nur eine Potenz mit rationalem Exponenten von einer rationalen Function von z sein kann.

Hieraus folgt mit Rücksicht auf 2) der Satz:

3) **Für die Primform niedrigsten Grades F_3 muss jede Covariante, die von niedrigerem Grade ist wie die Form selbst, identisch verschwinden.**

295. Gestalt der Primformen. Covarianten von Primformen. Hülfssatz von Fuchs.

Auf Grund der in der vorigen Nummer entwickelten Sätze können wir nun nach dem Vorgange von Herrn Fuchs die Gestalt der Primformen F_1, F_2, F_3 wirklich angeben.

Wir entwickeln zunächst einige einfache Beziehungen, die zwischen diesen drei Primformen und der Primform ν-ten Grades F_γ bestehen.

Setzt man die Werthe

$$(29) \qquad z = \frac{f_1^{g_1}}{f_3^{g_3}}, \qquad z - 1 = \frac{f_2^{g_2}}{f_3^{g_3}}$$

in die Gleichung (28) ein und beachtet, dass

$$F_3(w_1, w_2) = w_1^{\varrho_3} f_3(\eta) = \left(\frac{dz}{d\eta}\right)^{\frac{\nu}{2 g_3}} f_3(\eta)$$

ist, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichung (21)

$$\frac{dz}{d\eta} = \frac{f_1^{g_1-1} f_2^{g_2-1}}{f_3^{g_3+1}}. \tag{30}$$

Andererseits folgen durch directe Differentiation der Gleichungen (29) und der Gleichung

$$z - u = \frac{f_\gamma(\eta)}{f_3^{g_3}(\eta)}$$

die Gleichungen

$$(31)\quad \begin{cases} \dfrac{dz}{d\eta} = \dfrac{f_1^{g_1-1}(g_1 f_3 f_1' - g_3 f_1 f_3')}{f_3^{g_3+1}} = \dfrac{f_2^{g_2-1}(g_2 f_3 f_2' - g_3 f_2 f_3')}{f_3^{g_3+1}}, \\[2ex] \dfrac{dz}{d\eta} = \dfrac{f_3 f_\gamma' - g_3 f_\gamma f_3'}{f_3^{g_3+1}}. \end{cases}$$

Berücksichtigt man die Homogenitätsgleichungen

$$\varrho_\varkappa F_\varkappa(w_1, w_2) = \frac{\nu}{g_\varkappa} w_1^{\frac{\nu}{g_\varkappa}} f_\varkappa(\eta) = w_1 \frac{\partial F_\varkappa}{\partial w_1} + w_2 \frac{\partial F_\varkappa}{\partial w_2} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3),$$

$$\nu F_\gamma(w_1, w_2) = \nu w_1^{\nu} f_\gamma(\eta) = w_1 \frac{\partial F_\gamma}{\partial w_1} + w_2 \frac{\partial F_\gamma}{\partial w_2},$$

so erhält man durch Vergleichung von (30) und (31) die Relationen

$$(32)\quad \begin{cases} \dfrac{g_1 g_3}{\nu}(F_3, F_1) = F_2^{g_2-1}, \\[2ex] \dfrac{g_2 g_3}{\nu}(F_3, F_2) = F_1^{g_1-1}, \\[2ex] \dfrac{g_3}{\nu}(F_3, F_\gamma) = F_1^{g_1-1} F_2^{g_2-1}, \end{cases}$$

wo durch das Symbol (φ, ψ) die Functionaldeterminante

$$(\varphi, \psi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial w_1} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial w_2} \\[2ex] \dfrac{\partial \psi}{\partial w_1} & \dfrac{\partial \psi}{\partial w_2} \end{vmatrix}$$

der beiden Formen φ, ψ bezeichnet wurde.

Im Falle des Dieders ist $\varrho_3 = 2$, in den drei anderen Fällen dagegen haben wir

$$\varrho_3 = 4,\ 6,\ 12 > 2.$$

Bilden wir also die Hesse'sche Covariante

$$H(w_1, w_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F_3}{\partial w_1^2} & \frac{\partial^2 F_3}{\partial w_1 \partial w_2} \\ \frac{\partial^2 F_3}{\partial w_1 \partial w_2} & \frac{\partial^2 F_3}{\partial w_2^2} \end{vmatrix}$$

der Form F_3, so ist diese vom Grade $2\varrho_3 - 4$, also keine Constante, wenn wir jetzt den Fall des Dieders bei Seite lassen.

Wenn die Hesse'sche Covariante einer binären Form identisch verschwindet, so ist die Form eine Potenz eines linearen Factors, also ist die Form $H(w_1, w_2)$ nicht identisch Null, sie ist folglich gleich der Wurzel aus einer rationalen Function von s. Die Form $H(w_1, w_2)$ ist aber auch eine Primform; denn wäre dies nicht der Fall, so müsste $H(w_1, w_2)$ das Product von mindestens zwei Primformen sein, von denen also die eine von niedrigerem als dem ϱ_2^{ten} Grade sein müsste, was nicht möglich ist. Nun haben wir

$$\begin{aligned} &\text{für das Tetraeder} \quad 2\varrho_3 - 4 = 4, \\ &\text{für das Oktaeder} \quad 2\varrho_3 - 4 = 8, \\ &\text{für das Ikosaeder} \quad 2\varrho_3 - 4 = 20, \end{aligned}$$

d. h. der Grad von $H(w_1, w_2)$ stimmt mit ϱ_2 überein, also kann sich H von der Primform F_2 nur durch einen constanten Factor unterscheiden.

Wir haben also mit Rücksicht auf die zweite der Gleichungen (32) den Satz:

4) Für die Fälle des Tetraeders, Oktaeders und Ikosaeders stimmt die Primform F_2 mit der Hesse'schen Covariante von F_3 und die Primform F_1 mit der Functionaldeterminante von F_3 und dessen Hesse'scher Covariante, abgesehen von einem constanten Factor, überein.

Betrachten wir nun ein Integral $\mathfrak{w}$ der Differentialgleichung (1), dessen reducirtes Werthesystem aus weniger wie ν Gliedern besteht. Sei

$$\mathfrak{w}^{(1)}, \quad \mathfrak{w}^{(2)}, \cdots \mathfrak{w}^{(\varrho)}$$

dieses reducirte Werthesystem, dann ist die Anzahl ϱ seiner Elemente offenbar ein Theiler von ν; wir setzen

$$\frac{\nu}{\varrho} = g.$$

Das Integral $\mathfrak{w}$ genügt einer irreductiblen algebraischen Gleichung vom Grade 2ν und mit in s rationalen Coefficienten; sei diese Gleichung

(33) $$\Phi(\mathfrak{w}) = 0.$$

Bedeutet dann

$$j = e^{\frac{2\pi i}{2g}}$$

irgend eine primitive $(2g)^{te}$ Einheitswurzel, so ist nach einfachen algebraischen Sätzen die Gesammtheit der Wurzeln der Gleichung (33) durch die Grössen

$$\mathfrak{w}^{(\varkappa)}, \quad j\mathfrak{w}^{(\varkappa)}, \quad j^2\mathfrak{w}^{(\varkappa)}, \cdots j^{2g-1}\mathfrak{w}^{(\varkappa)}$$
$$(\varkappa = 1, 2, \cdots \varrho)$$

dargestellt. Herr Fuchs nennt demgemäss die Zahl $2g$ den Index des reducirten Werthesystems oder reducirten Wurzelsystems

$$\mathfrak{w}^{(1)}, \quad \mathfrak{w}^{(2)}, \cdots \mathfrak{w}^{(\varrho)}.$$

Hieraus folgt, dass die symmetrischen Functionen der Grössen

$$(\mathfrak{w}^{(1)})^{2g}, \quad (\mathfrak{w}^{(2)})^{2g}, \cdots (\mathfrak{w}^{(\varrho)})^{2g}$$

rationale Functionen von z sind; die Gleichung (33) hat demnach die Gestalt

$$(33\text{a}) \quad \Phi(\mathfrak{w}) = (\mathfrak{w}^{2g})^\varrho + \varphi_1(z)(\mathfrak{w}^{2g})^{\varrho-1} + \cdots + \varphi_{\varrho-1}(z)\mathfrak{w}^{2g} + \varphi_\varrho(z) = 0,$$

wo $\varphi_1(z), \cdots \varphi_{\varrho-1}(z), \varphi_\varrho(z)$ rationale Functionen von z bedeuten.

Sei $\bar{\mathfrak{w}}$ irgend ein Element des reducirten Werthesystems von $\mathfrak{w}$, dann giebt es wegen der Irreductibilität der Gleichung (33) und zufolge des Puiseux'schen Satzes einen Umlauf $\mathfrak{U}$ von z, durch welchen $\bar{\mathfrak{w}}$ in die Wurzel $j\bar{\mathfrak{w}}$ übergeht. Zufolge unserer Voraussetzung $\varrho < \nu$ ist $g > 1$, also ist j nicht gleich ± 1. Wir beweisen nun mit Herrn Fuchs, dass es nothwendig auch ein Integral $\bar{w}$ der Differentialgleichung (1) geben muss, welches durch den Umlauf $\mathfrak{U}$ von z in $j^{-1}\bar{w}$ verwandelt wird.

Sei w ein willkürliches Integral der Differentialgleichung (1), und setzen wir

$$\frac{w}{\bar{\mathfrak{w}}} = \zeta,$$

so ist

$$\bar{\mathfrak{w}} = \sqrt{\frac{dz}{d\zeta}},$$

also haben wir

$$\zeta = \frac{w}{\bar{\mathfrak{w}}} = \int \frac{dz}{\bar{\mathfrak{w}}^2}.$$

Nun ist $\bar{\mathfrak{w}}^2$ eine algebraische Function von z, ebenso ist auch ζ eine algebraische Function von z; wenn aber das Integral einer algebraischen Function selbst algebraisch ist, so muss nach einem bekannten Satze von Abel das Integral gleich einer rationalen Function des Integranden und der Integrationsvariabeln sein. Es ist folglich w eine rationale

Function von $\mathfrak{w}$ und z, die wir, da $\mathfrak{w}$ der Gleichung $(2\nu)^{\text{ten}}$ Grades (33) Genüge leistet, in der Form

$$w = c_0 + c_1 \mathfrak{w} + \cdots + c_{2\nu-1} \mathfrak{w}^{2\nu-1} = \varphi(\mathfrak{w})$$

darstellen können, wo die $c_0, c_1, \cdots c_{2\nu-1}$ rationale Functionen von z bedeuten.

Bei dem Umlaufe $\mathfrak{U}$ von z, der $\mathfrak{w}$ in $j\mathfrak{w}$ überführt, wird das Integral w in

$$\varphi(j\mathfrak{w})$$

verwandelt. Da dieser Ausdruck selbst wieder ein Integral von (1) sein muss, ist derselbe in der Form

$$\varphi(j\mathfrak{w}) = \alpha\mathfrak{w} + \beta\varphi(\mathfrak{w})$$

darstellbar, wo α, β Constanten bedeuten. Das Fundamentalsystem w, $\mathfrak{w}$ erleidet also beim Umlaufe $\mathfrak{U}$ von z die Substitution

$$\begin{pmatrix} j & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix},$$

die zufolge der Form der Differentialgleichung (1) eine unimodulare sein muss. Wir haben also

$$j\beta = 1,$$

d. h. es ist

$$\varphi(j\mathfrak{w}) = \alpha\mathfrak{w} + j^{-1}\varphi(\mathfrak{w}).$$

Diese Gleichung muss wegen der Irreductibilität der Gleichung (33) eine in $\mathfrak{w}$ identische sein; wir erhalten also die Gleichungen

$$jc_1 = \alpha + j^{-1}c_1,$$

$$j^{\varkappa}c_{\varkappa} = j^{-1}c_{\varkappa} \qquad (\varkappa = 0, 2, 3, \cdots 2\nu - 1).$$

Da j nicht gleich ± 1 ist, so folgt hieraus zunächst

$$c_1 = \frac{\alpha}{j - j^{-1}},$$

d. h. c_1 ist eine Constante, und ferner ergiebt sich, dass $c_{\varkappa}$ für $\varkappa = 0, 2, \cdots 2\nu - 1$ nur dann von Null verschieden sein kann, wenn

$$\varkappa \equiv (-1) \pmod{2g}$$

ist. Der Ausdruck $\varphi(\mathfrak{w})$ hat demnach die Gestalt

$$\varphi(\mathfrak{w}) = c_1\mathfrak{w} + \mathfrak{w}^{2g-1}\left(\bar{c}_0 + \bar{c}_1\mathfrak{w}^{2g} + \cdots + \bar{c}_{\varrho-1}\mathfrak{w}^{2(\varrho-1)g}\right),$$

wo die $\bar{c}_0, \bar{c}_1, \cdots \bar{c}_{\varrho-1}$ rationale Functionen von z bedeuten.

Da c_1 eine Constante ist, so haben wir in

$$\bar{w} = \mathfrak{w}^{2g-1}\left(\bar{c}_0 + \bar{c}_1\mathfrak{w}^{2g} + \cdots + \bar{c}_{\varrho-1}\mathfrak{w}^{2(\varrho-1)g}\right)$$

ein Integral der Differentialgleichung (1), und dieses verwandelt sich, wenn z den Umlauf $\mathfrak{U}$ vollzieht, offenbar in $j^{-1}\mathfrak{w}$.

296. Die Primformen im Falle des Dieders.

Es sei nun w_1 ein linearer Factor der Primform niedrigsten Grades F_3; nehmen wir ein reducirtes Werthesystem dieses Integrals, so enthält dasselbe ϱ_3 Elemente, die entsprechende Einheitswurzel j ist folglich

$$j = e^{\frac{2\pi i}{2\varrho_3}}.$$

Sei $\mathfrak{U}$ derjenige Umlauf von z, der w_1 in jw_1 verwandelt, und bezeichnen wir durch w_2 dasjenige Integral, welches durch denselben Umlauf $\mathfrak{U}$ in $j^{-1}w_2$ übergeführt wird. Dann können wir uns die sämmtlichen Primformen F_γ, F_1, F_2, F_3 durch das Fundamentalsystem w_1, w_2 dargestellt denken; wir nehmen also der Einfachheit wegen an, es sei dieses Fundamentalsystem dasjenige, welches wir von vorneherein zu Grunde gelegt hatten.

Betrachten wir nun zuvörderst den Fall des Dieders.

Es ist, da $\nu = 2n$ angenommen wurde:

$$F_3 = w_1(\alpha w_1 + \beta w_2),$$

$$F_2 = \sum_{\varkappa=0}^{n} b_\varkappa w_1^{n-\varkappa} w_2^{\varkappa},$$

$$F_1 = \sum_{\varkappa=0}^{n} a_\varkappa w_1^{n-\varkappa} w_2^{\varkappa},$$

wo α, β, $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ Constanten bedeuten. Durch den Umlauf $\mathfrak{U}$ von z verwandelt sich F_3 in

$$jw_1(\alpha j w_1 + \beta j^{-1} w_2), \qquad j = e^{\frac{\pi i}{n}};$$

da aber nach (28)

$$F_3 = \sqrt{z(z-1)}$$

ist, so muss

$$jw_1(\alpha j w_1 + \beta j^{-1} w_2) = \varepsilon w_1(\alpha w_1 + \beta w_2)$$

sein, wo $\varepsilon = \pm 1$ ist. Wir haben demnach

$$j^2 \alpha = \varepsilon \alpha, \qquad \beta = \varepsilon \beta.$$

Wäre $\varepsilon = -1$, so müsste β verschwinden; dann hätte F_3 die Gestalt αw_1^2, dies ist aber, da F_3 eine Primform sein soll, nicht möglich. Also muss $\varepsilon = 1$, und folglich, da j nicht ± 1 sein kann, $\alpha = 0$ sein; d. h. wir haben

$$F_3(w_1, w_2) = \beta w_1 w_2.$$

Die Primform F_2 multiplicirt sich, wenn z den Umlauf $\mathfrak{U}$ vollzieht, mit einem constanten Factor c; es ist also

$$\sum_{\varkappa=0}^{n} b_\varkappa j^{n-2\varkappa} w_1^{n-\varkappa} w_2^{\varkappa} = c \sum_{\varkappa=0}^{n} b_\varkappa w_1^{n-\varkappa} w_2^{\varkappa},$$

und hieraus ergeben sich die Gleichungen

$$c b_\varkappa = b_\varkappa e^{\frac{\pi i}{n}(n-2\varkappa)} \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n).$$

Wenn $b_\varkappa$ von Null verschieden ist, so muss

$$c = e^{\pi i - \frac{2\varkappa\pi i}{n}}$$

sein, es können also dann nur diejenigen b_l von Null verschiedene Werthe haben, für welche

$$l \equiv \varkappa \pmod{n}$$

ist. Da F_2 als Primform keinen mehrfachen Factor enthalten kann, muss b_0 von Null verschieden sein, wir haben also

$$F_2 = b_0 w_1^n + b_n w_2^n,$$

und ebenso ergiebt sich

$$F_1 = a_0 w_1^n + a_n w_2^n.$$

Nun ist aber nach der zweiten Gleichung des Systems (32) (S. 134)

$$F_1 = \frac{\partial F_3}{\partial w_1}\frac{\partial F_2}{\partial w_2} - \frac{\partial F_2}{\partial w_1}\frac{\partial F_3}{\partial w_2},$$

wir haben demnach

$$F_1 = -n\beta(b_0 w_1^n - b_n w_2^n),$$

so dass wir, wenn wir uns die Integrale w_1, w_2 von vornherein mit geeigneten constanten Factoren multiplicirt denken,

$$F_2 = \frac{w_1^n - w_2^n}{2},$$

$$F_1 = -n\beta\frac{w_1^n + w_2^n}{2},$$

$$F_3 = c\, w_1 w_2$$

setzen können, wo c eine Constante bedeutet. Beachten wir noch, dass dann nach Gleichung (16) der Nr. 292 (S. 126)

$$\frac{n^2\beta^2}{4}(w_1^{2n} + 2w_1^n w_2^n + w_2^{2n}) - \frac{1}{4}(w_1^{2n} - 2w_1^n w_2^n + w_2^{2n}) - c^n w_1^n w_2^n = 0$$

sein muss, so finden wir

$$\beta^2 = \frac{1}{n^2}, \qquad c^n = 1.$$

Bei geeigneter Wahl der constanten Factoren in den w_1, w_2 haben wir also

$$\text{(d)}\qquad \begin{cases} F_1(w_1, w_2) = \frac{1}{2}(w_1^n + w_2^n), \\ F_2(w_1, w_2) = \frac{1}{2}(w_1^n - w_2^n), \\ F_3(w_1, w_2) = w_1 w_2. \end{cases}$$

Die Gleichung, welche η als Function von z definirt, ergiebt sich demnach in der Form

$$z = \frac{1}{4}\frac{w_1^{2n} + 2w_1^n w_2^n + w_2^{2n}}{w_1^n w_2^n} = \frac{1}{4}\frac{1 + 2\eta^n + \eta^{2n}}{\eta^n},$$

oder etwas anders geschrieben

$$\text{(D)}\qquad \eta^{2n} + 2\eta^n(1 - 2z) + 1 = 0,$$

und die allgemeine Primform lautet

$$F(w_1, w_2) = \frac{1}{4}(w_1^n + w_2^n)^2 - u w_1^n w_2^n.$$

In den drei übrigen Fällen setzen wir

$$F_3(w_1, w_2) = \sum_{\varkappa=0}^{\varrho_3} a_\varkappa w_1^{\varrho_3 - \varkappa} w_2^\varkappa, \qquad a_{\varrho_3} = 0.$$

Durch den Umlauf $\mathfrak{U}$ multiplicirt sich F_3 mit einer Constanten c, es ist demnach

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varrho_3 - 1} a_\varkappa j^{\varrho_3 - 2\varkappa} w_1^{\varrho_3 - \varkappa} w_2^\varkappa = c\sum_{\varkappa=0}^{\varrho_3 - 1} a_\varkappa w_1^{\varrho_3 - \varkappa} w_2^\varkappa.$$

Wenn also $a_\varkappa$ von Null verschieden ist, so haben wir

$$c = j^{\varrho_3 - 2\varkappa} = e^{\frac{\pi i}{\varrho_3}(\varrho_3 - 2\varkappa)},$$

es können folglich nur diejenigen a_l von Null verschieden sein, für welche

$$l \equiv \varkappa \pmod{g_3}$$

ist.

297. Die Primformen in den Fällen des Tetraeders und Oktaeders.

Betrachten wir den Fall des Tetraeders. Dann ist $\varrho_3 = 4$, $g_3 = 3$. Wäre $a_3 = 0$, so würde F_3 den Factor w_1^2 enthalten, was nicht möglich ist, es sind also nur a_3 und a_0 von Null verschieden, d. h. F_3 hat die Gestalt

$$F_3 = a_0 w_1^4 + a_3 w_1 w_2^3$$

oder bei geeigneter Wahl der constanten Factoren in w_1, w_2

$$F_3(w_1, w_2) = w_1^4 + w_1 w_2^3.$$

Der Satz 4) der Nr. 295 (S. 135) liefert nun sofort für F_1, F_2 die Ausdrücke

$$F_2 = c_2(8w_1^3 w_2 - w_2^4),$$
$$F_1 = c_1(8\,w_1^6 - 20w_1^3 w_2^3 - w_2^6),$$

und durch Berücksichtigung der Relation (16) finden wir für die constanten Factoren c_1, c_2 die Werthe

$$c_2^2 = \frac{1}{64}, \qquad c_1^3 = c_2^2 = \frac{1}{64},$$

wir können folglich

$$\text{(t)} \quad \begin{cases} F_2(w_1,\ w_2) = \frac{1}{8}(8\,w_1^3 w_2 - w_2^4), \\ F_1(w_1,\ w_2) = \frac{1}{4}(8w_1^6 - 20w_1^3 w_2^3 - w_2^6), \\ F_3(w_1,\ w_2) = w_1^4 + w_1 w_2^3 \end{cases}$$

nehmen.

Die Gleichung für η als Function von z lautet demgemäss

$$z = \frac{1}{16}\,\frac{(8 - 20\eta^3 - \eta^6)^2}{(1 + \eta^3)^3},$$

oder

$$\text{(T)} \qquad 16z(\eta^3 + 1)^3 - (\eta^6 + 20\eta^3 - 8)^2 = 0,$$

und die allgemeine Primform hat die Gestalt

$$F(w_1,\ w_2) = \frac{1}{16}(8w_1^6 - 20w_1^3 w_2^3 - w_2^6)^2 - u\,(w_1^4 + w_1 w_2^3)^3.$$

Durch Einführung anderer Integrale an die Stelle von w_1, w_2 können wir den Formen F_1, F_2, F_3 eine etwas andere Gestalt geben, wodurch dieselben mit den in der Invariantentheorie der binären Formen üblichen Bezeichnungen in unmittelbaren Zusammenhang treten.

Betrachten wir nämlich die biquadratische Form

$$F_3(w_1,\ w_2) = w_1^4 + w_1 w_2^3,$$

so erkennen wir, dass für dieselbe die in der Nr. 276 (S. 70) mit g_2 bezeichnete Invariante vom Grade 2 und vom Gewichte 4 verschwindet. Denken wir uns die Form F_3 durch Einführung neuer Unbestimmter v_1, v_2, die mit w_1, w_2 durch lineare homogene Beziehungen mit constanten Coefficienten verknüpft sind, auf die sogenannte canonische Form gebracht:

$$w_1^4 + w_1 w_2^3 = v_1^4 + 6mv_1^2 v_2^2 + v_2^4,$$

so ist für diese canonische Form offenbar

$$g_2 = 1 + 3m^2,$$

also, da g_2 verschwindet,

$$m = \frac{1}{3}\sqrt{-3}.$$

Wir haben demnach

$$F_3(w_1, w_2) = v_1^4 + 2\sqrt{-3}\, v_1^2 v_2^2 + v_2^4 = \Phi(v_1, v_2).$$

Bilden wir die Hesse'sche Covariante von Φ

$$H(v_1, v_2) = \frac{1}{12^2}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_1^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_2^2} - \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_1 \partial v_2}\right)^2\right],$$

wo der numerische Factor vor der Parenthese hinzugefügt wurde, um $H(v_1, v_2)$ direct als die sogenannte zweite Ueberschiebung der Form Φ über sich selbst erscheinen zu lassen (vergl. Nr. 298, S. 146), so ergiebt sich

$$H(v_1, v_2) = \frac{1}{\sqrt{-3}}(v_1^4 - 2\sqrt{-3}\, v_1^2 v_2^2 + v_2^4).$$

Ferner finden wir die Functionaldeterminante von H und Φ, die wir als die erste Ueberschiebung dieser beiden Formen in der Gestalt

$$T(v_1, v_2) = \frac{1}{8}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v_1}\frac{\partial H}{\partial v_2} - \frac{\partial\Phi}{\partial v_2}\frac{\partial H}{\partial v_1}\right)$$

schreiben, den Ausdruck

$$T(v_1, v_2) = 4v_1 v_2(v_1^4 - v_2^4).$$

Die beiden Covarianten H und T von Φ müssen dann bis auf constante Factoren mit den beiden Primformen F_2 und F_1 übereinstimmen.

Die zwischen den Primformen F_1, F_2, F_3 bestehende Relation (16) ergiebt sich als unmittelbare Folge der Cayley'schen Relation, die zwischen einer biquadratischen Form Φ, deren beiden Covarianten H, T und den beiden Invarianten g_2, g_3 besteht. Diese Relation lautet nämlich allgemein

$$T^2 + g_3\Phi^3 - g_2\Phi^2 H + 4H^3 = 0.$$

Da für unsere Form Φ die Invariante g_2 verschwindet und g_3 den Werth

$$g_3 = \frac{4}{9}\sqrt{-3}$$

besitzt, so nimmt die Cayley'sche Relation die Form an

$$(34) \qquad T^2 + \frac{4}{9}\sqrt{-3}\,\Phi^3 + 4H^3 = 0.$$

Bezeichnen wir den Quotienten der beiden Integrale v_1, v_2 durch

$$\zeta = \frac{v_2}{v_1},$$

so ergiebt sich aus der Gleichung

$$z - 1 = \frac{F_2^3}{F_3^3}$$

die Beziehung zwischen z und ζ in der Form

$$(\mathrm{T}_1) \qquad z - 1 = \frac{(1 - 2\sqrt{-3}\,\zeta^2 + \zeta^4)^3}{(1 + 2\sqrt{-3}\,\zeta^2 + \zeta^4)^3},$$

aus welcher unmittelbar ersichtlich ist, dass die Gleichung zwölften Grades, die im Falle des Tetraeders den Integralquotienten als Function von z definirt, algebraisch, d. h. durch Wurzelausziehungen aufgelöst werden kann.

Wir wenden uns zum Falle des Oktaeders, wo $\varrho_3 = 6$, $g_3 = 4$ ist. Da in $F_3(w_1, w_2)$ der Coefficient a_5 von Null verschieden sein muss, ist nur noch a_1 von Null verschieden, d. h. F_3 hat die Gestalt

$$F_3 = a_1 w_1^5 w_2 + a_5 w_1 w_2^5$$

oder, wenn wir die constanten Factoren in w_1, w_2 passend wählen,

$$F_3(w_1, w_2) = w_1 w_2 (w_1^4 - w_2^4).$$

Bilden wir die Hesse'sche Covariante dieser Form und dann die Functionaldeterminante zwischen dieser Covariante und der Form selbst, so erhalten wir nach dem Satze 4) der Nr. 295 (S. 135) die Primformen F_2 und F_1, abgesehen von constanten Factoren. Es ergiebt sich

$$F_2 = c_2(w_1^8 + 14 w_1^4 w_2^4 + w_2^8),$$
$$F_1 = c_1(w_1^{12} - 33 w_1^8 w_2^4 - 33 w_1^4 w_2^8 + w_2^{12}).$$

Die Relation (16) liefert für die Constanten c_1, c_2 die Bestimmung

$$c_1^2 = c_2^3 = -\frac{1}{108},$$

so dass also die Primformen in der Gestalt

$$(\mathrm{o}) \qquad \begin{cases} F_1 = \dfrac{1}{\sqrt{-108}}(w_1^{12} - 33 w_1^8 w_2^4 - 33 w_1^4 w_2^8 + w_2^{12}), \\ F_2 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{-108}}(w_1^8 + 14 w_1^4 w_2^4 + w_2^8), \\ F_3 = w_1 w_2 (w_1^4 - w_2^4) \end{cases}$$

angenommen werden können.

Die Gleichung zwischen z und η lautet

$$z = -\frac{1}{108}\frac{(\eta^{12} - 33\eta^8 - 33\eta^4 + 1)^2}{\eta^4(\eta^4 - 1)^4}$$

oder auch

$$(0) \qquad z - 1 = -\frac{1}{108}\frac{(\eta^8 + 14\eta^4 + 1)^3}{\eta^4(\eta^4 - 1)^4}.$$

Die Form, welche im Falle des Oktaeders $F_3(w_1, w_2)$ darstellt, ist abgesehen von einem constanten Factor nichts anderes, wie die Form $T(w_1, w_2)$, die im Falle des Tetraeders für das Fundamentalsystem v_1, v_2 die Primform F_1 war. Nun ist $T(w_1, w_2)$ eine Covariante der biquadratischen Form

$$\Phi(w_1, w_2) = w_1^4 + 2\sqrt{-3}\, w_1^2 w_2^2 + w_2^4,$$

und da Covarianten von Covarianten einer Form selbst wieder Covarianten der ursprünglichen Form sind, so folgt hieraus, dass auch die Covarianten

$$F_1(w_1, w_2), \qquad F_2(w_1, w_2)$$

der Form $F_3(w_1, w_2)$, wie sie durch die Gleichungen (o) dargestellt werden, Covarianten von $\Phi(w_1, w_2)$ sein müssen.

Wir schliessen hieraus, dass, wenn wir η als den Integralquotienten einer Tetraederdifferentialgleichung mit der unabhängigen Variabeln z_1 auffassen, d. h. wenn wir

$$\eta = s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, z_1\right)$$

setzen, so dass also nach Gleichung (T_1)

$$(35) \qquad z_1 - 1 = \frac{(1 - 2\sqrt{-3}\,\eta^2 + \eta^4)^3}{(1 + 2\sqrt{-3}\,\eta^2 + \eta^4)^3}$$

ist, die durch die Gleichungen (o) definirten Formen F_1, F_2 invariante Formen dieser Tetraederdifferentialgleichung sein müssen. Dieselben sind folglich als Producte der Primformen

$$\Phi, \; H, \; T$$

darstellbar. Nun ist $F_2(w_1, w_2)$ vom 8ten Grade; da es eine Primform des Oktaeders ist, kann es weder gleich Φ^2 noch gleich H^2 sein, wir haben also nothwendig

$$(36) \qquad F_2(w_1, w_2) = c \cdot \Phi(w_1, w_2)\, H(w_1, w_2).$$

Ferner ist nach Gleichung (34) (S. 142)

$$(37)\; T^2(w_1, w_2) = 16 F_3^2(w_1, w_2) = -\tfrac{4}{9}\sqrt{-3}\,\Phi^3(w_1, w_2) - 4H^3(w_1, w_2),$$

wir erhalten demnach mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$z - 1 = \frac{F_2^3}{F_3^4}, \qquad z_1 - 1 = (\sqrt{-3})^3 \frac{H^3}{\Phi^3}$$

aus (36) und (37) die Gleichung

(38) $$z - 1 = \bar{c}\,\frac{z_1 - 1}{z_1^2},$$

wo $\bar{c}$ einen constanten Factor bedeutet.

Die Gleichung (O) ist somit auf die Kette der beiden Gleichungen (38) und (35) zurückgeführt; wir erkennen hieraus, dass auch die Gleichung vierundzwanzigsten Grades (O) durch Wurzelzeichen auflösbar ist.

Wir bemerken noch, dass die allgemeine Primform für den Fall des Oktaeders die Gestalt:

$$F(w_1, w_2) = \frac{-1}{108}(w_1^{12} - 33 w_1^8 w_2^4 - 33 w_1^4 w_2^8 + w_2^{12})^2 \\ - u w_1^4 w_2^4 (w_1^4 - w_2^4)^4$$

besitzt.

298. Die Primformen im Falle des Ikosaeders.

Im Falle des Ikosaeders, wo $\varrho_3 = 12$, $g_3 = 5$ ist, haben wir in der Primform $F_3(w_1, w_2)$ nothwendig ein von Null verschiedenes a_{11}, da a_{12} verschwindet und F_3 nicht den Factor w_1^2 enthalten darf. Es sind also nur noch a_6 und a_1 von Null verschieden, d. h. F_3 hat die Gestalt

$$F_3 = a_1 w_1^{11} w_2 + a_6 w_1^6 w_2^6 + a_{11} w_1 w_2^{11},$$

oder, wenn wir die constanten Factoren in den w_1, w_2 geeignet wählen,

$$F_3 = w_1^{11} w_2 + \alpha w_1^6 w_2^6 - w_1 w_2^{11},$$

wo jetzt α eine noch zu bestimmende Constante bedeutet. In diesem Falle reicht also der Satz von der Existenz zweier Integrale w_1, w_2, die sich bei einem und demselben Umlaufe beziehungsweise mit j und j^{-1} multipliciren, zur vollständigen Bestimmung der Primform F_3 nicht hin. Wir bedienen uns zur Auffindung der Constanten α des Satzes 3) der Nr. 294 (S. 133).

Hat man zwei binäre Formen

$$\varphi(w_1, w_2) = \sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_\varkappa w_1^{n-\varkappa} w_2^\varkappa,$$

$$\psi(w_1, w_2) = \sum_{\varkappa=1}^{m} \beta_\varkappa w_1^{m-\varkappa} w_2^\varkappa,$$

so bezeichnet man bekanntlich den Ausdruck

$$(\varphi, \psi)^{(\varkappa)} = \frac{(n-\varkappa)!}{n!}\frac{(m-\varkappa)!}{m!}\left\{\frac{\partial^\varkappa \varphi}{\partial w_1^\varkappa}\frac{\partial^\varkappa \psi}{\partial w_2^\varkappa} - \varkappa_1 \frac{\partial^\varkappa \varphi}{\partial w_1^{\varkappa-1}\partial w_2}\frac{\partial^\varkappa \psi}{\partial w_1 \partial w_2^{\varkappa-1}}\right.$$
$$\left. + \varkappa_2 \frac{\partial^\varkappa \varphi}{\partial w_1^{\varkappa-2}\partial w_2^2}\frac{\partial^\varkappa \psi}{\partial w_1^2 \partial w_2^{\varkappa-2}} - \cdots + (-1)^\varkappa \frac{\partial^\varkappa \varphi}{\partial w_2^\varkappa}\frac{\partial^\varkappa \psi}{\partial w_1^\varkappa}\right\}$$

als die $\varkappa$-te Ueberschiebung der Form ψ über die Form φ. So ist also die erste Ueberschiebung $(\varphi, \psi)^{(1)}$ nichts anderes wie die mit dem Factor

$$\frac{1}{nm}$$

multiplicirte Functionaldeterminante von φ und ψ; dieselbe ist offenbar eine simultane Covariante des Formensystems

$$\varphi(w_1, w_2), \qquad \psi(w_1, w_2).$$

Allgemein ist auch die $\varkappa$-te Überschiebung

$$(\varphi, \psi)^{(\varkappa)},$$

eine simultane Covariante des Formensystems φ, ψ und zwar eine Covariante vom Grade

$$n - \varkappa + m - \varkappa = n + m - 2\varkappa$$

in den Variabeln w_1, w_2.

Bedeutet insbesondere $\psi(w_1, w_2)$ eine Covariante der Form $\varphi(w_1, w_2)$, so ist jede Ueberschiebung von ψ über φ selbst wieder eine Covariante von φ; wir erhalten also jedenfalls Covarianten von φ, wenn wir die Ueberschiebungen dieser Form über sich selbst

$$(\varphi, \varphi)^{(\varkappa)} \qquad (\varkappa = 2, 4, 6, \cdots)$$

bilden. So ist z. B. die zweite Ueberschiebung der Form φ über sich selbst nichts anderes, wie die mit dem Factor

$$\frac{1}{n^2(n-1)^2}$$

multiplicirte Hesse'sche Covariante.

Die Form $F_3(w_1, w_2)$ ist vom Grade 12, ihre achte Ueberschiebung über sich selbst wäre demnach eine Covariante vom Grade 8. Diese muss folglich, da sie von niedrigerem Grade ist wie F_3, zufolge des Satzes 3) identisch verschwinden. Berechnen wir

$$(F_3, F_3)^{(8)} = \frac{2(4!)^2}{(12!)^2}\left\{\frac{\partial^8 F_3}{\partial w_1^8}\frac{\partial^8 F_3}{\partial w_2^8} - 8\frac{\partial^8 F_3}{\partial w_1^7 \partial w_2}\frac{\partial^8 F_3}{\partial w_1 \partial w_2^7} + \cdots\right\},$$

so finden wir

$$(F_3, F_3)^{(8)} = w_1^4 w_2^4 (11^2 - \alpha^2);$$

es muss folglich $$\alpha^2 = 11^2$$
sein. Nehmen wir $\alpha = 11$ (die Wahl $\alpha = -11$ würde einer Vertauschung von w_1 mit w_2 entsprechen), so haben wir also für die Primform F_3 die Gestalt
$$F_3(w_1, w_2) = w_1 w_2 (w_1^{10} + 11 w_1^5 w_2^5 - w_2^{10}).$$
Bilden wir für diese Form die Hesse'sche Covariante, sowie die Functionaldeterminante dieser Covariante und der Form selbst, so erhalten wir im Sinne des Satzes 4) die Primformen F_2 und F_1, abgesehen von constanten Factoren. Die Beziehung (16) liefert dann, ähnlich wie in früheren Fällen, eine Bestimmung dieser Constanten, und wir finden auf diese Weise für das Ikosaeder das folgende Formensystem:
$$\text{(i)}\begin{cases} F_1(w_1, w_2) = \frac{1}{24\sqrt{3}} \Big\{ w_1^{30} + w_2^{30} + 522 (w_1^{25} w_2^5 - w_1^5 w_2^{25}) \\ \qquad\qquad - 10005 (w_1^{20} w_2^{10} + w_1^{10} w_2^{20}) \Big\}, \\ F_2(w_1, w_2) = \frac{1}{12} \Big\{ w_1^{20} + w_2^{20} - 228 (w_1^{15} w_2^5 - w_1^5 w_2^{15}) \\ \qquad\qquad + 494 w_1^{10} w_2^{10} \Big\}, \\ F_3(w_1, w_2) = w_1 w_2 (w_1^{10} + 11 w_1^5 w_2^5 - w_2^{10}). \end{cases}$$
Die Gleichung zwischen z und η ergiebt sich als
$$\text{(J)} \qquad z = \frac{1}{1728} \frac{[\eta^{30} + 522(\eta^5 - \eta^{25}) - 10005(\eta^{10} + \eta^{20}) + 1]^2}{\eta^5 (1 + 11\eta^5 - \eta^{10})^5},$$
und die allgemeine Primform hat die Gestalt
$$F(w_1, w_2) = \frac{1}{1728} \{ w_1^{30} + w_2^{30} + 522 (w_1^{25} w_2^5 - w_1^5 w_2^{25}) - 10005 (w_1^{20} w_2^{10} + w_1^{10} w_2^{20}) \}^2 - u w_1^5 w_2^5 (w_1^{10} + 11 w_1^5 w_2^5 - w_2^{10})^5.$$

Die Gleichung sechzigsten Grades (J), der η als Function von z genügt, unterscheidet sich dadurch wesentlich von den bei den früheren Fällen gefundenen Gleichungen, dass dieselbe durch Wurzelzeichen **nicht auflösbar** ist. Eine ausführliche Theorie dieser „**Ikosaedergleichung**" hat Herr **Klein** in seinen „Vorlesungen über das Ikosaeder" entwickelt; wir begnügen uns damit, als wesentlichstes Resultat dieser Theorie hervorzuheben, dass die durch die Gleichung (J) definirte algebraische Irrationalität zur Auflösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades ausreicht, und dass sich nach den Methoden, die von Herrn **Hermite**, **Kronecker** u. A. für die Lösung einer allgemeinen Gleichung fünften Grades durch Reihen, die der Theorie der elliptischen Functionen entstammen, ausgebildet worden sind, auch eine Darstellung der durch die Gleichung (J) definirten algebraischen Function η durch solche Reihen angeben lässt.

Viertes Kapitel.

299. Der Klein'sche Satz. Der Satz von Fuchs über die Grade der Primformen niedrigsten Grades.

Wir haben jetzt die am Schlusse der Nr. 267 (S. 31) formulirte Aufgabe vollständig gelöst, indem wir uns eine Uebersicht über alle möglichen Fälle verschafft haben, in denen die unabhängige Variable einer Gauss'schen Differentialgleichung eine eindeutige Function des Integralquotienten ist. Wir werden nun die gefundenen Ergebnisse nach den verschiedenartigsten Richtungen hin zu verallgemeinern suchen und beginnen mit einer Ueberlegung, die sich an die in den letzten Nummern behandelten algebraisch integrirbaren Fälle der Gauss'schen Differentialgleichung anknüpfen lässt.

In diesen Fällen erwies sich z als eine rationale Function des Integralquotienten η; wir fragen nun allgemein nach denjenigen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten, deren unabhängige Variable eine rationale Function des Integralquotienten ist.

Die Bedeutung dieser Frage erhellt aus dem in der Nr. 195 (Bd. II, 1, S. 248) bewiesenen Satze von Herrn Fuchs. Gelingt es uns nämlich, alle Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 w}{d z^2} = q(z)\, w \tag{1}$$

aufzustellen, deren unabhängige Variable z eine rationale Function des Integralquotienten ist, so gehen durch die Transformation

$$y = \lambda w, \qquad z = \varphi(x), \tag{2}$$

wo $\varphi(x)$ eine rationale Function, λ die Wurzel aus einer rationalen Function ist, alle algebraisch integrirbaren Differentialgleichungen zweiter Ordnung aus den Differentialgleichungen (1) hervor.

In Bezug auf die Differentialgleichungen von der für (1) geforderten Beschaffenheit hat nun Herr Klein einen interessanten und wichtigen Satz aufgestellt, den wir zunächst entwickeln wollen.

Die singulären Punkte der Differentialgleichung (1) seien

$$a_1,\ a_2, \cdots a_\varrho, \qquad a_{\varrho+1} = \infty,$$

dann folgt aus der Forderung, dass z eine rationale Function des Integralquotienten η sein soll, zunächst, dass die Differenz $\delta_\varkappa$ der Wurzeln der zu dem singulären Punkte $a_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung gleich einer reciproken ganzen Zahl

$$\delta_\varkappa = \frac{1}{g_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \varrho + 1)$$

sein muss. Sei ν die Anzahl der Substitutionen der projectiven Monodromiegruppe ϑ, die zu dem Integralquotienten η gehört, dann ist also die irreductible algebraische Gleichung, die η als Function von z definirt, vom ν-ten Grade; wir schreiben dieselbe gleich in der Form

$$h(\eta)z - g(\eta) = 0,$$

wo $g(\eta)$, $h(\eta)$ ganze rationale Functionen ν-ten Grades ohne gemeinsamen Theiler bedeuten. Die Discriminantengleichung

$$g(\eta)h'(\eta) - h(\eta)g'(\eta) = 0,$$

der die η-Werthe, welche den Verzweigungspunkten $a_\varkappa$ entsprechen, Genüge leisten, ist vom Grade $2\nu - 2$. In der Umgebung von $a_\varkappa$ sind alle Zweige von η nach ganzen Potenzen von

$$(z - a_\varkappa)^{\frac{1}{g_\varkappa}}$$

entwickelbar, es fallen folglich für $z = a_\varkappa$ je $g_\varkappa$ der ν sonst verschiedenen η-Werthe zusammen. Also sind in $a_\varkappa$ genau

$$\frac{\nu}{g_\varkappa}$$

$g_\varkappa$-fache Windungspunkte oder $(g_\varkappa - 1)$-fach zu zählende Verzweigungspunkte vereinigt. Wir haben demnach die Gleichung

$$(3) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{\varrho+1} \frac{\nu}{g_\varkappa}(g_\varkappa - 1) = 2\nu - 2.$$

Da wir ν grösser als Eins voraussetzen müssen, ist

$$2 > 2\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) \geqq 1,$$

aus (3) folgt demnach

$$2 > \varrho + 1 - \sum_{\varkappa=1}^{\varrho+1} \frac{1}{g_\varkappa} \geqq 1,$$

und hieraus ergiebt sich, dass ϱ nur die Werthe 1 und 2 haben kann.

Für $\varrho = 2$ verwandelt sich die Gleichung (1) durch Einführung von

$$\bar{z} = \frac{z - a_1}{a_2 - a_1}$$

als neuer unabhängiger Variabeln in eine Gauss'sche Differentialgleichung; diese Annahme führt also auf die bereits discutirten Fälle des Dieders, Tetraeders, Oktaeders und Ikosaeders.

Für $\varrho = 1$ ist

$$\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} = \frac{2}{\nu},$$

also, da keines der $g_\varkappa$ grösser wie ν sein kann,

$$\frac{1}{g_1} = \frac{1}{g_2} = \frac{1}{\nu}.$$

Die diesem Falle entsprechende Differentialgleichung lautet folglich, wenn wir $a_1 = 0$ nehmen:

(4) $$\frac{d^2 w}{dz^2} = -\frac{1}{4}\frac{\nu^2 - 1}{\nu^2}\frac{1}{z^2} w,$$

und die Gleichung für η als Function von z hat die einfache Form

$$z = \left(\frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}\right)^\nu,$$

wo α, β, γ, δ noch willkürliche Constanten sind, die der Ungleichung

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

genügen. Wählen wir η so, dass dieser Integralquotient für $z = 0$ verschwindet, für $z = \infty$ unendlich gross wird und für $z = 1$ den Werth Eins erhält, so ist

$$z = \eta^\nu,$$

und die Integrale w_1, w_2, deren Quotient η ist, lauten

(5) $$w_1 = z^{\frac{\nu - 1}{2\nu}}, \qquad w_2 = z^{\frac{\nu + 1}{2\nu}}.$$

Die projective Monodromiegruppe der Differentialgleichung (4) besteht aus den Potenzen der elliptischen Substitution

$$A\eta = e^{\frac{2\pi i}{\nu}} \eta,$$

sie ist also eine sogenannte cyklische Gruppe; wir wollen darum den Fall der Differentialgleichung (4) als den cyklischen bezeichnen.

Nebst diesen cyklischen Fällen sind also die für die Gauss'sche Differentialgleichung gefundenen Fälle die einzigen, in denen die unabhängige Variable einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung als rationale Function des Integralquotienten erscheint. Wir haben also mit

Rücksicht auf den zu Anfang dieser Nummer erwähnten Satz des Herrn Fuchs (Nr. 195, Bd. II, 1, S. 248) den Klein'schen Satz:

Jede algebraisch integrirbare lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung geht durch Anwendung einer Transformation von der Form (2) entweder aus der Differentialgleichung (4) oder aus der Differentialgleichung des Dieders, Tetraeders, Oktaeders oder Ikosaeders hervor.

Umgekehrt kann in (2) für $\varphi(x)$ eine beliebige rationale Function, für λ eine beliebige Wurzel aus einer beliebigen rationalen Function genommen werden; es wird dann stets y einer algebraisch integrirbaren, linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit in x rationalen Coefficienten Genüge leisten.

Soll diese Differentialgleichung gleich die canonische Form haben, d. h. soll der Coefficient der ersten Ableitung verschwinden, so muss (vergl. Nr. 181, Bd. II, 1, S. 189)

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{\varphi'(x)}}$$

genommen werden. D. h. wenn die Differentialgleichung

$$(6) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = p(x)\, y,$$

wo $p(x)$ eine rationale Function bedeutet, algebraisch integrirbar sein soll, so muss dieselbe durch die Transformation

$$(7) \qquad y = \sqrt{\frac{1}{\varphi'(x)}}\, w, \qquad z = \varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ eine rationale Function darstellt, in eine Differentialgleichung (1) übergeführt werden können, die entweder die Form (4) hat oder mit einer Gauss'schen Differentialgleichung mit rational umkehrbarem Integralquotienten übereinstimmt.

Betrachten wir eine invariante Form

$$M(w_1, w_2) = w_1^r\, m(\eta) = R(z)$$

der aus (6) durch die Transformation (7) hervorgehenden Differentialgleichung (1), wo also r eine positive ganze Zahl, $R(z)$ die Wurzel aus einer rationalen Function von z bedeutet, setzen wir ferner

$$(8) \qquad y_1 = \sqrt{\frac{1}{\varphi'(x)}}\, w_1, \qquad y_2 = \sqrt{\frac{1}{\varphi'(x)}}\, w_2,$$

so ist die Form

$$(9)\; M(y_1, y_2) = \left(\frac{dz}{dx}\right)^{-\frac{r}{2}} M(w_1, w_2) = y_1^{\,r}\, m(\eta) = \left(\frac{dz}{dx}\right)^{-\frac{r}{2}} R(z) = P(x),$$

also auch gleich der Wurzel aus einer rationalen Function von x.

Wenn die Differentialgleichung (1) von der Form (4) ist, so haben wir nach (5) und (8)

$$(10)\qquad y_1 = \sqrt{\frac{1}{\varphi'(x)}}\,[\varphi(x)]^{\frac{\nu-1}{2\nu}}, \quad y_2 = \sqrt{\frac{1}{\varphi'(x)}}\,[\varphi(x)]^{\frac{\nu+1}{2\nu}},$$

in diesem Falle besitzt also die Differentialgleichung (6) ein Fundamentalsystem von Integralen, die selbst Wurzeln aus rationalen Functionen sind. D. h. mit anderen Worten, es ist eine Form ersten Grades, gebildet aus den Elementen eines beliebigen Fundamentalsystems von (6), gleich der Wurzel aus einer rationalen Function.

Ist (1) nicht von der Form (4), so ist nach (9) die Form

$$F_3(y_1, y_2)$$

gleich der Wurzel aus einer rationalen Function von x, wir finden also mit Rücksicht auf die für die Gauss'sche Differentialgleichung erlangten Resultate den folgenden von Herrn Fuchs herrührenden Satz:

Wenn die Differentialgleichung (6) algebraisch integrirbar ist, so ist entweder ein Integral selbst oder eine aus den Elementen eines Fundamentalsystems gebildete Form vom Grade

$$2, \ 4, \ 6, \ 12$$

gleich der Wurzel aus einer rationalen Function von x.

Die Bedeutung dieses Satzes liegt darin, dass sich, wie Herr Fuchs gezeigt hat, auf Grund desselben ein Verfahren angeben lässt, welches durch Anwendung rein rationaler Processe zu entscheiden gestattet, ob eine vorgelegte Differentialgleichung von der Form (6) algebraisch integrirbar ist oder nicht. Um dieses Verfahren darlegen zu können, müssen wir noch einige Eigenschaften der algebraisch integrirbaren Differentialgleichungen von der Form (6) entwickeln.

300. Nothwendige Bedingung für die algebraische Integrabilität einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Wenn die Differentialgleichung (6) durch die Transformation (7) in (1) übergeht, so könnte es sich ereignen, dass die projective Monodromiegruppe ϑ von (6) mit der projectiven Monodromiegruppe ϑ' von (1) nicht übereinstimmt. Da aber jedem geschlossenen Umlaufe von x ein geschlossener Weg von z entspricht, so muss jedenfalls ϑ in ϑ' als Untergruppe enthalten sein. Wenn wir uns die Differentialgleichung (1) nach dem in der Nr. 194 beschriebenen Verfahren gebildet denken, so ist der Grad der rationalen Function $\varphi(x)$ genau gleich der Anzahl der x-Werthe, für welche auf geeigneten Wegen fortgesetzt der Integralquotient η von (6) denselben Werth anzunehmen

vermag, in diesem Falle stimmt also die projective Monodromiegruppe ϑ' von (1) mit ϑ genau überein.

Wir wollen uns die Differentialgleichung (1) so eingerichtet denken, dass ihre projective Monodromiegruppe mit der von (6) identisch ist und sagen dann, die Differentialgleichung (6) gehöre in den cyklischen, beziehungsweise den Dieder-, Tetraeder-, Oktaeder-, Ikosaeder-Typus, jenachdem die Differentialgleichung (1) dem einen oder dem anderen dieser Typen angehört. Dann gilt offenbar der folgende Satz:

Wenn $M(y_1, y_2)$ eine homogene ganze Function der Elemente y_1, y_2 eines Fundamentalsystems von (6) bedeutet, die gleich der Wurzel aus einer rationalen Function von x ist, so ist die aus den entsprechenden Integralen w_1, w_2 von (1) gebildete Form $M(w_1, w_2)$ eine invariante Form von (1), d. h. gleich der Wurzel aus einer rationalen Function von z.

Daraus folgt, dass die über die invarianten Formen einer Gauss'schen Differentialgleichung aufgestellten Sätze ohne Weiteres für die aus den Integralen einer algebraisch integrirbaren Differentialgleichung (6) gebildeten Formen gültig bleiben.

Denken wir uns nun eine Differentialgleichung (6) vorgelegt. Besitzt dieselbe ein particulares Integral y_1, welches eine algebraische Function von x ist, ohne dass ihr allgemeines Integral algebraisch wäre, so muss dieses Integral y_1 nothwendig die Wurzel aus einer rationalen Function von x sein. Denn wäre y_1 nicht Wurzel aus einer rationalen Function, so würde dieses Integral einer algebraischen irreductiblen Gleichung mit in x rationalen Coefficienten Genüge leisten, für welche mindestens zwei Zweige der durch dieselbe definirten algebraischen Function vorhanden wären, deren Quotient nicht constant ist. Da aber jeder Zweig dieser algebraischen Function eine Lösung von (6) sein muss, so besässe die Differentialgleichung (6) zwei linear unabhängige Integrale, die algebraische Functionen sind.

Besitzt die Differentialgleichung (6) ein Integral y_1, welches die Wurzel aus einer rationalen Function ist, und ist dieselbe algebraisch integrirbar, so muss die zu (6) gehörige Differentialgleichung (1) von der Form (4) sein, da sonst keine homogene Function ersten Grades ihrer Integrale eine invariante Form sein könnte. Dann giebt es aber zufolge der Gleichungen (10) noch ein von y_1 linear unabhängiges Integral der Differentialgleichung (6), welches Wurzel aus einer rationalen Function ist.

Mit Hülfe des in der Nr. 178 (Bd. II, 1, S. 171 ff.) entwickelten Verfahrens können wir für die Differentialgleichung (6) stets entscheiden, ob sie durch die Wurzel aus einer rationalen Function be-

friedigt werden kann, und finden zugleich, wenn die Entscheidung im bejahenden Sinne erfolgt, die sämmtlichen Lösungen von der gedachten Beschaffenheit.

Ergiebt sich, dass, abgesehen von einem constanten Factor, nur ein Integral existirt, welches gleich der Wurzel aus einer rationalen Function ist, so ist das allgemeine Integral von (6) nicht algebraisch; allgemein können wir sagen:

Durch Anwendung der Methode der Nr. 178 auf die Differentialgleichung (6) können wir feststellen

1) ob ein einziges particuläres Integral algebraisch ist,
2) ob die Differentialgleichung (6) dem cyklischen Falle angehört.

Wenn also die Anwendung dieser Methode ein negatives Resultat ergiebt, so hat die Differentialgleichung entweder kein algebraisches Integral, oder sie gehört dem Dieder-, Tetraeder-, Oktaeder- oder Ikosaeder-Typus an.

Soll die Differentialgleichung dem Dieder-Typus angehören, so muss eine quadratische Form ihrer Integrale gleich der Wurzel aus einer rationalen Function sein. Denken wir uns nach der Methode der Nr. 185 die Differentialgleichung dritter Ordnung aufgestellt, der die homogenen Functionen zweiten Grades der Integrale y_1, y_2 von (6) genügen, so können wir diese Differentialgleichung mit Hülfe des Verfahrens der Nr. 178 daraufhin untersuchen, ob eine Lösung derselben die Wurzel aus einer rationalen Function ist.

Wenn sich das Vorhandensein einer solchen Lösung ergiebt, so liefert das angewandte Verfahren zugleich den expliciten Ausdruck $\varphi(x)$ dieser Lösung; es ist also in diesem Falle

$$(11) \qquad a_0 y_1^2 + a_1 y_1 y_2 + a_2 y_2^2 = \varphi(x),$$

wo die a_0, a_1, a_2 Constanten bedeuten, für welche

$$(12) \qquad a_1^2 - 4a_0 a_2 \neq 0$$

ist, da sonst schon eine homogene Function ersten Grades der y_1, y_2 gleich der Wurzel aus einer rationalen Function wäre.

Nun ist offenbar

$$(13) \qquad \eta = \frac{y_2}{y_1} = C\int \frac{dx}{y_1^2},$$

wo C eine Constante bedeutet, setzen wir also

$$a_0 + a_1 \eta + a_2 \eta^2 = f(\eta),$$

so erhalten wir durch Differentiation der Gleichung

$$(14)\qquad f(\eta) = \frac{\varphi(x)}{y_1^2}$$

die Gleichung

$$(15)\qquad C\frac{d\log f(\eta)}{d\eta} = y_1^2\frac{d\log\varphi(x)}{dx} - 2y_1\frac{dy_1}{dx}.$$

Differentiiren wir diese Gleichung noch einmal, ersetzen die zweite Ableitung von y_1 durch den aus (6) folgenden Werth

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = p(x)y_1$$

und eliminiren dann aus der so entstehenden Gleichung und den Gleichungen (13), (14), (15) die Grössen

$$\frac{d\eta}{dx},\ y_1,\ \frac{dy_1}{dx},$$

so erhalten wir

$$C^2\left[2f(\eta)\frac{d^2f(\eta)}{d\eta^2} - \left(\frac{df(\eta)}{d\eta}\right)^2\right] = \varphi(x)^2\left[\left(\frac{d\log\varphi(x)}{dx}\right)^2 + 2\frac{d^2\log\varphi(x)}{dx^2} - 4p(x)\right]$$

oder einfach

$$(16)\quad C^2(4a_0a_2 - a_1^2) = \varphi(x)^2\left[\left(\frac{d\log\varphi(x)}{dx}\right)^2 + 2\frac{d^2\log\varphi(x)}{dx^2} - 4p(x)\right].$$

Den Werth der Constanten

$$c = C^2(4a_0a_2 - a_1^2)$$

können wir z. B. dadurch bestimmen, dass wir auf der rechten Seite der Gleichung (16) für x einen besonderen Werth einsetzen. Wir erkennen zugleich aus dieser Gleichung, dass $\varphi(x)$ die **Quadratwurzel** aus einer rationalen Function sein muss.

Setzen wir

$$\frac{-c}{4\varphi(x)^2} = \psi(x),$$

so ergiebt sich aus (16)

$$p(x) = \frac{5}{16}\left(\frac{d\log\psi(x)}{dx}\right)^2 - \frac{1}{4\psi(x)}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \psi(x).$$

Die Differentialgleichung (6) besitzt demgemäss die beiden Lösungen:

$$y_1 = [\psi(x)]^{-\frac{1}{4}}e^{\int\sqrt{\psi(x)}\,dx},\quad y_2 = [\psi(x)]^{-\frac{1}{4}}e^{-\int\sqrt{\psi(x)}\,dx}.$$

Diese Integrale sind dann und nur dann algebraisch, wenn

$$\int\sqrt{\psi(x)}\,dx$$

der Logarithmus einer algebraischen Function ist, die Entscheidung darüber erfolgt (vergl. Nr. 190, Bd. II, 1, S. 226) durch Untersuchung eines Systems linearer Gleichungen.

Wenn keine homogene Function zweiten Grades der y_1, y_2 (und auch keine ersten Grades) die Wurzel aus einer rationalen Function ist, so muss, wenn die Differentialgleichung (6) algebraisch integrirbar sein soll, eine Form vierten, sechsten oder zwölften Grades der y_1, y_2, die keine Potenz eine Form niedrigeren Grades ist, gleich der Wurzel aus einer rationalen Function sein.

Wir werden also nach der Methode der Nr. 185 die Differentialgleichungen fünfter, siebenter und dreizehnter Ordnung aufstellen, der die vierten, sechsten, zwölften Potenzen der Integrale von (6) genügen, und diese nach dem in der Nr. 178 gelehrten Verfahren daraufhin untersuchen, ob sie durch die Wurzel aus einer rationalen Function befriedigt werden können.

Erfolgt die Entscheidung für alle drei Differentialgleichungen in verneinendem Sinne, so ist die vorgelegte Differentialgleichung (6) nicht algebraisch integrirbar. Es gilt aber auch das Umgekehrte, d. h. wenn eine der erwähnten drei Differentialgleichungen durch die Wurzel aus einer rationalen Function befriedigt wird, so ist die Differentialgleichung (6) algebraisch integrirbar.

Die Richtigkeit dieser letzteren Behauptung folgt unmittelbar aus einem Satze von Herrn Fuchs, den wir jetzt darzulegen haben.

301. Satz von Fuchs zur Entscheidung über die algebraische Integrirbarkeit einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Wenn für eine Differentialgleichung (6) eine aus dem Fundamentalsysteme y_1, y_2 gebildete Form von höherem als dem zweiten Grade, die nicht eine Potenz einer Form niedrigeren Grades ist, gleich der Wurzel aus einer rationalen Function gefunden wird, so ist die Differentialgleichung (6) algebraisch integrirbar.

In der That sei

$$(17)\quad M(y_1, y_2) = a_0 y_1^\varkappa + a_1 y_1^{\varkappa-1} y_2 + \cdots + a_\varkappa y_2^\varkappa = y_1^\varkappa m(\eta) = \varphi(x),$$

wo $\varkappa > 2$ ist und $\varphi(x)$ die Wurzel aus einer rationalen Function bedeutet, so folgt durch logarithmische Differentiation dieser Gleichung mit Rücksicht auf (13)

$$(18)\qquad C\frac{d\log m(\eta)}{d\eta} = y_1^2\,\frac{d\log\varphi(x)}{dx} - \varkappa y_1\,\frac{dy_1}{dx}.$$

Differentiirt man noch einmal, beachtet abermals die Gleichung (13), und ersetzt die zweite Ableitung von y_1 durch ihren aus (6) folgenden Werth

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = p(x) y_1,$$

so ergiebt sich

$$(19)\qquad C^2 \frac{d^2 \log m(\eta)}{d\eta^2} = 2 y_1^{\,3} \frac{dy_1}{dx} \frac{d \log \varphi(x)}{dx} + q(x) y_1^{\,4} - \varkappa y_1^{\,2} \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2,$$

wo

$$(20)\qquad q(x) = \frac{d^2 \log \varphi(x)}{dx^2} - \varkappa p(x)$$

gesetzt wurde. Eliminirt man aus den Gleichungen (17), (18), (19) die Grössen

$$y_1, \quad \frac{dy_1}{dx},$$

so erhält man

$$(21)\ C^2 \left\{\varkappa \frac{d^2 \log m(\eta)}{d\eta^2} + \left(\frac{d \log m(\eta)}{d\eta}\right)^2\right\} [m(\eta)]^{\frac{4}{\varkappa}} = \left(\frac{d \log \varphi(x)}{dx} + \varkappa q(x)\right) [\varphi(x)]^{\frac{4}{\varkappa}}.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich η als algebraische Function von x, und die Gleichungen

$$y_1 = \sqrt{\frac{dx}{d\eta}}, \quad y_2 = \eta \sqrt{\frac{dx}{d\eta}}$$

liefern demnach y_1, y_2 als algebraische Functionen von x, wenn die Gleichung (21) keine Identität ist. Es soll nun gezeigt werden, dass das letztere nicht der Fall sein kann.

Sollte (21) eine Identität sein, so müsste die linke Seite dieser Gleichung von η unabhängig sein. Nun ist zunächst $m(\eta)$ nicht identisch Null, ebenso wenig kann aber

$$\varkappa \frac{d^2 \log m(\eta)}{d\eta^2} + \left(\frac{d \log m(\eta)}{d\eta}\right)^2 = 0$$

sein, da sonst

$$m(\eta) = c_1 (\eta - c_2)^\varkappa$$

wäre, wo c_1, c_2 Constanten bedeuten. Es könnte also nur noch

$$(22)\qquad \left[\varkappa \frac{d^2 \log m(\eta)}{d\eta^2} + \left(\frac{d \log m(\eta)}{d\eta}\right)^2\right] [m(\eta)]^{\frac{4}{\varkappa}} = r$$

sein, wo r eine von Null verschiedene und von η unabhängige Grösse bedeutet.

Der erste Factor der linken Seite von (22) ist eine rationale Function von η, also müsste, wenn die Gleichung (22) bestünde,

$$[m(\eta)]^{\frac{4}{\varkappa}} = g(\eta)$$

eine rationale Function von η sein. Daraus folgte aber

$$m^4(\eta) = g^\varkappa(\eta). \tag{23}$$

Sei nun in lineare Factoren zerlegt

$$M(y_1, y_2) = \prod_{\lambda=1}^{\nu} (c_{\lambda 1} y_1 + c_{\lambda 2} y_2)^{\alpha_\lambda},$$

wo also

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu} \alpha_\lambda = \varkappa$$

ist, dann können die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\nu$ keinen gemeinsamen Theiler besitzen, da sonst $M(y_1, y_2)$ die Potenz einer Form niedrigeren Grades wäre. Aus (23) folgt aber

$$\prod_{\lambda=1}^{\nu} (c_{\lambda 1} + c_{\lambda 2}\,\eta)^{4\alpha_\lambda} = g^\varkappa(\eta),$$

es müsste also $\varkappa$ ein gemeinsamer Theiler der Zahlen

$$4\alpha_1, \; 4\alpha_2, \; \cdots \; 4\alpha_\nu$$

sein, d. h. es wäre, da die $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\nu$ theilerfremd sind,

$$\varkappa = 4.$$

In diesem Falle ist die linke Seite von (22)

$$4\,\frac{d^2 m(\eta)}{d\eta^2} - \frac{3}{m(\eta)}\left(\frac{d\,m(\eta)}{d\eta}\right)^2; \tag{24}$$

da aber $m(\eta)$ mindestens zwei ungleiche lineare Factoren enthält kann nicht

$$\left(\frac{d\,m(\eta)}{d\eta}\right)^2$$

durch $m(\eta)$ theilbar sein, darum kann sich der Ausdruck (24) nicht auf eine Constante r reduciren.

Man kann also in der That durch rein rationale Processe für eine vorgelegte Differentialgleichung (6) entscheiden

1) ob dieselbe kein algebraisches Integral besitzt,
2) ob sie ein und nur ein algebraisches Integral zulässt,
3) ob sie algebraisch integrirbar ist.

Für die algebraisch integrirbaren linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten haben wir durch den Klein'schen Satz der Nr. 299 (S. 151) so zu sagen eine explicite Form gefunden; wir sind nämlich im Stande, fünf Typen von Differentialgleichungen hinzuschreiben, die noch eine willkürliche rationale Function $\varphi(x)$ und eine beliebige Wurzel aus einer rationalen Function λ enthalten, und aus denen jede algebraisch integrirbare lineare Differentialgleichung durch Specialisirung hervorgehen muss.

Offenbar ist dadurch zugleich die Aufgabe gelöst, alle endlichen Gruppen homogener linearer Substitutionen in zwei Variabeln y_1, y_2, beziehungsweise projectiver Substitutionen in einer Variabeln η zu finden. In der That ist klar, dass, wenn ϑ irgend eine endliche Gruppe projectiver Substitutionen von η bedeutet, und wir durch

$$\eta, \eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{\nu-1}$$

die Werthe bezeichnen, die aus η durch die Substitutionen von ϑ hervorgehen, der Ausdruck

$$\frac{(\eta - a)(\eta_1 - a)\cdots(\eta_{\nu-1} - a)}{(\eta - b)(\eta_1 - b)\cdots(\eta_{\nu-1} - b)} = Z,$$

wo a, b zwei unbestimmte Constanten sind, eine Grösse Z definirt, für welche die Schwarz'sche Ableitung

$$\Delta\binom{\eta}{Z} = R(Z)$$

wird, wo $R(Z)$ eine rationale Function von Z bedeutet. Wir haben also unmittelbar η als den Integralquotienten einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren projective Monodromiegruppe mit ϑ übereinstimmt, und deren unabhängige Variable Z als rationale Function von η erscheint. Diese Differentialgleichung muss dann, indem wir Z gleich einer linear gebrochenen Function von z setzen, in einen der fünf Typen, die wir aufgestellt hatten, übergehen. Im cyklischen Falle besteht die Gruppe, wie bereits erwähnt, aus den Potenzen einer periodischen elliptischen Substitution, in den übrigen vier Fällen erhalten wir die Substitutionen der entsprechenden Gruppe, indem wir z. B. die allgemeine Primform in ihre linearen Factoren zerlegen.

Auf diese Weise sind also alle endlichen algebraischen Untergruppen der allgemeinen linearen homogenen Gruppe L für den Fall zweier Variabeln gefunden.

302. Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die durch Wurzeln aus rationalen Functionen befriedigt werden.

Verweilen wir noch einen Augenblick bei der Betrachtung der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die durch die Wurzel aus einer rationalen Function befriedigt werden können, ohne algebraisch integrirbar zu sein.

Nehmen wir gleich allgemein eine lineare Differentialgleichung

$$(A_2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + 2p\frac{dy}{dx} + qy = 0,$$

die ein Integral y_1 besitzt, dessen logarithmische Ableitung dem Rationalitätsbereiche angehört. Sind dann die Coefficienten p, q rationale Functionen von x, gehört ferner (A_2) zur Fuchs'schen Classe, und sind die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen rationale Zahlen, so ist y_1 die Wurzel aus einer rationalen Function.

Sei y_2 ein zweites, von y_1 wesentlich verschiedenes Integral von (A_2), so müssen die Substitutionen der Transformationsgruppe G von (A_2) offenbar die Form haben

$$(25) \qquad \begin{cases} \eta_1 = \alpha y_1, \\ \eta_2 = \beta y_1 + \gamma y_2. \end{cases}$$

Diese Substitutionen (25) bilden aber bei willkürlicher Wahl der α, β, γ eine Gruppe, und zwar offenbar eine algebraische Untergruppe der allgemeinen linearen homogenen Gruppe L. Diese Gruppe G ist also die Transformationsgruppe einer Differentialgleichung (A_2), die eine Lösung mit rationaler logarithmischer Ableitung besitzt.

Betrachten wir eine beliebige Differentialgleichung (A_2), deren Transformationsgruppe also L selbst ist. Die rationale Differentialfunction

$$\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dx}$$

ist dann eine charakteristische Invariante der Untergruppe G; wir fragen nach der Resolvente, der diese Function Genüge leistet.

Nehmen wir an Stelle der logarithmischen Ableitung von y_1 den Ausdruck

$$u_1 = \frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dx} + p,$$

so bleibt derselbe nicht nur bei den Transformationen von G, sondern auch dann ungeändert, wenn wir von der Differentialgleichung (A_2) durch die Substitution

$$y = \lambda \mathfrak{y}$$

zu einer äquivalenten Differentialgleichung übergehen. Wählen wir also λ so, dass die Differentialgleichung für $\mathfrak{y}$ die canonische Form

$$(\mathfrak{A}_2) \qquad \frac{d^2\mathfrak{y}}{dx^2} = \left(p^2 + \frac{dp}{dx} - q\right)\mathfrak{y}$$

erhält, so ergiebt sich unmittelbar

$$u_1 = \frac{1}{\mathfrak{y}_1}\frac{d\mathfrak{y}_1}{dx}, \qquad \frac{du_1}{dx} = \frac{1}{\mathfrak{y}_1}\frac{d^2\mathfrak{y}_1}{dx^2} - u_1^2,$$

d. h. u_1 genügt der Differentialgleichung erster Ordnung

$$(26) \qquad \frac{du}{dx} + u^2 + q - p^2 - \frac{dp}{dx} = 0,$$

die also die gesuchte Resolvente darstellt.

Man bezeichnet eine Differentialgleichung von der Form (26) gewöhnlich als eine Riccati'sche Differentialgleichung. Wir können dann sagen:

Damit die Differentialgleichung (A_2) ein Integral mit rationaler logarithmischer Ableitung besitze, ist erforderlich und hinreichend, dass die Riccati'sche Differentialgleichung (26) durch eine rationale Function befriedigt werde.

Sei $R(x)$ diese rationale Lösung von (26), so ist also

$$q = p^2 + \frac{dp}{dx} - \frac{dR}{dx} - R^2,$$

d. h. eine Differentialgleichung (A_2), die ein Integral mit rationaler logarithmischer Ableitung besitzt, hat die Form

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2p\frac{dy}{dx} + \left(p^2 + \frac{dp}{dx} - \frac{dR}{dx} - R^2\right)y = 0,$$

wo R eine beliebige rationale Function bedeutet.

Eine solche Differentialgleichung ist stets durch Quadraturen integrirbar; man erhält nämlich

$$y_1 = e^{\int (R(x) - p)\,dx}, \quad y_2 = y_1 \int e^{-2\int R(x)\,dx}\,dx.$$

Die Gruppe G ist eine continuirliche, sie wird nämlich aus den drei infinitesimalen Transformationen

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad y_1 \frac{\partial f}{\partial y_2}, \quad y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2}$$

erzeugt. In derselben sind alle continuirlichen algebraischen Untergruppen von L als Untergruppen enthalten, wenn man von der speciellen linearen Gruppe $\overline{L}$ absieht. Man findet nämlich durch einfache Discussion, dass ausser $\overline{L}$ und G nur folgende continuirliche algebraische Untergruppen von L möglich sind:

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial y_2}, \quad a_1 y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + a_2 y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2},$$
$$y_1 \frac{\partial f}{\partial y_2}, \quad y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2},$$
$$y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2},$$
$$a_1 y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + a_2 y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2},$$
$$y_1 \frac{\partial f}{\partial y_2},$$
$$y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2}.$$

Wir haben die Gruppen durch die infinitesimalen Transformationen charakterisirt, aus denen dieselben erzeugt sind; a_1, a_2 bedeuten zwei beliebige von einander verschiedene Constanten, deren Verhältniss rational sein muss, damit die betreffende Untergruppe eine algebraische sei. Eine weitere Discussion dieser Gruppen führt zu keinem bemerkenswerthen Ergebnisse.

Von einer Differentialgleichung, die ein Integral mit rationaler logarithmischer Ableitung besitzt, kann man durch eine Substitution

$$y = \lambda \mathfrak{y}$$

zu einer Differentialgleichung übergehen, die durch eine ganze rationale Function befriedigt wird (vergl. Nr. 178, Bd. II, 1, S. 172), sofern man voraussetzt, dass die Differentialgleichung etwa rationale Coefficienten besitzt und zur Fuchs'schen Classe gehört. Die Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren eine Lösung eine ganze rationale Function ist, sind in der Potentialtheorie von hervorragender Bedeutung. Sie besitzen aber auch ein hervorragendes analytisches Interesse, besonders durch die ausgezeichneten Eigenschaften, die für die Nullstellen jener ganzen rationalen Integrale bestehen. In der neueren Zeit haben sich besonders die Herren Hurwitz und Klein mit darauf bezüglichen Untersuchungen beschäftigt; wir begnügen uns damit, auf diese Fragen hinzuweisen.

303. **Das Poincaré'sche Princip für den Fall von drei singulären Punkten.**

Wir wollen nunmehr eine Verallgemeinerung der für die Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe entwickelten Resultate darlegen, die nach der Richtung des in dem elften Abschnitte verfolgten Gedankenganges liegt und von Herrn Poincaré herrührt. Die Bedeutung

dieser Verallgemeinerung wird am klarsten hervortreten, wenn wir für die Gauss'sche Differentialgleichung das Princip zur Anwendung bringen, vermöge dessen Herr Poincaré aus der in Rede stehenden Verallgemeinerung das Resultat erzielt hat, dass sich für jede lineare Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten abhängige und unabhängige Variable als eindeutige Functionen eines Parameters darstellen lassen.

Wir hatten gezeigt, dass die Function, die aus der Dreiecksfunction

$$\eta = s(\delta_1, \delta_2, \delta_3, z)$$

durch Umkehrung hervorgeht, wenn die δ_1, δ_2, δ_3 die Form

$$\delta_\varkappa = \frac{1}{g_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

besitzen, wo g_1, g_2, g_3 positive ganze Zahlen oder unendlich gross sind, eine eindeutige Function ist, die innerhalb eines einfach zusammenhängenden von den Unbestimmtheitsstellen begrenzten Bereiches existirt und bei Anwendung einer gewissen discontinuirlichen Gruppe ϑ projectiver Substitutionen ungeändert bleibt. Innerhalb des Fundamentalbereiches dieser Gruppe nimmt die Function z von η jeden Werth mit Ausnahme von 0, 1, ∞ einmal und nur einmal an.

Sei nun eine Function

$$y = f(x)$$

vorgelegt, die sich in der Umgebung jeder Stelle der x-Ebene, mit Ausnahme der Stellen 0, 1, ∞, eindeutig verhält. Wenn die Function $f(x)$ die Eigenschaft hat, dass jeder ihrer Zweige nach einer endlichen Anzahl von Umkreisungen der Punkte 0, 1, ∞ zu seinem Ausgangswerthe zurückkehrt, so bezeichnen wir mit h_1 die kleinste positive ganze Zahl, die so beschaffen ist, dass jeder Zweig von y nach h_1-maliger Umkreisung des Punktes $x = 0$ zu seinem Ausgangswerthe zurückkehrt, und mit h_2, h_3 die analogen Zahlen für $x = 1$ und $x = \infty$. Falls es für einen der Verzweigungspunkte 0, 1, ∞ keine endliche ganze Zahl giebt, die die Anzahl der erforderlichen Umläufe liefert, nach deren Ausführung jeder Zweig von $f(x)$ zu seinem Anfangswerthe zurückkehrt, so nehmen wir das entsprechende $h_\varkappa$ unendlich gross. Setzen wir dann

$$(1) \qquad \eta = s\left(\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, \frac{1}{h_3}, x\right),$$

so ist y eine eindeutige Function von η.

In der That ist y als Function von η in der Umgebung jeder Stelle des Existenzbereiches der durch die Gleichung (1) definirten Function x von η eindeutig, also unverzweigt, und da der Existenz-

bereich der Umkehrungsfunction der Dreiecksfunction η ein einfach zusammenhängender ist, so y eine allenthalben eindeutige Function von η. Da x ebenfalls eindeutig in η ist, so haben wir also die functionale Beziehung zwischen y und x dadurch dargestellt, dass wir beide Variable als eindeutige Functionen der durch die Gleichung (1) definirten dritten Variabeln η ausdrücken.

Wenn die Function y von x nicht die Verzweigungspunkte $0, 1, \infty$, sondern drei beliebige Verzweigungsstellen a, b, c besitzt, so haben wir an Stelle der Gleichung (1) die Gleichung

$$\eta = s\left(\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, \frac{1}{h_3}, \frac{x-a}{x-c}\,\frac{b-c}{b-a}\right)$$

zur Definition von η anzuwenden.

Wir sind also auf Grund des angewandten Princips, welches wir als das Poincaré'sche Princip bezeichnen wollen, in der Lage, für jede Function y von x, die nur drei Verzweigungspunkte besitzt, einen als Dreiecksfunction definirten Parameter η anzugeben, als dessen eindeutige Functionen die beiden Variabeln y und x darstellbar sind.

Diese Darstellung ist also stets anwendbar, wenn y als Function von x durch eine algebraische Gleichung mit nur drei Verzweigungspunkten, oder als das Integral einer linearen Differentialgleichung mit drei wesentlichen singulären Punkten definirt ist. Insbesondere werden wir also, wenn eine Gauss'sche Differentialgleichung vorgelegt ist,

$$(2)\qquad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0,$$

den Parameter η in folgender Weise bestimmen können.

Falls die Zahlen

$$(3)\qquad 1-\gamma, \qquad \gamma-\alpha-\beta, \qquad \alpha-\beta$$

rational sind, so nehmen wir h_1, h_2, h_3 der Reihe nach gleich den Nennern dieser als reducirte Brüche geschriebenen Zahlen; falls eine der Zahlen (3) gleich Null oder nicht rational ist, so haben wir das entsprechende $h_\varkappa$ unendlich gross zu wählen. Der Parameter η ist dann durch die Gleichung (1) definirt.

Seien nun insbesondere die Zahlen (3) selbst reciproke ganze Zahlen oder Null, und bezeichne ζ einen Integralquotienten:

$$\zeta = s(|1-\gamma|, \ |\gamma-\alpha-\beta|, \ |\alpha-\beta|, \ x)$$

von (2), so ist x eine eindeutige Function von ζ. Seien ferner h_1, h_2, h_3 drei ganze Zahlen, die der Reihe nach durch die Nenner der Zahlen (3) theilbar sind; sollte einer dieser Nenner unendlich gross sein, so wäre auch das entsprechende $h_\varkappa$ unendlich gross zu nehmen;

andererseits ist, wenn ein h_x unendlich gross genommen wird, die Bedingung der Theilbarkeit durch jede ganze Zahl als erfüllt anzusehen.

Auf Grund des Poincaré'schen Princips ist dann ζ ebensowohl wie jede Lösung der Differentialgleichung (2) eine eindeutige Funtion von

$$\eta = s\left(\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, \frac{1}{h_3}, x\right),$$

und wir sagen von der Dreiecksfunction η, beziehungsweise von der zugehörigen Gauss'schen Differentialgleichung, sie sei der Dreiecksfunction ζ, beziehungsweise der Differentialgleichung (1) untergeordnet oder subordinirt.

Es ist evident, dass, wenn für eine Function y von x die Dreiecksfunction ζ den Parameter der eindeutigen Darstellung liefert, auch jede der Function ζ untergeordnete Dreiecksfunction η die Eigenschaft besitzt, dass y und x als eindeutige Functionen derselben erscheinen.

Nun ist offenbar die inverse Function der Modulfunction

$$\tau = s(0, 0, 0, x) \tag{4}$$

jeder eindeutig umkehrbaren Dreiecksfunction untergeordnet, wir schliessen also, dass für jede Function

$$y = f(x),$$

die nur die drei Verzweigungspunkte 0, 1, ∞ besitzt, die Grösse τ einen Parameter liefert, durch welchen sich y und x eindeutig darstellen lassen.

Diese merkwürdige Eigenschaft der Modulfunction beruht auf dem Umstande, dass x als Function von τ die drei Werthe 0, 1, ∞ innerhalb des einfach zusammenhängenden Bereiches der τ-Ebene, wo sich x wie eine rationale Function verhält, überhaupt nicht annimmt, d. h. wie wir uns kurz ausdrücken wollen, darauf, dass die Modulfunction die drei Werthe 0, 1, ∞ auslässt, ähnlich wie die Exponentialfunction

$$e^u$$

die Werthe 0 und ∞ auslässt. Die letztere Eigenschaft der Exponentialfunction bewirkt, dass eine Function

$$y = f(x),$$

die nur die beiden Verzweigungspunkte 0 und ∞ besitzt, eine eindeutige Function von u wird, wenn wir

$$x = e^u$$

setzen; ähnlich wird eine Function mit den drei Verzweigungspunkten 0, 1, ∞ eine eindeutige Function von τ, wenn wir x gleich der Modulfunction von τ nehmen.

Diese Eigenschaft der Modulfunction ist in einzelnen besonderen Fällen schon vor längerer Zeit bemerkt worden. So fallen z. B. unter dieselbe die Formeln, durch welche Jacobi in den „Fundamenta nova etc.“ die Grössen K, K', $\varkappa'$, $\log \varkappa^2$, $\log \varkappa'^2$ als eindeutige Functionen von τ darstellt. Bezeichnet man ferner durch

$$u^8 = \varkappa^2, \quad v^8 = \lambda^2$$

die Quadrate der Moduln zweier elliptischer Integrale erster Gattung, die durch eine Transformation vom Primzahlgrade n auseinander hervorgehen, so besitzt die zwischen u und v bestehende algebraische Gleichung

$$\Theta(u, v) = 0,$$

die sogenannte Modulargleichung, wie Herr Hermite gezeigt hat, die Eigenschaft, dass v als Function von u sich nur an den Stellen

$$u = 0, \quad u^8 - 1 = 0, \quad u = \infty$$

verzweigt. Hieraus folgt sofort die Möglichkeit der von Herrn Hermite gegebenen Darstellung von u und v als eindeutiger Functionen des zum Modul $\varkappa^2$ gehörigen Periodenquotienten τ, die für $n = 5$ die Auflösbarkeit der allgemeinen Gleichung fünften Grades durch elliptische Functionen nach sich zieht. Endlich hat Herr Klein die eindeutige Darstellbarkeit einer beliebigen Dreiecksfunction von x durch die Grösse τ bemerkt.

Wenn es gelänge, eine eindeutige Function

$$x = \varphi(\eta)$$

herzustellen, für welche der Bereich, wo sich diese Function wie eine rationale Function verhält, ein einfach zusammenhängender ist, und die σ beliebig vorgeschriebene complexe Werthe

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma$$

auslässt, so würde jede Function y von x, die keine anderen Verzweigungspunkte wie $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ besitzt, vermöge des Poincaré'schen Princips als eindeutige Function von η darstellbar sein; man könnte also mit Hülfe einer solchen Function die allgemeine Lösung einer linearen Differentialgleichung mit der unabhängigen Variabeln x, deren sämmtliche wesentliche singuläre Stellen unter den $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ enthalten sind, simultan mit x als eindeutige Function des Parameters η darstellen, ähnlich wie man die durch eine algebraische Gleichung vom Range Null verknüpften Variabeln als rationale, die durch eine Gleichung vom Range Eins verknüpften als elliptische Functionen eines Parameters darstellt.

Die Untersuchungen von Herrn **Poincaré** haben gelehrt, dass eine solche Function in der That stets angegeben werden kann und zwar erscheint dieselbe als die Umkehrungsfunction des Integralquotienten einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten. Wir werden im Folgenden diese Untersuchungen darzulegen haben, und beschränken uns dabei auf diejenigen Fälle, die für die Erreichung unseres Zieles, d. h. für die Darstellung der abhängigen und unabhängigen Variabeln einer linearen Differentialgleichung als eindeutige Functionen eines Parameters ausreichend sind.

Fünfzehnter Abschnitt.

Theorie der Fuchs'schen Functionen.

Erstes Kapitel.

304. **Fuchs'sche Gruppen. Zwei Beispiele. Bedingungen für die Discontinuität.**

Wir hatten am Schlusse der Nr. 216 (Bd. II, 1, S. 346) die Frage aufgeworfen, ob sich in der Differentialgleichung

(1)
$$\frac{d^2y}{dz^2} = q(z)y,$$

wo $q(z)$ durch die Formel

(1a)
$$q(z) = \frac{1}{\prod\limits_{\lambda=1}^{\sigma}(z-a_\lambda)} \left\{ -\frac{1}{4}(1-\delta^2_{\sigma+1})E_{\sigma-2}(z) - \sum_{\lambda=1}^{\sigma}\frac{(a_\lambda-a_1)\cdots(a_\lambda-a_\sigma)}{z-a_\lambda}\,\frac{1}{4}(1-\delta^2_\lambda)\right\}$$

gegeben ist, und wo die Grössen

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \cdots\ \delta_\sigma,\ \delta_{\sigma+1}$$

als reciproke ganze Zahlen oder Null vorausgesetzt werden, die Coefficienten der ganzen Function vom Grade $\sigma - 2$ $E_{\sigma-2}(z)$ so bestimmen lassen, dass die unabhängige Variable z eine eindeutige Function des Integralquotienten η wird. Wir werden diese Frage nicht in ihrer vollen Allgemeinheit behandeln, sondern die Existenz von Differentialgleichungen von der gewünschten Beschaffenheit zu erweisen suchen, die als die unmittelbare Verallgemeinerung derjenigen Gauss'schen Differentialgleichungen erscheinen, die zu eindeutig umkehrbaren Dreiecksfunctionen erster Art führen.

Wir behandeln zunächst die projective Monodromiegruppe ϑ, indem wir voraussetzen, dass die Substitutionen derselben Verschiebungen in dem in der Nr. 285 (S. 101) fixirten Sinne sind, und zwar möge der Orthogonalkreis O ein realer Kreis mit nicht verschwindendem Radius sein.

Eine discontinuirliche projective Gruppe ϑ, deren Substitutionen einen realen Kreis mit nicht verschwindendem Radius ungeändert lassen, nennt man nach Herrn Poincaré eine Fuchs'sche Gruppe.

Die zu den eindeutig umkehrbaren Dreiecksfunctionen erster Art gehörigen Gruppen ϑ sind also Fuchs'sche Gruppen.

Für diese war der Fundamentalbereich F_0 ein innerhalb des Orthogonalkreises gelegenes Kreisbogenviereck, dessen Seiten den Orthogonalkreis unter rechtem Winkel schneiden. Entsprechend den drei singulären Punkten

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \infty$$

hatten wir in F_0 drei Cykeln von Ecken mit den Winkelsummen

$$2\pi\delta_1, \quad 2\pi\delta_2, \quad 2\pi\delta_3.$$

Wir wollen nun allgemeine Gruppen ϑ betrachten, deren Fundamentalbereich F_0 die folgende Beschaffenheit besitzt.

1. In Bezug auf die Anordnung der Ecken und Seiten möge F_0 von der Art sein, wie der in der Nr. 211 (Bd. II, 1, S. 320) betrachtete Bereich F_0, d. h. F_0 sei begrenzt von 2σ einen zusammenhängenden Curvenzug bildenden Seiten

$$s_1, s_1', s_2, s_2', \cdots s_\sigma, s_\sigma'.$$

Diese σ Seitenpaare mögen durch gewisse gegebene Substitutionen $A_1, A_2, \cdots A_\sigma$, die wir als elliptische oder parabolische voraussetzen, in einander transformirt werden, und der Schnittpunkt $\lambda_\varkappa$ der Seiten $s_\varkappa$ und

$$s_\varkappa' = A_\varkappa s_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

sei ein Doppelpunkt von $A_\varkappa$, und zwar, wenn die Substitution $A_\varkappa$ eine elliptische ist, derjenige, der bei der canonischen Form

$$\frac{A_\varkappa \eta - \lambda_\varkappa}{A_\varkappa \eta - \mu_\varkappa} = e^{2\pi i \delta_\varkappa} \frac{\eta - \lambda_\varkappa}{\eta - \mu_\varkappa}$$

im Zähler auftritt, falls

$$0 < \delta_\varkappa < 1$$

ist. Ebenso sei der Schnittpunkt $\lambda_{\sigma+1}$ von s_1 und s_σ' ein Doppelpunkt der Substitution

$$A_{\sigma+1} = A_1^{-1} A_2^{-1} \cdots A_\sigma^{-1},$$

dann sind die Schnittpunkte $\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa)}$ von $s_\varkappa'$ und $s_\varkappa$ aus $\lambda_{\sigma+1}$ durch die Substitutionen $A_1 A_2 \cdots A_\varkappa$ transformirt,

$$\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa)} = A_1 A_2 \cdots A_\varkappa \lambda_{\sigma+1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots (\sigma - 1)),$$

und nach dem Satze II der Nr. 210 (Bd. II, 1, S. 310) sind die Winkel in den je einen Cyklus bildenden Ecken λ_x gleich $2\pi\delta_x$, während die Winkelsumme in den Ecken

$$\lambda_{\sigma+1},\quad \lambda'_{\sigma+1},\ \cdots\ \lambda^{(\sigma-1)}_{\sigma+1},$$

die zusammen einen Cyklus bilden, $2\pi\delta_{\sigma+1}$ beträgt.

2. Die Substitutionen

$$A_1,\ A_2,\ \cdots\ A_\sigma,\ A_{\sigma+1}$$

seien Verschiebungen in Bezug auf den gegebenen Orthogonalkreis O, und wenn $A_x\eta$ eine elliptische Substitution ist, so sei λ_x der innerhalb O gelegene Doppelpunkt derselben. Für eine parabolische Substitution wissen wir, dass ihr Doppelpunkt auf der Peripherie von O liegt.

3. Die Winkelsummen

$$2\pi\delta_1,\ 2\pi\delta_2,\ \cdots\ 2\pi\delta_\sigma,\ 2\pi\delta_{\sigma+1}$$

bei den $(\sigma+1)$ von den Ecken des Bereiches F_0 gebildeten Cykeln seien aliquote Theile von 2π oder Null.

4. Die Seiten von F_0 seien Kreisbogen, die den Orthogonalkreis O unter rechtem Winkel schneiden.

Um eine Vorstellung davon zu erlangen, welche Beschränkungen für die Fundamentalsubstitutionen $A_1, A_2, \cdots A_\sigma$ die gemachten Voraussetzungen über die Beschaffenheit von F_0 mit sich bringen, betrachten wir zwei einfache Beispiele.

Wir nehmen η so, dass der Orthogonalkreis O die reale η-Axe wird und betrachten die obere η-Halbebene als das Innere des Orthogonalkreises. Die Verschiebungen sind dann einfach dadurch charakterisirt, dass dieselben projective unimodulare Substitutionen

$$A\eta = \frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta},\qquad \alpha\delta-\beta\gamma=1,$$

mit realen Coefficienten sind.

Sei dann $\sigma=3$, und nehmen wir vier elliptische Substitutionen

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,$$

so haben dieselben zunächst der Bedingung

$$A_4A_3A_2A_1 = 1 \tag{2}$$

zu genügen. Denken wir uns ferner die Substitution A_x in der canonischen Form

$$\frac{A_x\eta-\lambda_x}{A_x\eta-\bar\lambda_x} = e^{2\pi i\delta_x}\,\frac{\eta-\lambda_x}{\eta-\bar\lambda_x}\qquad (x=1,2,3,4)$$

geschrieben, wo λ_x einen Punkt der oberen Halbebene, $\bar{\lambda}_x$ seinen conjugirten Punkt, δ_x eine reale positive Grösse bedeutet, so müssen die Zahlen

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3,\ \delta_4$$

reciproke ganze Zahlen sein. Diese beiden Beschränkungen sind aber noch nicht hinreichend. Es müssen die drei Punkte λ_1, λ_2, λ_3 noch so beschaffen sein, dass sie mit den Punkten

$$\lambda_4, \quad \lambda_4' = A_1 \lambda_4, \quad \lambda_4'' = A_2 \lambda_4' = A_3^{-1} \lambda_4$$

ein Sechseck bilden können, dessen Seiten Kreisbogen sind, deren Centren auf der realen Axe liegen und in welchem die Winkel bei λ_1, λ_2, λ_3 beziehungsweise gleich $2\pi\delta_1$, $2\pi\delta_2$, $2\pi\delta_3$ sind, und die Summe der Winkel bei λ_4, λ_4', λ_4'' genau $2\pi\delta_4$ beträgt.

Denken wir uns also die Punkte λ_1, λ_2, λ_3 durch Kreisbogen verbunden, deren Centren auf der realen Axe liegen, so muss das so entstehende Kreisbogendreieck bei λ_1, λ_2, λ_3 Winkel besitzen, die beziehungsweise kleiner sind als $2\pi\delta_1$, $2\pi\delta_2$, $2\pi\delta_3$. In Formeln lauten diese Bedingungen

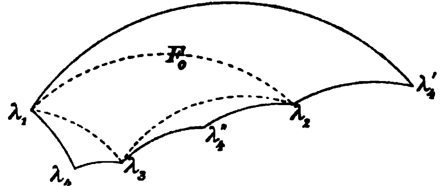


Fig. 29.

$$(3)\quad \begin{cases} \arg \dfrac{\lambda_2 - \lambda_1}{\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1} \cdot \dfrac{\bar{\lambda}_3 - \bar{\lambda}_1}{\lambda_3 - \lambda_1} < 2\pi\delta_1, \\[2ex] \arg \dfrac{\lambda_3 - \lambda_2}{\bar{\lambda}_3 - \bar{\lambda}_2} \cdot \dfrac{\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2}{\lambda_1 - \lambda_2} < 2\pi\delta_2, \\[2ex] \arg \dfrac{\lambda_1 - \lambda_3}{\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_3} \cdot \dfrac{\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_3}{\lambda_2 - \lambda_3} < 2\pi\delta_3. \end{cases}$$

Diese sind in Verbindung mit den beiden oben angegebenen Bedingungen nothwendig und hinreichend dafür, dass der Fundamentalbereich F_0 der aus der Basis

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$$

erzeugten Gruppe ϑ die verlangte Beschaffenheit habe (vergl. Fig. 29).

Wenn für $\sigma = 3$ die vier Substitutionen A_1, A_2, A_3, A_4 parabolische sein sollen, so müssen die Doppelpunkte λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 reale Grössen sein. Die Bedingung (2) muss erfüllt sein, und überdies müssen die Punkte

$$\lambda_1,\ \lambda_4,\ \lambda_3,\ \lambda_4'',\ \lambda_2,\ \lambda_4'$$

in dieser Reihenfolge aufeinander folgen, wenn man sich die reale η-Axe in der einen oder der anderen Richtung durchlaufen denkt. Die Substitutionen A_1, A_2, A_3, die beziehungsweise die Seiten s_1 in s_1', s_2 in s_2', s_3 in s_3' verwandeln (vergl. Fig. 30), lauten, da

$$\lambda_4 = A_3 \lambda_4'', \quad \lambda_4'' = A_2 \lambda_4', \quad \lambda_4' = A_1 \lambda_4$$

sein muss:

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{A_1 \eta - \lambda_1} = \dfrac{1}{\eta - \lambda_1} + \dfrac{1}{\lambda_4' - \lambda_1} - \dfrac{1}{\lambda_4 - \lambda_1}, \\ \dfrac{1}{A_2 \eta - \lambda_2} = \dfrac{1}{\eta - \lambda_2} + \dfrac{1}{\lambda_4'' - \lambda_2} - \dfrac{1}{\lambda_4' - \lambda_2}, \\ \dfrac{1}{A_3 \eta - \lambda_3} = \dfrac{1}{\eta - \lambda_3} + \dfrac{1}{\lambda_4 - \lambda_3} - \dfrac{1}{\lambda_4'' - \lambda_3}, \end{cases}$$

und die Bedingung, dass

$$A_4 = (A_3 A_2 A_1)^{-1}$$

eine parabolische Substitution sein soll, lässt sich in der Form

$$(5) \quad (\lambda_4 - \lambda_1)^2 (\lambda_4'' - \lambda_3)^2 (\lambda_4' - \lambda_2)^2 = (\lambda_4' - \lambda_1)^2 (\lambda_4 - \lambda_3)^2 (\lambda_4'' - \lambda_2)^2$$

darstellen, wo nach Ausziehen der Quadratwurzel auf beiden Seiten die Vorzeichen so zu bestimmen sind, dass dieselben bei der jeweils stattfindenden Lage der Punkte λ beiderseits übereinstimmen. Sind fünf von den Punkten λ bekannt, so ergiebt sich der sechste gemäss der Gleichung (5) durch einfache lineare Construction (vergl. Fig. 30), und

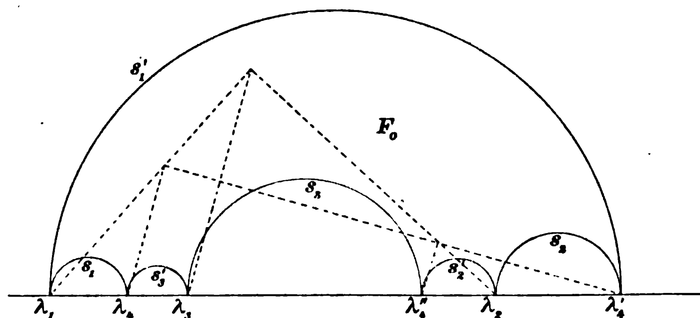


Fig. 30.

die Substitutionen A_1, A_2, A_3 sind dann durch die Formeln (4) bestimmt.

Wir behaupten nun: **Wenn der die Gruppe ϑ bestimmende Fundamentalbereich F_0 den Bedingungen 1. bis 4. Genüge leistet, so ist die Gruppe ϑ eine discontinuirliche, d. h. es kann sich niemals ereignen, dass die aus F_0 durch die Substitutionen von ϑ entstehenden Bereiche**

$$F_{\pm\varkappa_1, \pm\varkappa_2, \cdots \pm\varkappa_\nu}$$

einander überdecken.

Zufolge der in der Nr. 285 (S. 101, 102) für die als Verschiebungen charakterisirten projectiven Substitutionen zusammengestellten Sätze sind die Seiten $s'_\varkappa$ von F_0 schon von selbst Kreise, die den Orthogonalkreis O unter rechtem Winkel schneiden, sofern die Seiten $s_\varkappa$ als solche Kreise angenommen werden. Ferner liegt der Bereich F_0 ganz innerhalb von O, es werden folglich auch alle mit demselben congruenten Bereiche

$$F_{\pm\varkappa_1, \pm\varkappa_2, \cdots \pm\varkappa_\nu}$$

innerhalb O liegen und von Kreisen, die den Orthogonalkreis senkrecht schneiden, begrenzt werden.

Hiernach lässt sich der Discontinuitätsbeweis für die Gruppe ϑ in dem Falle, wo alle Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_\sigma, A_{\sigma+1}$$

parabolische und demnach alle Winkel von F_0 gleich Null sind, in genau derselben Weise führen, wie im Falle der Modulfunction (Nr. 272, S. 50).

In der That theilen die Seiten von F_0 das Innere von O in $2\sigma + 1$ Bereiche, nämlich F_0 selbst und die 2σ sichelförmigen Gebiete zwischen O und den 2σ Seiten von F_0. Der Bereich $F_{\pm\varkappa}$, der mit F_0 längs der Seite $s_\varkappa$, beziehungsweise $s'_\varkappa$ zusammenhängt, befindet sich dann ganz innerhalb der von dieser Seite und der Peripherie von O begrenzten Sichel. Gehen wir von $F_{\pm\varkappa}$ zu einem benachbarten Bereiche

$$F_{\pm\varkappa, \pm\iota}$$

über und fahren so fort, so werden wir, wenn auf diese Weise eine gewisse Anzahl von Bereichen

$$F_{\pm\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \pm\varkappa_\nu} \tag{6}$$

construirt worden ist, das Innere von O in eine Anzahl von Parzellen zerlegt haben, nämlich in die construirten Bereiche einerseits und die von den freien Seiten derselben und der Peripherie von O begrenzten Sicheln $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots$ andererseits.

Construiren wir nun weiter den mit einem der äussersten Bereiche (6) längs einer freien Seite zusammenhängenden Bereich, so liegt derselbe ganz innerhalb der von jener freien Seite begrenzten Sichel, es ist folglich nicht möglich, dass von den mit F_0 congruenten Bereichen zwei sich gegenseitig überdecken.

In dem allgemeinen Falle, wo einige der Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_\sigma, A_{\sigma+1}$$

oder auch alle diese Substitutionen elliptische sind, hat man das für die Dreiecksfunctionen in den Nummern 286, 287 benutzte Beweisverfahren anzuwenden. In der That wurde dasselbe a. a. O. so gefasst, dass es ohne weiteres auf den jetzt vorliegenden allgemeinen Fall anwendbar bleibt, man hat nur auf S. 109 (Zeile 10 v. u.) an die Stelle der dort in Betracht kommenden drei Substitutionen A_1, A_2, A_3 die $\sigma + 1$ Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_{\sigma+1}$$

zu setzen.

Dieses Beweisverfahren lehrt uns zugleich, dass die von der Gesammtheit der Bereiche

$$F_{\pm \varkappa_1, \pm \varkappa_2, \cdots \pm \varkappa_\nu}$$

gebildete Fläche F das Innere des Orthogonalkreises nicht nur einfach sondern auch lückenlos bedeckt und ferner, dass wenn wir statt von F_0 von dem ausserhalb O liegenden Spiegelbilde von F_0 ausgegangen wären, die Bereiche, die aus diesem Spiegelbilde durch die Substitutionen von ϑ hervorgehen, das Äussere von O einfach und lückenlos bedeckt haben würden.

Die durch F_0 bestimmte Gruppe ϑ ist also für zwei Continua von Punkten, nämlich für alle Punkte innerhalb und für alle Punkte ausserhalb von O eigentlich discontinuirlich, die Peripherie von O dagegen ist überall dicht besetzt von den Doppelpunkten der parabolischen und hyperbolischen Substitutionen der Gruppe ϑ.

305. Fuchs'sche Functionen. Die Fuchs'schen Thetareihen von Poincaré. Erster Ansatz zum Convergenzbeweise.

Der in den Nummern 213, 214 (Bd. II, 1, S. 327) gelieferte Existenzbeweis lehrt nun sofort, dass es Functionen $\mathfrak{X}$ von η giebt, die sich innerhalb F_0 wie rationale Functionen verhalten und bei den Substitutionen der Fuchs'schen Gruppe ϑ ungeändert bleiben. Wir nennen diese Functionen nach Herrn Poincaré Fuchs'sche Functionen von η. Dieselben sind (Nr. 216, Bd. II, 1, S. 345) eindeutige Functionen von η, die nur innerhalb der Fläche F, d. h. im Innern des Orthogonalkreises O existiren; sie lassen sich durch eine derselben, z, die innerhalb F_0 jeden Werth nur einmal annimmt, rational darstellen, und η ist als Function von z betrachtet der Integralquotient einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form (1).

Wenn wir die Function z dadurch fixiren, dass sie für

$$\eta = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_{\sigma+1}$$

beziehungsweise die Werthe

$$z = 0, 1, \infty$$

annehmen soll, so sind die übrigen singulären Stellen $a_3, a_4, \cdots a_\sigma$ von (1), die den Punkten

$$\eta = \lambda_3, \lambda_4, \cdots \lambda_\sigma$$

entsprechen, ebenso wie die übrigen in $q(z)$ enthaltenen Parameter eindeutig bestimmt.

Wir wollen nun eine Darstellung der Fuchs'schen Functionen kennen lernen, die uns zugleich einen neuen Beweis für die Existenz solcher Functionen, die zu einer Fuchs'schen Gruppe ϑ gehören, liefern wird. Diese Darstellung wird uns die Fuchs'schen Functionen als Quotienten zweier nach demselben Gesetze gebildeter unendlicher Reihen liefern, ähnlich wie man z. B. in der Theorie der elliptischen Functionen die eindeutigen doppeltperiodischen Functionen als Quotienten von Thetareihen darstellt. Die elliptischen ebensowohl, wie die in der Theorie der Abel'schen Functionen auftretenden Abel'schen Thetareihen sind dadurch ausgezeichnet, dass ihr Verhalten bei Vermehrung ihrer Argumente um Perioden aus ihrem Bildungsgesetze unmittelbar ersichtlich ist. Einer analogen Eigenschaft erfreuen sich die zur Darstellung der Fuchs'schen Functionen dienenden Reihenentwickelungen, die deshalb von ihrem Entdecker, Herrn Poincaré, als Fuchs'sche Thetareihen (séries théta-fuchsiennes) bezeichnet worden sind.

Diese Thetareihen sind einfache Bildungen, die symmetrisch sind in Bezug auf alle Substitutionen der Fuchs'schen Gruppe ϑ.

Bedeute $H(\eta)$ irgend eine rationale Function von η, die an keiner auf der Peripherie des Orthogonalkreises gelegenen Stelle unendlich wird, und sei m irgend eine ganze Zahl, die grösser ist als Eins. Bezeichnen wir ferner durch

$$(7)\qquad S_\nu \eta = \frac{\alpha_\nu \eta + \beta_\nu}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}, \quad \alpha_\nu \delta_\nu - \beta_\nu \gamma_\nu = 1, \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, \cdots),$$

die in irgend einer Reihenfolge genommenen Substitutionen der Fuchs'schen Gruppe ϑ, so ist

$$(8)\qquad \Theta(\eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} H\left(\frac{\alpha_\nu \eta + \beta_\nu}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}\right) \frac{1}{(\gamma_\nu \eta + \delta_\nu)^{2m}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} H(S_\nu \eta) \left(\frac{d S_\nu \eta}{d\eta}\right)^m$$

die allgemeine Form einer Fuchs'schen Thetareihe.

Das Verhalten dieser Reihe bei Anwendung einer Substitution $S_\varkappa$ auf η ergiebt sich unmittelbar. In der That haben wir

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} H(S_\nu S_\varkappa \eta)\left(\frac{d S_\nu S_\varkappa \eta}{d S_\varkappa \eta}\right)^m = \sum_{\nu=0}^{\infty} H(S_\nu S_\varkappa \eta)\left(\frac{d S_\nu S_\varkappa \eta}{d\eta}\right)^m \left(\frac{d\eta}{d S_\varkappa \eta}\right)^m.$$

Wenn S_ν für $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ die Gesammtheit aller Substitutionen der Gruppe ϑ darstellt, so gilt zufolge der Gruppeneigenschaft das Gleiche von den Substitutionen

$$S_\nu S_\varkappa \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots);$$

es ist folglich

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} H(S_\nu S_\varkappa \eta)\left(\frac{d S_\nu S_\varkappa \eta}{d\eta}\right)^m = \sum_{\nu=0}^{\infty} H(S_\nu \eta)\left(\frac{d S_\nu \eta}{d\eta}\right)^m,$$

d. h. wir haben die wichtige Gleichung

$$(9) \qquad \Theta(S_\varkappa \eta) = \left(\frac{d\eta}{d S_\varkappa \eta}\right)^m \Theta(\eta) = (\gamma_\varkappa \eta + \delta_\varkappa)^{2m} \Theta(\eta).$$

Die Convergenz der Thetareihen vorausgesetzt, lassen sich auch leicht eindeutige Functionen herstellen, die zur Gruppe ϑ gehören.

Bilden wir nämlich zwei Thetareihen $\Theta_1(\eta)$, $\Theta_2(\eta)$, die zu demselben Werthe von m gehören, so ist der Quotient

$$\frac{\Theta_2(\eta)}{\Theta_1(\eta)} = f(\eta)$$

zufolge der Gleichung (9) eine eindeutige Function von η, die bei den Substitutionen der Gruppe ϑ ungeändert bleibt.

Es handelt sich nun darum, die Convergenz der Reihe (8) zu erweisen; hierfür hat Herr Poincaré zwei verschiedene Methoden angegeben, deren jede ihre eigenthümlichen Vorzüge darbietet. Wir wollen darum beide hier darlegen.

Beiden Methoden gemeinsam ist der Nachweis, dass die Convergenz der Reihe (8) aus der Convergenz der Reihe

$$(10) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \left|\frac{d S_\nu \eta}{d\eta}\right|^m = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left|\frac{1}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}\right|^{2m}$$

folgt. Dieser Nachweis lässt sich sofort erbringen.

In der That, bedeute η einen Werth, der weder eine Unendlichkeitsstelle der rationalen Function $H(\eta)$ ist, noch mit einem solchen Werthe correspondirt, dann ist für dieses η

$$H(S_\nu \eta) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

stets endlich. Wir können also eine positive Grösse M so angeben, dass

$$|H(S_\nu \eta)| < M, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots);$$

dann ist aber

$$\left| H(S_\nu \eta) \left(\frac{d S_\nu \eta}{d\eta}\right)^m \right| < \frac{M}{|\gamma_\nu \eta + \delta_\nu|^{2m}},$$

d. h. der absolute Betrag jedes Gliedes der Reihe (8) ist kleiner, als das entsprechende Glied der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{M}{|\gamma_\nu \eta + \delta_\nu|^{2m}},$$

also convergirt in der That für diejenigen Werthe η, die nicht zu den ausgeschlossenen gehören und für welche die Reihe (10) convergent ist, die Reihe (8) ebenfalls, und zwar unbedingt.

306. Der erste Poincaré'sche Convergenzbeweis.

Wir wenden uns nun zur Untersuchung der Convergenz der Reihe (10) und befolgen zuvörderst die erste Poincaré'sche Methode.

Es möge, wie auch zumeist im Folgenden, der Orthogonalkreis als der Einheitskreis der η-Ebene

$$\eta \bar{\eta} = 1$$

angenommen werden. Zwei Punkte a und a^0, die Spiegelbilder von einander in Bezug auf den Einheitskreis sind, wollen wir schlechthin als harmonische Werthe bezeichnen; es ist dann

$$a^0 = \frac{1}{\bar{a}}.$$

Wenn ein Punkt ζ durch eine Verschiebung A in

$$\zeta_1 = A\zeta$$

übergeht, so verwandelt sich der zu ζ harmonische Punkt ζ^0 offenbar durch dieselbe Substitution in den harmonischen Punkt von ζ_1

$$\zeta_1^0 = A\zeta^0.$$

Wir können, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, voraussetzen, dass der Nullpunkt $\eta = 0$ der η-Ebene innerhalb des Fundamentalbereiches der Fuchs'schen Gruppe ϑ gelegen sei. Beschreiben wir dann um den Punkt $\eta = 0$ einen Kreis, der ganz innerhalb von F_0 liegt, so ist der Radius ϱ dieses Kreises ein endlicher, von Null verschiedener Werth. Für jeden mit $\eta = 0$ correspondirenden Punkt, der aus $\eta = 0$ durch eine Substitution S_ν der Gruppe ϑ hervorgeht, ist dann offenbar, wenn wir $S_0\eta = \eta$ nehmen,

(11) $$1 > |S_\nu(0)| = \left|\frac{\beta_\nu}{\delta_\nu}\right| > \varrho, \qquad (\nu=1, 2, 3 \cdots),$$

da diese Punkte sämmtlich innerhalb des Einheitskreises liegen müssen.

Der zu $\eta = 0$ harmonische Werth ist $\eta = \infty$; die demselben entsprechenden Werthe sind folglich harmonisch zu den Punkten

$$\frac{\beta_\nu}{\delta_\nu} \qquad (\nu=1, 2, 3, 4, \cdots),$$

d. h. es ist

(12) $$\frac{\bar{\delta}_\nu}{\bar{\beta}_\nu} = \frac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu}.$$

Da die Gesammtheit der Substitutionen S_ν mit der Gesammtheit der inversen Substitutionen

$$S_\nu^{-1} = \begin{pmatrix} -\delta_\nu & \beta_\nu \\ \gamma_\nu & -\alpha_\nu \end{pmatrix}$$

identisch ist, so können wir die dem $\eta = \infty$ entsprechenden Punkte auch in der Form

$$\frac{-\delta_\nu}{\gamma_\nu} \qquad (\nu=1, 2, 3, 4, \cdots)$$

darstellen. Es ist dann nach (11) und (12)

(13) $$1 < \left|\frac{-\delta_\nu}{\gamma_\nu}\right| < \frac{1}{\varrho} \qquad (\nu=1, 2, 3, 4, \cdots).$$

Nun ist aber

(14) $$\left|\frac{dS_\nu\eta}{d\eta}\right| = \left|\frac{1}{\gamma_\nu\eta + \delta_\nu}\right|^2 = \frac{1}{|\gamma_\nu|^2}\,\frac{1}{\left|\eta + \frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}\right|^2},$$

und der Ausdruck

$$\left|\eta + \frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}\right|$$

ist offenbar nichts anderes, wie der Abstand des Punktes η vom Punkte

$$\frac{-\delta_\nu}{\gamma_\nu};$$

wir haben folglich, wenn η innerhalb des Einheitskreises liegt,

$$\left|\frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}\right| - |\eta| < \left|\eta + \frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}\right| < |\eta| + \left|\frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}\right| \qquad (\nu=1, 2, 3, \cdots),$$

also nach (14) und (13)

(15) $$\frac{1}{|\gamma_\nu|^2}\,\frac{1}{(1-|\eta|)^2} > \left|\frac{dS_\nu\eta}{d\eta}\right| > \frac{1}{|\gamma_\nu|^2}\,\frac{1}{\left(\frac{1}{\varrho} + |\eta|\right)^2} \qquad (\nu=1, 2, 3, 4, \cdots).$$

Sei η ein innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 gelegener Punkt, und denken wir uns nun um diesen Punkt herum einen kleinen, ganz innerhalb F_0 befindlichen Bereich C_0 abgegrenzt. Der aus C_0 durch die Substitution S_ν hervorgehende Bereich C_ν liegt dann innerhalb des Bereiches

$$F_\nu = S_\nu F_0$$

und umgiebt den Punkt

$$S_\nu \eta .$$

Da die Bereiche

$$C_0, C_1, C_2, C_3, \cdots$$

sämmtlich innerhalb des Einheitskreises liegen und überdies zufolge der Discontinuität der Gruppe $\mathfrak{G}$ sich nicht gegenseitig überdecken können, ist die Summe ihrer Flächeninhalte

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu$$

eine endliche Grösse, nämlich kleiner wie der Flächeninhalt π des Einheitskreises.

Setzen wir nun, wie in der Nr. 283 (S. 95)

$$\eta = p + q i,$$

so ist der Flächeninhalt von C_0 in der Form

$$C_0 = \iint\limits_{(C_0)} dp\, dq$$

darstellbar. Ebenso ist, wenn

$$S_\nu \eta = p_\nu + i q_\nu$$

gesetzt wird,

$$C_\nu = \iint\limits_{(C_\nu)} dp_\nu\, dq_\nu ,$$

also, wenn wir p, q als neue Integrationsvariablen einführen,

$$C_\nu = \iint\limits_{(C_0)} \left(\frac{\partial p_\nu}{\partial p} \frac{\partial q_\nu}{\partial q} - \frac{\partial p_\nu}{\partial q} \frac{\partial q_\nu}{\partial p} \right) dp\, dq ,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung (X) der Nr. 285 (S. 100)

$$(16) \qquad C_\nu = \iint\limits_{(C_0)} \left| \frac{d S_\nu \eta}{d\eta} \right|^2 dp\, dq.$$

Sei nun, wenn η innerhalb des Bereiches C_0 verbleibt,

$$A > |\eta| ,$$

dann ist nach (15) innerhalb C_0

$$\frac{1}{|\gamma_\nu|^2}\frac{1}{(1-A)^2} > \left|\frac{dS_\nu\eta}{d\eta}\right| > \frac{1}{|\gamma_\nu|^2}\frac{1}{\left(\frac{1}{\varrho}+A\right)^2}.$$

Bezeichnen wir also mit M_ν den grössten, mit m_ν den kleinsten Werth, den

$$\left|\frac{dS_\nu\eta}{d\eta}\right|$$

anzunehmen vermag, wenn η innerhalb C_0 verbleibt, so ist

$$M < \frac{1}{|\gamma_\nu|^2}\frac{1}{(1-A)^2},$$

$$m_\nu > \frac{1}{|\gamma_\nu|^2}\frac{1}{\left(\frac{1}{\varrho}+A\right)^2},$$

und folglich

(17) $$\frac{M_\nu}{m_\nu} < \frac{\left(\frac{1}{\varrho}+A\right)^2}{(1-A)^2} = K \qquad (\nu=1,2,3,\cdots),$$

wo K eine von ν unabhängige Grösse bedeutet.

Nach (16) ist aber

$$C_\nu > \iint\limits_{(C_0)} m_\nu^2\,dp\,dq = m_\nu^2\,C_0,$$

also haben wir, da nach (17)

$$m_\nu > \frac{M_\nu}{K}$$

ist, a potiori

$$C_\nu > \frac{M_\nu^2}{K^2}C_0,$$

und folglich

$$M_\nu^2 < K^2\frac{C_\nu}{C_0}.$$

Betrachten wir nun zuvörderst die unendliche Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{dS_\nu\eta}{d\eta}\right|^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty}|\gamma_\nu\eta+\delta_\nu|^{-4},$$

so ist die Summe derselben für Werthe von η, die innerhalb C_0 liegen, kleiner als

$$\sum_\nu M_\nu^2 < \frac{K^2}{C_0}\sum_\nu C_\nu,$$

also, da die Summe der C_ν einen endlichen Werth besitzt, jedenfalls ein bestimmter endlicher Werth. D. h. die Reihe

(18) $$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{dS_\nu\eta}{d\eta}\right|^2$$

convergirt, wenn η innerhalb C_0 verbleibt.

Bezeichnen wir die Summe dieser Reihe (18) für einen Augenblick mit S, so ist offenbar

$$\left|\frac{dS_\nu\eta}{d\eta}\right| < S^{\frac{1}{2}},$$

also für $m > 2$

$$\left|\frac{dS_\nu\eta}{d\eta}\right|^m < S^{\frac{m-2}{2}}\left|\frac{dS_\nu\eta}{d\eta}\right|^2,$$

d. h. jedes Glied der Reihe (10) ist kleiner, als das entsprechende Glied der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} S^{\frac{m-2}{2}}\left|\frac{dS_\nu\eta}{d\eta}\right|^2,$$

deren Convergenz feststeht. Also convergirt die Reihe (10) allemal, wenn η innerhalb C_0 verbleibt, und zwar unbedingt und gleichmässig.

Nun können wir C_0 so lange erweitern, bis es den ganzen Fundamentalbereich F_0 erfüllt. Ferner können wir jeden der mit F_0 congruenten Bereiche

$$F_\nu = S_\nu F_0$$

ebenso gut wie F_0 selbst als Fundamentalbereich ansehen; die Reihe (10) ist also für $m > 1$ innerhalb des Einheitskreises convergent.

Sei nun η ein Punkt ausserhalb des Einheitskreises, der mit keinem der dem $\eta = \infty$ entsprechenden Punkte zusammenfällt. Dann ist für den harmonischen, also innerhalb des Einheitskreises gelegenen Punkt η^0 die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{dS_\nu\eta^0}{d\eta^0}\right|^m = \sum_{\nu=0}^{\infty}|\gamma_\nu\eta^0+\delta_\nu|^{-2m}$$

convergent.

Da η mit keinem der Punkte $\frac{-\delta_\nu}{\gamma_\nu}$ zusammenfällt, ist stets

$$\left|\eta+\frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}\right| > r,$$

wo r eine bestimmte, von Null verschiedene Grösse bedeutet; ferner haben wir, wie früher gefunden wurde, für den innerhalb des Einheitskreises gelegenen Punkt η^0

$$\left|\eta^0+\frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}\right| < |\eta^0| + \left|\frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}\right|,$$

d. h. mit Rücksicht auf (13)

$$\left|\eta^0 + \frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}\right| < 1 + \frac{1}{\varrho}.$$

Es ist folglich

$$\left|\frac{\gamma_\nu \eta^0 + \delta_\nu}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}\right| = \left|\frac{\eta^0 + \frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}}{\eta + \frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}}\right| < \frac{\frac{1}{\varrho} + 1}{r},$$

d. h. jedes Glied

$$|\gamma_\nu \eta + \delta_\nu|^{-2m}$$

der Reihe (10) ist für ein ausserhalb des Einheitskreises und in endlichem Abstande von den Punkten $-\frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}$ gelegenes η kleiner, als das entsprechende Glied der convergenten Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\varrho + 1}{r\varrho}\right)^{-2m} |\gamma_\nu \eta^0 + \delta_\nu|^{-2m},$$

d. h. wir haben das Resultat:

Die Reihe (10) convergirt für alle innerhalb des Einheitskreises befindlichen Stellen η und für diejenigen ausserhalb des Einheitskreises befindlichen, die von den aus $\eta = \infty$ durch die Substitutionen der Gruppe ϑ hervorgehenden Punkten in endlichem Abstande liegen.

Damit ist denn auch die Convergenz der Fuchs'schen Thetareihe (8) erwiesen.

307. Tragweite des ersten Convergenzbeweises. Erster Theil des zweiten Poincaré'schen Convergenzbeweises.

Dieser erste Convergenzbeweis beruht auf einem Princip, welches eine ähnliche Anwendung für eine grosse Classe von discontinuirlichen Gruppen gestattet. Und zwar nicht nur für solche Gruppen von projectiven Substitutionen einer veränderlichen Grösse, sondern einerseits auch für discontinuirliche Gruppen von projectiven Substitutionen in mehreren veränderlichen Grössen, andererseits für discontinuirliche Gruppen von nicht projectiven Transformationen.

Hat man z. B. eine discontinuirliche Gruppe von projectiven Substitutionen in zwei Variabeln η, ζ

$$\eta_\nu = \frac{\alpha_2^{(\nu)} + \beta_2^{(\nu)}\eta + \gamma_2^{(\nu)}\zeta}{\alpha_1^{(\nu)} + \beta_1^{(\nu)}\eta + \gamma_1^{(\nu)}\zeta}, \quad \zeta_\nu = \frac{\alpha_3^{(\nu)} + \beta_3^{(\nu)}\eta + \gamma_3^{(\nu)}\zeta}{\alpha_1^{(\nu)} + \beta_1^{(\nu)}\eta + \gamma_1^{(\nu)}\zeta} \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots),$$

woselbst

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{(\nu)} & \alpha_2^{(\nu)} & \alpha_3^{(\nu)} \\ \beta_1^{(\nu)} & \beta_2^{(\nu)} & \beta_3^{(\nu)} \\ \gamma_1^{(\nu)} & \gamma_2^{(\nu)} & \gamma_3^{(\nu)} \end{vmatrix} = 1,$$

so kann man unter gewissen beschränkenden Voraussetzungen mit Hülfe desselben Princips, welches bei dem eben dargelegten Beweise zur Anwendung gelangt ist, die Convergenz einer Reihe von der Form

$$\Theta(\eta,\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} H\left(\frac{\alpha_2^{(\nu)} + \beta_2^{(\nu)}\eta + \gamma_2^{(\nu)}\zeta}{\alpha_1^{(\nu)} + \beta_1^{(\nu)}\eta + \gamma_1^{(\nu)}\zeta}, \frac{\alpha_3^{(\nu)} + \beta_3^{(\nu)}\eta + \gamma_3^{(\nu)}\zeta}{\alpha_1^{(\nu)} + \beta_1^{(\nu)}\eta + \gamma_1^{(\nu)}\zeta}\right) \frac{1}{(\alpha_1^{(\nu)} + \beta_1^{(\nu)}\eta + \gamma_1^{(\nu)}\zeta)^{3m}}$$

erweisen, wo H den Algorithmus einer rationalen Function, m eine ganze Zahl grösser als Eins bedeutet. Diese Reihe hat dann offenbar die Eigenschaft, dass, bei Anwendung einer beliebigen Substitution der Gruppe,

$$\Theta(\eta_\varkappa, \zeta_\varkappa) = (\alpha_1^{(\varkappa)} + \beta_1^{(\varkappa)}\eta + \gamma_1^{(\varkappa)}\zeta)^{3m}\,\Theta(\eta, \zeta)$$

wird. Das Analoge gilt natürlich für beliebig viele Variable.

Durch Quotientenbildung können wir von diesen allgemeinen Reihen zu eindeutigen Functionen der beiden veränderlichen Grössen η, ζ übergehen, die bei den Substitutionen der vorgelegten discontinuirlichen Gruppe ungeändert bleiben; die Wichtigkeit solcher Functionen für die Theorie der linearen Differentialgleichungen dritter und entsprechend höherer Ordnung ist nach den Erörterungen der Nummer 205 (Bd. II, 1, S. 289 ff.) ohne Weiteres einleuchtend. Einige besondere Fälle solcher Functionen hat Herr Picard untersucht, einer allgemeinen Theorie derselben scheinen sich aber noch bedeutende Schwierigkeiten entgegenzustellen.

Während so der „erste Convergenzbeweis" seiner allgemeinen principiellen Grundlage wegen besonderes Interesse beansprucht, hat der „zweite Poincaré'sche Convergenzbeweis", zu dessen Darlegung wir jetzt übergehen, unmittelbar nur für Fuchs'sche Gruppen Bedeutung, führt aber gerade dadurch, dass er auf die besondere Beschaffenheit dieser Gruppen Rücksicht nimmt, viel tiefer in die Natur dieser Gruppen und der bei denselben unveränderlichen Functionen hinein, als der erste.

Dieser zweite Convergenzbeweis stützt sich wesentlich auf die Natur der Substitutionen der Gruppe ϑ als Verschiebungen, es wird daher zweckmässig sein, wenn wir jetzt wieder die Fläche von constantem Krümmungsmaasse heranziehen, die wir in den Nummern 283—385 (S. 93 ff.) eingeführt und angewandt haben.

Da wir den Einheitskreis

$$\eta\bar{\eta} - 1 = 0$$

als Orthogonalkreis gewählt haben, so ist nach den in der Nr. 285 (S. 101) zusammengestellten Bezeichnungen die superficielle Länge einer zwischen zwei Punkten η_1, η_2 erstreckten Curve $\mathfrak{C}$ gleich

$$(19)\qquad 2\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{|\,d\eta\,|}{1-\eta\bar{\eta}}$$

zu nehmen, da ja η stets innerhalb des Einheitskreises liegen muss, so dass also

$$1-\eta\bar{\eta} \geqq 0$$

ist. Der superficielle Inhalt einer, von einer geschlossenen Curve C begrenzten Figur ist gleich,

$$(20)\qquad 4\iint_{(C)} \frac{dp\,dq}{(1-\eta\bar{\eta})^2},$$

und, wenn wir statt der Coordinaten p, q die ebenen Polarcoordinaten ϱ, φ einführen, für welche

$$(21)\qquad \begin{cases} p = \varrho\cos\varphi, \\ q = \varrho\sin\varphi \end{cases}$$

ist, so erhalten wir das Doppelintegral (20) in der Form

$$(20a)\qquad 4\iint \frac{\varrho\,d\varrho\,d\varphi}{(1-\varrho^2)^2}.$$

Einem Kreise C_0 in der η-Ebene, dessen Mittelpunkt der Punkt $\eta = 0$ und dessen Radius gleich ϱ_0 ist, entspricht auf der Fläche vom constanten Krümmungsmaasse -1 eine Curve, deren Punkte nach den Formeln der Nr. 284 (S. 98) von den Punkten $p = 0$, $q = 0$ den constanten geodätischen Abstand

$$(22)\qquad r_0 = 2\int_0^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{1-\varrho^2} = \log\frac{1+\varrho_0}{1-\varrho_0}$$

besitzen. Wir wollen diese Grösse r_0 den superficiellen Radius des in der η-Ebene gezeichneten Kreises C_0 nennen. Der superficielle Inhalt dieses Kreises ergiebt sich nach (20a) gleich

$$s_0 = 4\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\varrho_0} \frac{\varrho\,d\varrho}{(1-\varrho^2)^2} = \frac{4\pi\varrho_0^2}{1-\varrho_0^2}.$$

Führen wir in diesen Ausdruck den superficiellen Radius r_0 ein, durch welchen sich ϱ_0 in der Form

(23) $$\varrho_0 = \frac{e^{r_0} - 1}{e^{r_0} + 1}$$

darstellt (vergl. Gleichung (13) der Nr. 285, S. 99), so erhalten wir

$$s_0 = \pi(e^{r_0} + e^{-r_0} - 2).$$

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die Anzahl derjenigen Punkte zu ermitteln, die aus einem innerhalb F_0 gelegenen Punkte η durch die Substitutionen der Gruppe ϑ hervorgehen und sämmtlich innerhalb des Kreises C_0 liegen.

Grenzen wir um den Punkt η herum einen ganz innerhalb von F_0 befindlichen geschlossenen Bereich $\mathfrak{C}_0$ ab, und betrachten wie beim ersten Beweise die Gesammtheit der aus $\mathfrak{C}_0$ durch die Substitutionen

$$S_\nu \eta = \frac{\alpha_\nu \eta + \beta_\nu}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4, \cdots)$$

der Gruppe ϑ hervorgehenden Bereiche $\mathfrak{C}_\nu$, so sind diese sämmtlich unter einander congruent (im Sinne der Nr. 285, S. 101) und haben folglich denselben superficiellen Inhalt Σ.

Denken wir uns die Bereiche $\mathfrak{C}_\nu$ für $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ auf die Fläche vom constanten Krümmungsmaasse -1 übertragen, so wird der geodätische Abstand irgend zweier Punkte der Begrenzung von $\mathfrak{C}_0$ eine gewisse obere Grenze $\mathfrak{L}$ nicht überschreiten können; wegen der Congruenz aller $\mathfrak{C}_\nu$ mit $\mathfrak{C}_0$ hat die Grösse $\mathfrak{L}$ für alle $\mathfrak{C}_\nu$ dieselbe Bedeutung wie für $\mathfrak{C}_0$.

Wenn nun der Punkt $S_\nu \eta$ innerhalb des Kreises C_0 liegt, so kann der diesen Punkt umgebende Bereich $\mathfrak{C}_\nu$ über C_0 hinausgreifen. Beschreiben wir aber einen mit C_0 concentrischen Kreis C_0', dessen superficieller Radius gleich $r_0 + \mathfrak{L}$ ist, so muss der Bereich $\mathfrak{C}_\nu$ jedenfalls ganz innerhalb C_0' liegen.

Sei also N die Anzahl der innerhalb C_0 gelegenen Punkte $S_\nu \eta$, so liegen mindestens N der Bereiche $\mathfrak{C}_\nu$ innerhalb des Kreises C_0'. Die Summe der superficiellen Inhalte dieser N Bereiche $\mathfrak{C}_\nu$ ist gleich

$$N\Sigma,$$

diese Summe muss also jedenfalls kleiner sein, wie der superficielle Inhalt

$$\pi(e^{r_0 + \mathfrak{L}} + e^{-r_0 - \mathfrak{L}} - 2)$$

des Kreises C_0'. Wir haben demnach die Ungleichung

(24) $$N < \frac{\pi}{\Sigma}(e^{r_0 + \mathfrak{L}} + e^{-r_0 - \mathfrak{L}} - 2);$$

d. h.:

Betrachten wir die Gesammtheit der Punkte, die aus einem innerhalb des Bereiches $\mathfrak{C}_0$ gelegenen η-Werthe durch

die Substitutionen der Gruppe ϑ hervorgehen, und die sich im Innern eines Kreises C_0 mit dem Mittelpunkte $\eta = 0$ und dem superficiellen Radius r_0 befinden, so genügt die Anzahl N dieser Punkte der Ungleichung (24), wo Σ den superficiellen Inhalt des Bereiches $\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{L}$ das Maximum des geodätischen Abstandes zweier Punkte der Begrenzung von $\mathfrak{C}_0$ von einander bedeutet.

308. Zweiter Theil des zweiten Convergenzbeweises. Typen von holoedrisch isomorphen Fuchs'schen Gruppen.

Sei nun a der auf der Fläche von constantem Krümmungsmaasse gemessene geodätische Abstand des Punktes η vom Punkte $\eta = 0$, d. h. also der superficielle Radius des durch den Punkt η gelegten, mit dem Einheitskreise concentrischen Kreises, dann ist nach (23)

$$(25) \qquad |\eta| = \frac{e^a - 1}{e^a + 1}.$$

Sei ebenso r' der geodätische Abstand des Punktes

$$S_\varkappa \eta = \frac{\alpha_\varkappa \eta + \beta_\varkappa}{\gamma_\varkappa \eta + \delta_\varkappa}$$

vom Punkte $\eta = 0$, so ist auch

$$(26) \qquad |S_\varkappa \eta| = \frac{e^{r'} - 1}{e^{r'} + 1}.$$

Zufolge der Gleichung (VIII) der Nr. 282 (S. 89) haben wir aber

$$(\gamma_\varkappa \eta + \delta_\varkappa)(\bar{\gamma}_\varkappa \bar{\eta} + \bar{\delta}_\varkappa)[1 - |S_\varkappa \eta|^2] = 1 - |\eta|^2,$$

also

$$\left| \frac{1}{\gamma_\varkappa \eta + \delta_\varkappa} \right|^2 = \frac{1 - |S_\varkappa \eta|^2}{1 - |\eta|^2},$$

d. h. es ist mit Rücksicht auf (25), (26)

$$(27) \qquad \left| \frac{1}{\gamma_\varkappa \eta + \delta_\varkappa} \right|^2 = \frac{e^a + e^{-a} + 2}{e^{r'} + e^{-r'} + 2}.$$

Denken wir uns nun eine unendliche Reihe mit dem Einheitskreise concentrischer Kreise

$$C_1, C_2, C_3, \cdots$$

gelegt, deren superficielle Radien in arithmetischer Progression wachsen; möge etwa r der superficielle Radius von C_1 sein, so dass also nr den superficiellen Radius des Kreises C_n darstellt.

Sei U_n die Summe derjenigen Terme der Reihe (10)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{dS_\nu \eta}{d\eta}\right|^m,$$

für welche die entsprechenden Punkte $S_\nu \eta$ innerhalb des von den Kreisen C_{n-1} und C_n begrenzten Ringes liegen, so können wir die Reihe (10) in der Form

(10a) $$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots$$

schreiben, und die Convergenz der Reihe (10a) zieht ohne Weiteres die Convergenz von (10) nach sich, da ja die letztere Reihe aus lauter positiven Gliedern besteht.

Zufolge des in der Ungleichung (24) ausgedrückten Satzes ist die Anzahl der in U_n enthaltenen Glieder jedenfalls kleiner wie

$$\frac{\pi}{\Sigma}\left(e^{nr+8} + e^{-nr-8} - 2\right) < \frac{\pi}{\Sigma}\, e^{nr+8}.$$

Jedes dieser Glieder ist gemäss der Gleichung (27) kleiner, wie

$$\left[\frac{e^a + e^{-a} + 2}{e^{(n-1)r} + e^{-(n-1)r} + 2}\right]^m < \left[\frac{e^a + e^{-a} + 2}{e^{(n-1)r}}\right]^m,$$

wir haben folglich

$$U_n < \frac{\pi}{\Sigma}\left(e^a + e^{-a} + 2\right)^m e^{8+mr}\, e^{-n(m-1)r}.$$

Setzen wir also

(28) $$\frac{\pi}{\Sigma}\left(e^a + e^{-a} + 2\right)^m e^{8+mr} = K,$$

so ist

(29) $$U_n < \frac{K}{e^{n(m-1)r}}.$$

Da $m > 1$ ist, so convergirt die geometrische Progression

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K}{e^{n(m-1)r}},$$

die Reihe (10a) ist demnach ebenfalls convergent.

Bricht man die Reihe (10a) bei dem Gliede U_{n-1} ab, d. h. betrachtet man die Summe derjenigen Terme, die innerhalb des Kreises C_{n-1} gelegenen Punkten $S_\nu \eta$ entsprechen, so ist der Rest der Reihe gleich

$$U_n + U_{n+1} + \cdots,$$

also nach (29) kleiner wie

(30) $$\frac{K e^{n(m-1)r}}{1 - e^{(m-1)r}}.$$

Die weiteren Schlüsse, die zu dem Convergenzsatze für die Thetareihe (8) führen, sind nun dieselben wie beim ersten Beweise.

Um die tieferen Consequenzen, die sich aus dem zweiten Convergenzbeweise ziehen lassen, darlegen zu können, müssen wir einige Bemerkungen über die Abhängigkeit einer Fuchs'schen Gruppe ϑ von den dieselbe bestimmenden Parametern vorausschicken.

Betrachten wir die Basis

$$(31) \qquad A_1, A_2, \cdots A_\sigma, A_{\sigma+1}$$

der Fuchs'schen Gruppe ϑ, so besteht zwischen diesen $(\sigma + 1)$ Substitutionen die Relation

$$(32) \qquad A_{\sigma+1} A_\sigma \cdots A_2 A_1 = 1.$$

Wenn überdies einige der Substitution (31), etwa

$$A_{e1}, A_{e2}, \cdots A_{e\mu},$$

elliptische Substitutionen sind, und für $A_{e\varkappa}$

$$\delta_{e\varkappa} = \frac{1}{g_{e\varkappa}}$$

die durch 2π dividirte Winkelsumme bei dem entsprechenden Cyklus von Ecken des Fundamentalbereiches F_0 darstellt, wo also die $g_{e\varkappa}$ endliche positive ganze Zahlen bedeuten, so bestehen noch die Relationen

$$(33) \qquad A_{e\varkappa}^{g_{e\varkappa}} = 1 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \mu).$$

Da die Relationen (32), (33) die einzigen sind, die zwischen den Elementen der Basis (31) der Gruppe ϑ bestehen, so lässt sich jede Relation, die zwischen irgend welchen Substitutionen dieser Gruppe stattfindet, aus den Relationen (32), (33) herleiten, wir nennen dieselben darum mit Herrn Poincaré die Fundamentalrelationen der Gruppe ϑ.

Mögen nun für eine zweite Fuchs'sche Gruppe ϑ' die Substitutionen

$$(34) \qquad A_1', A_2', \cdots A_\sigma', A_{\sigma+1}'$$

die analoge Bedeutung haben, wie die Substitutionen (31) für ϑ, so dass also die Relation

$$A_{\sigma+1}' A_\sigma' \cdots A_2' A_1' = 1$$

befriedigt wird. Mögen ferner

$$A_{e1}', A_{e2}', \cdots A_{e\mu}'$$

die elliptischen unter den Substitutionen (34) darstellen, und seien endlich die Zahlen $g_{e\varkappa}$ die kleinsten, für welche die Gleichungen

$$A'^{g_{ex}}_{ex} = 1 \qquad (x=1, 2, \cdots \mu)$$

erfüllt sind, dann sind die beiden Gruppen ϑ und ϑ' offenbar **isomorph** und zwar **holoedrisch** isomorph (Nr. 179, Bd. II, 1, S. 177), da, wegen der Identität der Fundamentalrelationen in beiden Gruppen, der identischen Substitution der einen Gruppe nur wieder die identische Substitution der anderen entsprechen kann. Wir haben also den Satz:

Fuchs'sche Gruppen sind dann und nur dann holoedrisch isomorph, wenn ihre Fundamentalbereiche dieselbe Anzahl von Cykeln und bei entprechenden Cykeln dieselben Winkelsummen besitzen.

Der Satz wurde so gefasst, dass die in demselben für den Fundamentalbereich einer Fuchs'schen Gruppe enthaltenen Bedingungen bei erlaubten Abänderungen (Nr. 210, Bd. II, 1, S. 315) des Fundamentalbereiches erhalten bleiben.

Wir fassen alle mit einander holoedrisch isomorphen Fuchs'schen Gruppen in einen Typus zusammen; dann ist also ein solcher Typus durch Angabe der Zahl σ und der Zahlen

$$g_x = \frac{1}{\delta_x} \qquad (x=1, 2, \cdots \overline{\sigma+1})$$

vollkommen bestimmt.

Im Allgemeinen hängt die Gruppe ϑ von 3σ Parametern ab, als welche wir z. B. die $2\sigma + 2$ Doppelpunkte der Substitutionen (31) und die $\sigma + 1$ Grössen

$$(35) \qquad \delta_1, \delta_2, \cdots \delta_\sigma, \delta_{\sigma+1}$$

wählen können; zwischen diesen $3\sigma + 3$ Grössen bestehen dann zufolge der Gleichung (32) noch drei Relationen. Da aber ϑ eine Fuchs'sche Gruppe sein sollte, die den Einheitskreis zum Orthogonalkreise hat, so ist für jede Substitution A_x durch Angabe des einen Doppelpunktes λ_x der andere als sein harmonischer Werth schon mitgegeben, so dass also nebst den $(\sigma + 1)$ Grössen (35) nur noch $(\sigma + 1)$ complexe Grössen, zwischen denen noch drei Relationen bestehen, zur Verfügung bleiben.

Fixiren wir die $(\sigma + 1)$ Grössen (35) dadurch, dass wir einen bestimmten Typus T holoedrisch isomorpher Fuchs'scher Gruppen in's Auge fassen, so bleiben also noch $\sigma - 2$ complexe oder $2\sigma - 4$ reale Parameter zu unserer Verfügung. Diese Parameter haben, damit die betrachtete Gruppe eine Fuchs'sche, d. h. also eine discontinuirliche sei, ähnlich wie in den beiden in der Nr. 304 (S. 170) betrachteten Beispielen, auch allgemein gewisse Ungleichungen zu befriedigen. Durch diese Ungleichungen werden in dem Gebiete jener Parameter

gewisse continuirliche Gebilde bestimmt, und es entspricht dann jeder Stelle eines solchen continuirlichen Gebildes eine Fuchs'sche Gruppe, die dem betrachteten Typus T angehört.

Fassen wir eines dieser continuirlichen Gebilde in's Auge, so können wir uns $\mu \leq 2\sigma - 4$ Parameter so gewählt denken, dass diesem continuirlichen Gebilde ein (μ-fach ausgedehntes) Continuum im Gebiete dieser μ Parameter entspricht, und dass die Coefficienten der Substitutionen der Gruppe etwa als rationale Functionen derselben erscheinen; die so gewählten Parameter bezeichnen wir mit

$$u_1, u_2, \cdots u_\mu \quad (\mu \leq 2\sigma - 4),$$

ferner sei $\mathfrak{C}$ jenes Continuum im Gebiete der veränderlichen Grössen $u_\varkappa$, welches so beschaffen ist, dass jeder Stelle desselben eine Fuchs'sche Gruppe unseres Typus entspricht.

309. Parameter eines Typus holoedrisch isomorpher Fuchs'scher Gruppen. Gleichmässige Convergenz der Thetareihe.

Es sei ϑ die Fuchs'sche Gruppe des Typus T, in welcher die Parameter $u_\varkappa$ unbestimmte, aber dem Continuum $\mathfrak{C}$ angehörige Werthe besitzen. Bilden wir dann die Reihen (8), (10), (10a), so sind die Glieder derselben rationale Functionen der realen Veränderlichen $u_\varkappa$; wir werden nun auf Grund des zweiten Convergenzbeweises nachweisen, dass diese Reihen, von denen feststeht, dass sie für jedes dem Continuum angehörige Werthesystem der $u_\varkappa$ convergiren, stetige Functionen dieser realen Variabeln sind.

Betrachten wir z. B. einen Punkt η, der innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 der Gruppe ϑ liegt. Lassen wir die $u_\varkappa$ sich verändern, so verändert sich auch der Fundamentalbereich F_0; wir wollen uns die $u_\varkappa$ auf eine hinreichend kleine Umgebung einer bestimmten Stelle des Continuums $\mathfrak{C}$ beschränkt denken. Wenn wir dann den beim zweiten Convergenzbeweise benutzten Bereich $\mathfrak{C}_0$, der die Stelle η umgiebt, hinreichend klein wählen, so können wir die Umgebung der betrachteten Stelle des Continuums $\mathfrak{C}$ so klein einrichten, dass der Bereich $\mathfrak{C}_0$ allemal innerhalb F_0 verbleibt, wenn die $u_\varkappa$ innerhalb jener Umgebung verbleiben.

Die durch die Gleichung (28) definirte Grösse K hängt nur von der Natur des Bereiches $\mathfrak{C}_0$ und von der die Anordnung der Glieder der Reihe (10) bestimmenden Grösse r ab. Die Ungleichung (29) besteht folglich für alle in Betracht gezogenen Werthesysteme der $u_\varkappa$.

Fassen wir in der Fuchs'schen Thetareihe (8) diejenigen Glieder zusammen, die den in das Agreggat U_n zusammengefassten Gliedern

der Reihe (10) entsprechen, und bezeichnen die Summe dieser Glieder durch W_n, so ist nach der in der Nr. 305 (S. 177) bewiesenen Ungleichung

$$\left| H(S_\nu \eta) \left(\frac{dS_\nu \eta}{d\eta}\right)^m \right| < \frac{M}{|\gamma_\nu \eta + \delta_\nu|^{2m}}$$

offenbar auch

$$|W_n| < M U_n,$$

d. h. die beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} W_n = \Theta(\eta),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu} \right|^{2m}$$

haben die Eigenschaft, dass sich stets, wenn man die u_ν auf eine gewisse Umgebung einer beliebigen Stelle des Continuums $\mathfrak{C}$ beschränkt, die convergente Reihe mit lauter positiven Gliedern

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{M} K}{e^{n(m-1)r}}$$

so angeben lässt, dass sowohl $|W_n|$ als auch U_n kleiner sind, wie

$$\frac{\overline{M} K}{e^{n(m-1)r}};$$

dabei bedeutet $\overline{M}$ eine Zahl, die je nachdem M grösser oder kleiner als Eins ist, gleich M oder grösser wie M, aber jedenfalls grösser als Eins gewählt werden muss.

Nun gelten bekanntlich die folgenden Sätze über Reihen, deren Glieder Functionen von gewissen realen veränderlichen Grössen sind.

Hat man eine Reihe

$$\text{(I)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} V_n(u_1, u_2, \cdots u_\mu),$$

wo die $V_n(u_1, u_2, \cdots u_\mu)$ innerhalb eines Continuums $\mathfrak{C}$ stetige Functionen der realen Variabeln $u_1, u_2, \cdots u_\mu$ sind, und lässt sich für eine Stelle des Continuums $\mathfrak{C}$ eine convergente Reihe mit von den $u_\varkappa$ unabhängigen positiven Gliedern

$$\text{(II)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$$

so angeben, dass für alle Werthe der $u_\varkappa$ in einer gewissen Umgebung dieser Stelle die Ungleichung

$$|V_n(u_1, u_2, \cdots u_\mu)| < \varepsilon_n$$

befriedigt wird, so ist die Reihe (I) in der Umgebung der betreffenden Stelle des Continuums unbedingt und gleichmässig convergent.

Wenn die Reihe (I) in der Umgebung jeder Stelle des Continuums 𝕮 gleichmässig convergirt, so convergirt sie innerhalb des ganzen Continuums 𝕮 gleichmässig.

Eine Reihe, deren Glieder stetige Functionen der $u_\varkappa$ sind, stellt innerhalb eines Bereiches, wo dieselbe gleichmässig convergent ist, eine stetige Function der Variabeln $u_\varkappa$ dar.

Die Anwendung dieser Sätze auf die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} W_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} U_n$$

ergiebt also in der That:

Die Reihen (8) und (10) stellen innerhalb des Continuums 𝕮 stetige Functionen der realen Variabeln

$$u_1, u_2, \cdots u_\mu$$

dar.

Betrachten wir statt der realen Parameter $u_1, u_2, \cdots u_\mu$ die $\sigma - 2$ complexen Parameter $v_1, v_2, \cdots v_{\sigma-2}$, von denen eine Gruppe des Typus T abhängt, so wird es sich im Allgemeinen ereignen, dass die Ungleichheitsbedingungen, denen die $v_1, v_2, \cdots v_{\sigma-2}$ zu unterwerfen sind, damit die Gruppe eine discontinuirliche sei, gewisse Continua in dem $(2\sigma - 4)$-fach ausgedehnten Gebiete der complexen Variabeln $v_1, v_2, \cdots v_{\sigma-2}$ bestimmen. Denken wir uns dann diese Variabeln so eingerichtet, dass die Coefficienten der Substitutionen der Gruppe ϑ rationale Functionen derselben sind, so sind auch die Coefficienten der Thetareihe (8) rationale Functionen der $v_1, v_2, \cdots v_{\sigma-2}$.

Nun gilt der allgemeine Satz von Weierstrass:

Wenn die Glieder einer Reihe rationale Functionen gewisser complexer Variabeln sind, so stellt diese Reihe innerhalb eines Continuums, wo dieselbe gleichmässig convergirt, einen eindeutigen Zweig einer monogenen Function jener Variabeln dar.

Also sind die Θ-Reihen innerhalb eines jeden der gedachten Continua eindeutige Zweige monogener Functionen der

$$v_1, v_2, \cdots v_{\sigma-2},$$

natürlich aber im Allgemeinen, innerhalb verschiedener dieser Continua Zweige verschiedener monogener Functionen.

Zweites Kapitel.

310. Entwickelungen der Fuchs'schen Thetafunctionen in der Umgebung der Doppelpunkte elliptischer, hyperbolischer, parabolischer Substitutionen.

Wir wenden uns nun zur Untersuchung weiterer Eigenschaften der Fuchs'schen Thetareihe (8) (S. 175), beziehungsweise der durch dieselbe dargestellten Function.

In der Umgebung jeder Stelle, wo die Reihe (10) (S. 176) convergirt, stellt dieselbe eine eindeutige Function von η dar, die sich an der betreffenden Stelle regulär verhält.

Bedeuten $a_1, a_2, \cdots a_q$ die Unendlichkeitsstellen der rationalen Function $H(\eta)$, so gehören die Stellen

$$S_\nu a_\varkappa \qquad (\varkappa=1, 2, \cdots q;\ \nu=0, 1, 2, \cdots)$$

einerseits und die dem Punkte $\eta = \infty$ entsprechenden Stellen

$$\frac{-\delta_\nu}{\gamma_\nu}$$

andererseits nicht zum Convergenzbereiche der Reihe (8), da für jede dieser Stellen ein Glied der Thetareihe unendlich wird. Lässt man aber das betreffende Glied aus der Reihe (8) weg, so bleibt die übrige Reihe convergent, wir können also sagen:

Die durch die Reihe (8) dargestellte Function von η wird an den Stellen

$$(36) \qquad S_\nu a_\varkappa, \quad \frac{-\delta_\nu}{\gamma_\nu} \qquad (\varkappa=1, 2, \cdots q;\ \nu=0, 1, 2, \cdots)$$

wie eine rationale Function unendlich gross.

Betrachten wir nun die Reihe (8) in der Umgebung eines Doppelpunktes einer Substitution der Gruppe ϑ.

Sei zunächst S eine elliptische Substitution von ϑ, dann muss dieselbe (vergl. Nr. 287, S. 109) aus einer der elliptischen Substitu-

tionen der Basis von ϑ durch Transformation mit einer Substitution von ϑ hervorgehen; die canonische Form von S lautet also

$$(37)\qquad \frac{S\eta-\lambda}{S\eta-\lambda^0}=e^{2\pi i r}\frac{\eta-\lambda}{\eta-\lambda^0},$$

wo λ eine innerhalb des Einheitskreises gelegene Ecke eines Bereiches F_ν, λ^0 den zu λ harmonischen Werth und r ein ganzzahliges Vielfaches von einer der Zahlen

$$\delta_\varkappa=\frac{1}{g_\varkappa}\qquad (\varkappa=1,2,\cdots\sigma+1)$$

bedeutet.

Eine hyperbolische Substitution S von ϑ hat die Form

$$(38)\qquad \frac{S\eta-\mu_1}{S\eta-\mu_2}=e^{2\pi s}\frac{\eta-\mu_1}{\eta-\mu_2},$$

wo μ_1, μ_2 Punkte auf der Peripherie des Einheitskreises, s eine reale Grösse bedeutet; endlich lautet eine parabolische Substitution S von ϑ in der canonischen Form

$$(39)\qquad \frac{1}{S\eta-\lambda}=\frac{1}{\eta-\lambda}+\gamma,$$

wo λ eine auf der Peripherie des Einheitskreises gelegene Ecke eines Bereiches F_ν sein muss.

Allemal können wir eine unendliche Folge von Substitutionen

$$1,\ \Sigma_1,\ \Sigma_2,\ \Sigma_3,\ \cdots$$

der Gruppe ϑ so angeben, dass sich jede Substitution von ϑ auf eine Weise in der Form

$$(40)\qquad \Sigma_\varkappa S^\varrho$$

darstellen lässt, wo ϱ die Reihe der ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, wir schreiben demgemäss in leicht verständlicher Symbolik

$$\vartheta=(1,\ \Sigma_1,\ \Sigma_2,\ \cdots)(\cdots,\ S^{-2},\ S^{-1},\ 1,\ S,\ S^2,\ \cdots);$$

wenn S eine elliptische Substitution ist, so ist in (40) dem ϱ nur eine endliche Anzahl von Werthen beizulegen.

Setzen wir im Falle einer elliptischen Substitution (37)

$$\frac{\eta-\lambda}{\eta-\lambda^0}=\zeta,\quad \frac{S_\nu\eta-\lambda}{S_\nu\eta-\lambda^0}=T_\nu\zeta,$$

so ergiebt sich

$$H(S_\nu\eta)\left(\frac{dS_\nu\eta}{d\eta}\right)^m=\left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right)^m H_1(T_\nu\zeta)\left(\frac{dT_\nu\zeta}{d\zeta}\right)^m,$$

woselbst

$$H_1(\zeta) = H(\eta)\left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)^m,$$

also gleich einer rationalen Function von ζ zu nehmen ist. Wir finden demnach

$$\Theta(\eta)\left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)^m = \sum_{\nu=0}^{\infty} H_1(T_\nu\zeta)\left(\frac{dT_\nu\zeta}{d\zeta}\right)^m.$$

Bezeichnen wir die den $\Sigma_\varkappa$ entsprechenden Substitutionen von ζ durch

$$\tau_\varkappa\zeta = \frac{\Sigma_\varkappa\eta - \lambda}{\Sigma_\varkappa\eta - \lambda^0} \qquad (\varkappa=0, 1, 2, \cdots),$$

so lässt sich jedes $T_\nu\zeta$ auf eine Weise in der Form

$$T_\nu\zeta = \tau_\varkappa(e^{2\pi i\varrho r}\zeta) \qquad (\varrho=0, 1, 2, \cdots g-1)$$

darstellen, wo g den Nenner von r bedeutet; wir haben also

$$\Theta(\eta)\left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)^m = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\varrho=0}^{g-1} H_1[\tau_\varkappa(e^{2\pi i\varrho r}\zeta)]\left[\frac{d\tau_\varkappa(e^{2\pi i\varrho r}\zeta)}{d\zeta}\right]^m,$$

oder, wenn wir die rationale Function von ζ

$$H_1(\tau_\varkappa\zeta)\left(\frac{d\tau_\varkappa\zeta}{d\log\zeta}\right)^m = \overline{H}_\varkappa(\zeta)$$

setzen,

$$\Theta(\eta)\left(\frac{d\eta}{d\log\zeta}\right)^m = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\varrho=0}^{g-1}\overline{H}_\varkappa(e^{2\pi i\varrho r}\zeta).$$

Führen wir durch die Gleichung

$$\zeta^g = t$$

eine neue Variable ein, so ist

$$\sum_{\varrho=0}^{g-1}\overline{H}_\varkappa(e^{2\pi i\varrho r}\zeta) = \psi_\varkappa(t)$$

eine rationale Function von t, und wir erhalten

$$\Theta(\eta) = \left(\frac{d\log\zeta}{d\eta}\right)^m \sum_\varkappa \psi_\varkappa(t),$$

oder, da

$$\frac{d\log\zeta}{d\eta} = \frac{\lambda - \lambda^0}{(\eta-\lambda)(\eta-\lambda^0)}$$

gefunden wird,

$$\Theta(\eta)(\eta-\lambda^0)^{2m} = (\lambda-\lambda^0)^m\zeta^{-m}\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\psi_\varkappa(\zeta^g).$$

Sei in der Umgebung von $t = 0$

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty} \psi_\varkappa(\zeta^g) = \varepsilon_0 (\zeta^g)^q + \varepsilon_1 (\zeta^g)^{q+1} + \cdots,$$

dann haben wir also

$$\Theta(\eta)(\eta - \lambda^0)^{2m} = \zeta^{gq-m}(\bar{\varepsilon}_0 + \cdots). \tag{41}$$

Die Stelle $\eta = \lambda$ ist folglich für die durch die Thetareihe dargestellte Function allgemein gesprochen eine Nullstelle von der Ordnung $gq - m$, wenn wir $\eta - \lambda$ als unendlich kleine Grösse erster Ordnung betrachten. Nehmen wir, was mit Rücksicht auf spätere Anwendungen zweckmässiger ist,

$$(\eta - \lambda)^g$$

als das Unendlichkleine erster Ordnung, so ist die Stelle $\eta = \lambda$ eine Nullstelle von der Ordnung

$$\frac{p}{g},$$

wo p durch die Gleichung

$$p = gq - m$$

bestimmt ist; p ist also eine Zahl, die der Congruenz

$$p \equiv -m \pmod{g}$$

genügt.

Im Falle einer hyperbolischen Substitution (38) setzen wir ähnlich wie vorhin

$$\frac{\eta - \mu_1}{\eta - \mu_2} = \zeta, \qquad \tau_\varkappa \zeta = \frac{\Sigma_\varkappa \eta - \mu_1}{\Sigma_\varkappa \eta - \mu_2},$$

$$H_1(\zeta) = H(\eta)\left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)^m, \quad H_1(\tau_\varkappa \zeta)\left(\frac{d\tau_\varkappa \zeta}{d\log\zeta}\right)^m = \bar{H}_\varkappa(\zeta),$$

dann ist

$$\Theta(\eta)\left(\frac{d\eta}{d\log\zeta}\right)^m = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \sum_{\varrho=-\infty}^{+\infty} \bar{H}_\varkappa(e^{2\pi i\varrho}\zeta).$$

Aus der unbedingten Convergenz der Thetareihe folgt die unbedingte Convergenz der Theilreihe

$$\varphi_\varkappa(\zeta) = \sum_{\varrho=-\infty}^{+\infty} \bar{H}_\varkappa(e^{2\pi i\varrho}\zeta);$$

die durch dieselbe dargestellte Function von ζ verwandelt sich, wenn wir

$$t = \log\zeta$$

setzen, in eine eindeutige Function

$$\varphi_\varkappa(\zeta) = \varphi_\varkappa(e^t) = \chi_\varkappa(t)$$

von t, die offenbar die beiden Perioden

$$2\pi i, \qquad 2\pi\sigma$$

besitzt. Bezeichnen wir durch

$$u_1, u_2, \cdots u_\mu$$

die Unendlichkeitsstellen der rationalen Function $\overline{H}_\varkappa(\zeta)$, so besitzt die doppeltperiodische Function $\chi_\varkappa(t)$ innerhalb ihres Periodenparallelogramms die Unendlichkeitsstellen

$$t = \log u_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \mu),$$

sie lässt sich also durch eine doppeltperiodische Function s, die innerhalb des Periodenparallelogramms nur an zwei Stellen unendlich wird, in der Form

$$\chi_\varkappa(t) = \psi_\varkappa(s) + \frac{ds}{dt}\overline{\psi}_\varkappa(s)$$

darstellen, wo $\psi_\varkappa(s)$, $\overline{\psi}_\varkappa(s)$ rationale Functionen von s bedeuten.

Wir erhalten also für die Thetafunction die Entwickelung

$$\Theta(\eta) = \left(\frac{d\log\zeta}{d\eta}\right)^m \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\left[\psi_\varkappa(s) + \frac{ds}{dt}\overline{\psi}_\varkappa(s)\right],$$

aus welcher erhellt, dass die Doppelpunkte μ_1, μ_2 der hyperbolischen Substitution S Unbestimmtheitsstellen für die Thetafunction sind.

Betrachten wir endlich den Fall der parabolischen Substitution (39) und setzen

$$\zeta = \frac{2\pi i}{\gamma}\,\frac{1}{\eta - \lambda}, \qquad \tau_\varkappa\zeta = \frac{2\pi i}{\gamma}\,\frac{1}{\Sigma_\varkappa\eta - \lambda},$$

$$H_1(\zeta) = H(\eta)\left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)^m, \qquad H_1(\tau_\varkappa\zeta)\left(\frac{d\tau_\varkappa\zeta}{d\zeta}\right)^m = \overline{H}_\varkappa(\zeta),$$

so ergiebt sich

$$\Theta(\eta)\left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)^m = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\varrho=-\infty}^{+\infty}\overline{H}_\varkappa(\zeta + \varrho\, 2\pi i).$$

Lassen wir η aus dem Innern des Einheitskreises kommend in den Punkt λ einrücken, so wird ζ in bestimmter Weise unendlich. Es ist

$$H_1(\zeta) = (\eta - \lambda)^{2m}\left(-\frac{2\pi i}{\gamma}\right)^{-m} H(\eta),$$

also wird $H_1(\zeta)$ für $\eta = \lambda$, d. h. für $\zeta = \infty$ gleich Null; dasselbe gilt offenbar auch für

$$\overline{H}_\varkappa(\zeta) = H_1\left(\frac{2\pi i}{\gamma}\,\frac{1}{\Sigma_\varkappa\eta - \lambda}\right)\left(\frac{2\pi i}{\gamma}\right)^m\left[\frac{d}{d\zeta}\,\frac{1}{\Sigma_\varkappa\eta - \lambda}\right]^m,$$

und folglich wird auch die Function

$$\sum_{\varrho=-\infty}^{+\infty} \overline{H}_\varkappa(\zeta + 2\varrho\pi i) = \varphi_\varkappa(\zeta)$$

für $\zeta = \infty$ gleich Null.

Die Function $\varphi_\varkappa(\zeta)$ ist eine eindeutige periodische Function mit der Periode $2\pi i$ von ζ, die innerhalb des Periodenstreifens nur an einer endlichen Anzahl von Stellen unendlich wird, sie ist folglich als rationale Function von

$$t = e^\zeta$$

darstellbar; sei

$$\varphi_\varkappa(\zeta) = \chi_\varkappa(t),$$

wo also $\chi_\varkappa$ den Algorithmus einer rationalen Function bedeutet. Wir haben demnach

$$\Theta(\eta) = \left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right)^m \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \chi_\varkappa(t) = \left(-\frac{2\pi i}{\gamma}\right)^m \frac{1}{(\eta-\lambda)^{2m}} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \chi_\varkappa(t),$$

und hieraus folgt (vergl. Nr. 203, Bd. II, 1, S. 284), dass die Thetafunction nach Multiplication mit $(\eta - \lambda)^{2m}$ nach positiven ganzen Potenzen von

$$t = e^{\frac{2\pi i}{\gamma}\frac{1}{\eta-\lambda}} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{t} = e^{\frac{2\pi i}{\gamma}\frac{1}{\lambda-\eta}}$$

entwickelt werden kann, je nachdem wir uns auf eine innerhalb oder ausserhalb des Einheitskreises gelegene hinreichend kleine Umgebung des Doppelpunktes λ der parabolischen Substitution S beschränken. Die Doppelpunkte parabolischer Substitutionen sind also auch Unbestimmtheitsstellen der Thetafunction und zwar Unbestimmtheitsstellen von ähnlicher Natur, wie der unendlich ferne Punkt für eine periodische Function, die sich im Endlichen wie eine rationale Function verhält.

311. Die Anzahl der verschiedenen Null- und Unendlichkeitsstellen der Fuchs'schen Thetafunctionen, dargestellt durch ein bestimmtes Integral.

Wir erkennen aus den vorstehenden Betrachtungen, dass die Peripherie des Einheitskreises überall dicht besetzt ist mit Unbestimmtheitsstellen der durch die Thetareihe dargestellten Function. Beschränken wir also η auf das Innere des Einheitskreises, so stellt uns die Thetareihe eine monogene Function von η dar, die über die Peripherie des Einheitskreises hinweg nicht fortgesetzt werden kann, ebenso stellt uns die Thetareihe für Werthe von η, deren absoluter Betrag

grösser ist wie Eins, eine monogene Function dar, die keine Fortsetzung nach dem Innern des Einheitskreises gestattet.

Wir haben also einen einheitlichen analytischen Ausdruck, der uns im Innern und im Aeussern des Einheitskreises zwei verschiedene monogene Functionen von η darstellt.

Entsprechend der für die zur Gruppe ϑ gehörigen Fuchs'schen Functionen festgehaltenen Convention betrachten wir im Folgenden immer nur die innerhalb des Einheitskreises existirende Function und bezeichnen diese als die durch die Reihe (8) dargestellte Fuchs'sche Thetafunction $\Theta(\eta)$.

Wir wenden uns nun zur genaueren Untersuchung der Nullstellen und Unendlichkeitsstellen einer Fuchs'schen Thetafunction.

Wenn die Thetafunction an einer Stelle verschwindet oder unendlich wird, so zeigt sie offenbar an den aus dieser Stelle durch die Substitutionen der Gruppe ϑ hervorgehenden correspondirenden Stellen das gleiche Verhalten.

Es entspricht also jeder innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 gelegenen Nullstelle eine correspondirende Nullstelle in den congruenten Bereichen F_ν, die wir von der innerhalb F_0 befindlichen als nicht wesentlich verschieden ansehen wollen. Da die Unendlichkeitstellen von der Form

$$\frac{-\delta_\nu}{\gamma_\nu}$$

sämmtlich ausserhalb des Einheitskreises liegen, so kommen dieselben für die innerhalb dieses Kreises existirenden Thetafunctionen nicht in Betracht. Jeder im Innern des Einheitskreises gelegenen Unendlichkeitsstelle der rationalen Function $H(\eta)$ entspricht im Allgemeinen eine innerhalb F_0 gelegene Unendlichkeitsstelle einer der Functionen $H(S_\nu \eta)$.

Wir können uns folglich auf die Untersuchung der innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 gelegenen Null- und Unendlichkeitsstellen der Function $\Theta(\eta)$ beschränken.

Wenn eine Null- oder Unendlichkeitsstelle von $\Theta(\eta)$ innerhalb oder auf einer Seite von F_0 gelegen ist und nicht gerade mit einer Ecke von F_0 zusammenfällt, so zählen wir dieselbe in der in der Analysis üblichen Weise als sovielfache Nullstelle, wie der Exponent derjenigen Potenz von $\eta - a$ beträgt, mit welcher die Entwickelung von $\Theta(\eta)$ in der Umgebung dieser Stelle a beginnt. Dabei ist zu bemerken, dass von zwei congruenten Seiten $s_\varkappa$, $s'_\varkappa$ des Bereiches F_0 stets nur die eine, z. B. $s_\varkappa$, als wirklich zu dem Fundamentalbereiche

gehörig anzusehen ist, während die andere $s'_\varkappa$ dem benachbarten Bereiche $F_\varkappa$ zugezählt werden muss.

Wenn eine Ecke $\lambda_\varkappa$, die einen einelementigen Cyklus bildet, eine Null- oder Unendlichkeitsstelle von $\Theta(\eta)$ ist, so gehört diese Ecke, falls der daselbst vorhandene Winkel von F_0

$$\frac{2\pi}{g_\varkappa}$$

von Null verschieden ist, $g_\varkappa$ verschiedenen in dieser Ecke zusammenstossenden Bereichen F_ν gleichzeitig an, wir werden also, wie bereits oben geschehen ist (Nr. 310, S. 196), diese Ecke als $\left(\frac{p}{g_\varkappa}\right)$-fache Nullstelle zu zählen haben, wenn die Entwickelung von $\Theta(\eta)$ in der Umgebung von $\eta = \lambda_\varkappa$ die Form (41) (a. a. O. für $g = g_\varkappa$) hat.

Wenn die Ecke $\lambda_{\sigma+1}$ eine Nullstelle oder Unendlichkeitsstelle von $\Theta(\eta)$ ist, so gilt das Gleiche von den sämmtlichen Ecken des σ-gliedrigen Cyklus, zu dem $\lambda_{\sigma+1}$ gehört. Wir zählen dann, wenn die Entwickelung von $\Theta(\eta)$ in der Umgebung von $\lambda_{\sigma+1}$ mit der Potenz

$$(\eta - \lambda_{\sigma+1})^p$$

beginnt, die Ecke $\lambda_{\sigma+1}$ als eine

$$\frac{p}{\sigma g_{\sigma+1}}\text{-}$$

fache Nullstelle, so dass also die σ den Cyklus bildenden Ecken zusammengenommen eine Nullstelle von der Vielfachheit

$$\frac{p}{g_{\sigma+1}}$$

repräsentiren. Natürlich gilt dies nur, wenn $g_{\sigma+1}$ einen endlichen Werth besitzt.

Um allgemein alle durch erlaubte Abänderungen von F_0 entstehenden Fundamentalbereiche, wo die Cykelnvertheilung der Ecken eine andere sein kann, wie für F_0, mit zu umfassen, sagen wir:

Wenn die Ecken $\lambda, \lambda', \cdots \lambda^{(\mu-1)}$ zusammen einen μ-gliedrigen Cyklus bilden, für welchen die Winkelsumme gleich

$$\frac{2\pi}{g}$$

ist, und wenn die Entwickelung der Thetafunction in der Umgebung von λ mit der Potenz

$$(\eta - \lambda)^p$$

beginnt, so zählt jedes der $\lambda, \lambda', \cdots \lambda^{(\mu-1)}$ als eine

$\frac{p}{\mu g}$-
fache, und somit der ganze Cyklus als eine $\left(\frac{p}{g}\right)$-fache, innerhalb des **Fundamentalbereiches** gelegene Nullstelle von $\Theta(\eta)$. Es ist dann stets

$$p \equiv -m \pmod g.$$

Im Falle einer auf dem Einheitskreise gelegenen Ecke λ, die also zu einer parabolischen Substitution S gehört, zählen wir dieselbe, beziehungsweise die Gesammtheit der Ecken, die mit λ zusammen einen **Cyklus** bilden, als p-fache Nullstelle, wenn die Entwickelung der mit $(\eta - \lambda)^{2m}$ multiplicirten Thetafunction nach Potenzen von

$$t = e^{\frac{2\pi i}{\gamma}\frac{1}{\eta-\lambda}}$$

mit der p-ten Potenz von t beginnt.

Wir fragen nun nach der Anzahl der innerhalb F_0 gelegenen, d. h. der wesentlich von einander verschiedenen Nullstellen der Thetafunction.

Sei für $\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma$ die Ecke $\lambda_\varkappa$ eine Nullstelle von der Ordnung

$$\frac{p_\varkappa}{g_\varkappa}, \quad p_\varkappa + m \equiv 0 \pmod{g_\varkappa},$$

und möge der von den Ecken $\lambda_{\sigma+1}, \lambda'_{\sigma+1}, \cdots \lambda^{(\sigma-1)}_{\sigma+1}$ gebildete Cyklus eine Nullstelle von der Ordnung

$$\frac{p_{\sigma+1}}{g_{\sigma+1}}, \quad p_{\sigma+1} + m \equiv 0 \pmod{g_{\sigma+1}},$$

repräsentiren. **Das Auftreten parabolischer Substitutionen möge vorläufig ausgeschlossen werden.**

Wenn dann im Innern von F_0 noch p_0 einfach zu zählende Nullstellen der Function $\Theta(\eta)$ liegen, so beträgt die Gesammtzahl der wesentlich verschiedenen Nullstellen von $\Theta(\eta)$

$$(42) \qquad p = p_0 + \sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1} \frac{p_\varkappa}{g_\varkappa}.$$

Bedeute nun q die Anzahl der einfach zu zählenden Unendlichkeitsstellen der rationalen Function $H(\eta)$, die **innerhalb** des Einheitskreises gelegen sind, oder genauer gesprochen die Anzahl derjenigen dieser Unendlichkeitsstellen, denen innerhalb F_0 gelegene Unendlichkeitsstellen der Function $\Theta(\eta)$ entsprechen, dann ist bekanntlich

$$(43) \qquad p_0 - q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(F_0)} \frac{d \log \Theta(\eta)}{d\eta}\, d\eta,$$

wo das Integral über die Begrenzung von F_0 zu erstrecken ist. Da die Ecken von F_0, die wirkliche Nullstellen von $\Theta(\eta)$ sind, zu Unendlichkeitstellen der zu integrirenden Function $d\log\Theta(\eta)$ Veranlassung geben, hat man bei der Integration diese Ecken in unendlich kleinen Curven zu umgehen; wir können diese Curven z. B. als kleine Kreisbogen wählen, deren Mittelpunkte in den betreffenden Ecken liegen.

312. Berechnung der Anzahl der wesentlich verschiedenen Nullstellen, wenn keine parabolischen Substitutionen auftreten. Bedeutung als superficieller Inhalt des Fundamentalbereiches.

Betrachten wir zunächst die Integrale über diese kleinen Curven. In der Umgebung von $\lambda_\varkappa$ ist

$$\Theta(\eta) = (\eta - \lambda_\varkappa)^{p_\varkappa}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1(\eta - \lambda_\varkappa) + \cdots),$$

$$\Theta'(\eta) = p_\varkappa(\eta - \lambda_\varkappa)^{p_\varkappa - 1}(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}_1(\eta - \lambda_\varkappa) + \cdots),$$

also

$$\frac{\Theta'(\eta)}{\Theta(\eta)} = \frac{p_\varkappa}{\eta - \lambda_\varkappa}(1 + \bar{\bar{\varepsilon}}_1(\eta - \lambda_\varkappa) + \cdots).$$

Integriren wir also über einen kleinen Kreis mit dem Mittelpunkte $\lambda_\varkappa$, so ist

$$\int\limits_{(\lambda_\varkappa)} \frac{d\log\Theta(\eta)}{d\eta}\,d\eta = p_\varkappa\cdot 2\pi i. \tag{44}$$

Das Integral verläuft dabei im positiven Sinne, d. h. so, dass der eingeschlossene Punkt $\lambda_\varkappa$ zur Linken bleibt. Das Integral über die Begrenzung von F_0 ist so zu erstrecken, dass der Fundamentalbereich F_0 zur Linken bleibt, also ist der bei Berechnung von (43) in Betracht kommende Theil des Integrals (44) im negativen Sinne zu nehmen; wir schreiben dies

$$\int\limits_{(\bar{\lambda}_\varkappa)} \frac{d\log\Theta(\eta)}{d\eta}\,d\eta = -2\pi i p_\varkappa.$$

Von diesem Integrale ist für $\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma$ der auf den Bogen mit dem Centriwinkel

$$\frac{2\pi}{g_\varkappa}$$

entfallende Theil zu nehmen, wir haben also den Beitrag

$$-\frac{2\pi i p_\varkappa}{g_\varkappa}$$

zum Integrale (43). Ebenso ergiebt sich von den auf die Ecken

$$\lambda_{\sigma+1}, \lambda'_{\sigma+1}, \ldots \lambda^{(\sigma-1)}_{\sigma+1}$$

bezüglichen Integralen, wo die Winkelsumme von F_0 den $(g_{\sigma+1})^{\text{ten}}$ Theil von 2π beträgt, der Gesammtbeitrag

$$-\frac{2\pi i p_{\sigma+1}}{g_{\sigma+1}},$$

so dass also von den kleinen, die Ecken von F_0 umgehenden Curven der Beitrag

$$(45) \qquad -2\pi i \sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1} \frac{p_\varkappa}{g_\varkappa}$$

zu dem Integrale (43) geliefert wird.

Die Integrale über die Seiten von F_0 paaren sich zu je zweien, die über congruente Seiten $s_\varkappa$, $s'_\varkappa$ erstreckt sind; wir haben also

$$(46). \qquad \sum_{\varkappa=1}^{\sigma} \left(\int_{(s_\varkappa)} \frac{d \log \Theta(\eta)}{d\eta} d\eta - \int_{(s'_\varkappa)} \frac{d \log \Theta(\eta)}{d\eta} d\eta \right),$$

wo das negative Vorzeichen vor dem zweiten Integrale geschrieben wurde, um anzudeuten, dass während $s_\varkappa$ in der Richtung von $\lambda_\varkappa$ nach $\lambda^{(\varkappa-1)}_{\sigma+1}$ durchlaufen wird, die correspondirende Seite $s'_\varkappa$ in der Richtung von $\lambda^{(\varkappa)}_{\sigma+1}$ nach $\lambda_\varkappa$ hin zu durchlaufen ist.

Nun ist, da $s'_\varkappa$ aus $s_\varkappa$ durch die Substitution $A_\varkappa \eta$ hervorgeht (vergl. Nr. 215, Bd. II, 1, S. 337),

$$\int_{(s'_\varkappa)} \frac{d \log \Theta(\eta)}{d\eta} d\eta = \int_{(s_\varkappa)} \frac{\Theta'(A_\varkappa \eta)}{\Theta(A_\varkappa \eta)} dA_\varkappa \eta = \int_{(s_\varkappa)} d \log \Theta(A_\varkappa \eta).$$

Ferner haben wir nach Gleichung (9) der Nr. 305 (S. 176)

$$\Theta(A_\varkappa \eta) = \Theta(\eta) \left(\frac{dA_\varkappa \eta}{d\eta}\right)^{-m},$$

also durch logarithmische Differentiation

$$d \log \Theta(A_\varkappa \eta) = d \log \Theta(\eta) - m\, d \log \left(\frac{dA_\varkappa \eta}{d\eta}\right);$$

es ist folglich

$$\int_{(s_\varkappa)} d \log \Theta(\eta) - \int_{(s'_\varkappa)} d \log \Theta(\eta) = m \int_{(s_\varkappa)} d \log \left(\frac{dA_\varkappa \eta}{d\eta}\right) = m \left[\log \frac{dA_\varkappa \eta}{d\eta}\right]_{\lambda_\varkappa}^{\lambda^{(\varkappa-1)}_{\sigma+1}}$$

diese Differenz hat demnach den Werth

$$m\left\{\log\left|\frac{dA_\varkappa\eta}{d\eta}\right|\right\}_{\lambda_\varkappa}^{\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa-1)}}+mi\left\{\operatorname{Arg}\left(\frac{dA_\varkappa\eta}{d\eta}\right)\right\}_{\lambda_\varkappa}^{\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa-1)}}.$$

Wir finden also für die Summe (45) einen Ausdruck von der Form

$$R+mi\sum_{\varkappa=1}^{\sigma}\left[\left(\operatorname{Arg}\frac{dA_\varkappa\eta}{d\eta}\right)_{\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa-1)}}-\left(\operatorname{Arg}\frac{dA_\varkappa\eta}{d\eta}\right)_{\lambda_\varkappa}\right],$$

wo R eine reale Grösse bedeutet. Nach den Ergebnissen der Nr. 199, (Bd. II, 1, S. 268) ist

$$\left(\operatorname{Arg}\frac{dA_\varkappa\eta}{d\eta}\right)_{\lambda_\varkappa}=\frac{2\pi}{g_\varkappa};$$

um für den Ausdruck

$$\sum_{\varkappa=1}^{\sigma}\left(\operatorname{Arg}\frac{dA_\varkappa\eta}{d\eta}\right)_{\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa-1)}}$$

eine genaue Werthbestimmung zu erhalten, verfahren wir folgendermassen.

Denken wir uns in jeder der Ecken $\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa-1)}$ an die beiden daselbst zusammenstossenden Seiten von F_0 die Tangenten gezogen, so erhalten wir ein gradliniges sternförmiges (2σ)-Eck, dessen Winkelsumme gleich

$$(2\sigma-2)\pi$$

ist. Die Summe der Winkel dieses (2σ)-Ecks, die bei Ecken $\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa-1)}$ liegen, ist nichts anderes wie

$$\frac{2\pi}{g_{\sigma+1}},$$

während der Winkel, den die von $\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa)}$ und $\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa-1)}$ ausgehenden und aufeinander folgenden Seiten mit einander einschliessen, offenbar gleich dem Werthe von

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{dA_\varkappa\eta}{d\eta}\right)$$

im Punkte $\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa-1)}$ gefunden wird.

Wir haben also

$$(2\sigma-2)\pi=\sum_{\varkappa=1}^{\sigma}\left(\operatorname{Arg}\frac{dA_\varkappa\eta}{d\eta}\right)_{\lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa-1)}}+\frac{2\pi}{g_{\sigma+1}}$$

und der Coefficient von i in der Summe (45) hat folglich den Werth

$$m\left\{(2\sigma-2)\pi-2\pi\sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1}\frac{1}{g_\varkappa}\right\}.$$

Das Integral (43) ergiebt sich demnach gleich

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{R + i\,2m\pi(\sigma-1) - 2\pi i\sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1}\frac{p_\varkappa + m}{g_\varkappa}\right\},$$

und da dasselbe einen realen Werth haben muss, ist

$$R = 0,$$

d. h. wir finden

$$p_0 - q = m(\sigma-1) - \sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1}\frac{p_\varkappa + m}{g_\varkappa},$$

wo die unter dem Summenzeichen stehenden Glieder zufolge der für die $p_\varkappa$ bestehenden Congruenzen ganze Zahlen sind.

Die Gesammtzahl p der innerhalb F_0 gelegenen, d. h. wesentlich von einander verschiedenen Nullstellen der Function $\Theta(\eta)$ ist also nach (42)

$$p = q + 2m\left\{\sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{g_\varkappa}\right) - 1\right\}.$$

Uebertragen wir den Fundamentalbereich F_0 auf die Fläche vom constanten Krümmungsmaasse -1, so erhalten wir ein von geodätischen Linien gebildetes (2σ)-Eck, dessen Winkelsumme gleich

$$2\pi\sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1}\frac{1}{g_{\sigma+1}}$$

ist. Nun hat man nach Gauss für die Totalkrümmung (curvatura integra) eines auf einer Fläche vom Krümmungsmaasse K gelegenen geodätischen Dreiecks, dessen Winkel gleich A, B, C sind die Formel

$$\int K\,dw = A + B + C - \pi,$$

wo dw das Flächenelement bedeutet und die Integration über das Innere des betrachteten Dreiecks zu erstrecken ist. Wenn also die Krümmung der Fläche constant und zwar

$$K = -1$$

ist, so ist der Inhalt des betrachteten geodätischen Dreiecks gleich

$$\int dw = \pi - (A + B + C).$$

Der Inhalt unseres dem Fundamentalbereiche F_0 entsprechenden geodätischen (2σ)-Ecks ist hiernach gleich

$$2\sigma\pi - \sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1}\frac{2\pi}{g_\varkappa} - 2\pi,$$

also gleich

$$4\pi\left(\sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{g_\varkappa}\right)-1\right).$$

Der Ausdruck

(47) $$\sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{g_\varkappa}\right)-1=\frac{-1}{\nu}$$

ist also stets positiv und stellt, abgesehen von dem Factor 4π, den superficiellen Inhalt des Fundamentalbereiches F_0 dar.

Wir schliessen hieraus, dass die Anzahl der wesentlich verschiedenen Nullstellen

(48) $$p = q + 2m\frac{-1}{\nu}$$

der Thetafunction stets grösser ist wie die Anzahl q der Unendlichkeitsstellen innerhalb F_0.

In den Fällen, wo die unabhängige Variable einer Gauss'schen Differentialgleichung eine rationale Function des Integralquotienten war, d. h. für die endlichen Gruppen projectiver Substitutionen, ergab sich die durch die Gleichung (47) definirte Grösse ν als ganze Zahl und wesentlich positiv. Wir können sogar auf Grund der Betrachtungen der Nr. 299 (S. 149) (vergl. die Nr. 326) sagen:

Allemal, wenn die durch die Gleichung (47) definirte Zahl ν für eine discontinuirliche Gruppe ϑ positiv ist, muss sie eine ganze Zahl sein.

313. Der Fall, wo parabolische Substitutionen auftreten. Bildung von Fuchs'schen Functionen aus Thetafunctionen.

Wir lassen nun die Beschränkung, dass sich unter den Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_\sigma, A_{\sigma+1}$$

keine parabolische befindet, fallen. Dann bleiben alle unter dieser Beschränkung gemachten Schlüsse richtig, es handelt sich nur um die Berechnung des Integrals

$$\int d\log\Theta(\eta),$$

erstreckt über eine kleine Curve, die ganz innerhalb F_0 verläuft und eine parabolische Ecke, d. h. den Doppelpunkt $\lambda_\varkappa$ einer parabolischen Substitution $A_\varkappa$

$$\frac{1}{A_\varkappa\eta-\lambda_\varkappa}=\frac{1}{\eta-\lambda_\varkappa}+\gamma_\varkappa$$

umgiebt.

Setzen wir

$$t = e^{\frac{2\pi i}{\gamma_\varkappa(\eta - \lambda_\varkappa)}},$$

so ist in der Nähe der Stelle $\lambda_\varkappa$ die Thetafunction in der Form

$$\Theta(\eta) = \frac{1}{(\eta - \lambda_\varkappa)^{2m}} \mathfrak{P}_\varkappa(t)\, t^{p_\varkappa}$$

darstellbar, wo $\mathfrak{P}_\varkappa(t)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von t fortschreitende Reihe bedeutet, die für $t = 0$ nicht verschwindet; $p_\varkappa$ ist eine ganze Zahl.

Wenn η in einem kleinen Kreise, dessen Mittelpunkt in $\lambda_\varkappa$ liegt, von einem Punkte der Seite $s_\varkappa$ nach dem correspondirenden Punkte der Seite $s'_\varkappa = A_\varkappa s_\varkappa$ geht, so hat t einen kleinen Kreis mit dem Mittelpunkte $t = 0$ vollständig durchlaufen, und zwar erfolgt die Bewegung von t so, dass der Punkt $t = 0$ zur Rechten bleibt, weil bei der entsprechenden Bewegung von η der Punkt $\lambda_\varkappa$ zur Rechten (die Fläche F_0 zur Linken) liegt. Bilden wir also das Integral

$$\int d \log \Theta(\eta)$$

längs dieses kleinen Kreisbogens der η-Ebene, so ergiebt sich, da

$$d \log \Theta(\eta) = d \log (\eta - \lambda_\varkappa)^{-2m} + d \log t^{p_\varkappa} \mathfrak{P}_\varkappa(t)$$

ist, offenbar

$$\int d \log \Theta(\eta) = \int d \log (\eta - \lambda_\varkappa)^{-2m} + \int d \log t^{p_\varkappa} \mathfrak{P}_\varkappa(t).$$

Das erste Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung verschwindet, wenn wir den Radius des kleinen Kreisbogens der η-Ebene unendlich klein nehmen, das zweite Integral dagegen reducirt sich auf

$$-2\pi i p_\varkappa,$$

wir haben folglich

$$\int d \log \Theta(\eta) = -2\pi i p_\varkappa.$$

Berechnen wir also wie in dem vorhin betrachteten Falle das über die Begrenzung von F_0 erstreckte Integral von $d \log \Theta(\eta)$, so finden wir

$$\int\limits_{(F_0)} d \log \Theta(\eta) = 2\pi i \left[m(\sigma - 1) - \sum_\varkappa \frac{p_{e\varkappa} + m}{g_{e\varkappa}} - \sum_\varkappa p_\varkappa \right],$$

wo sich die erste Summe in der eckigen Klammer auf die elliptischen Substitutionen

$$A_{e1},\ A_{e2},\ \cdots,$$

die zweite Summe auf die parabolischen unter den

$$A_1,\ A_2,\ \cdots\ A_{\sigma+1}$$

bezieht.

Wenn wir im Sinne der gemachten Festsetzung die parabolische Ecke $\lambda_\varkappa$ als eine $p_\varkappa$-fach zu zählende Nullstelle ansehen, so finden wir also für die Gesammtzahl der wesentlich verschiedenen Nullstellen von $\Theta(\eta)$ den Ausdruck

$$p = q + 2m\left[\sum_\varkappa\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_{e\varkappa}}\right) - 1 + \frac{\tau}{2}\right],$$

wo sich die Summation wieder auf die elliptischen Substitutionen $A_{e\varkappa}$ bezieht und τ die Anzahl der parabolischen Substitutionen unter den

$$A_1, A_2, \cdots A_{\sigma+1}$$

bedeutet. Beachten wir nunmehr, dass für eine parabolische Substitution das entsprechende $g_\varkappa$ unendlich gross zu nehmen ist, so haben wir also auch in dem allgemeinen Falle für p die Formel

$$p = q + 2m\frac{-1}{\nu},$$

wo ν die durch die Gleichung (47) festgelegte Bedeutung hat.

Die Formel (48) ist also ganz allgemein gültig, und offenbar bedeutet auch im allgemeinen Falle

$$\frac{-4\pi}{\nu}$$

den superficiellen Inhalt des Fundamentalbereiches F_0.

Wenn wir wie üblich die Unendlichkeitsstellen als negative Nullstellen zählen (was bei den eventuell in den Ecken von F_0 gelegenen Unendlichkeitsstellen auch bisher schon geschehen ist), so haben wir also für die Gesammtzahl $p - q$ der wesentlich verschiedenen Nullstellen den Satz:

Die Anzahl der wesentlich verschiedenen Nullstellen der durch die Reihe (8) dargestellten Fuchs'schen Thetafunction ist proportional der Zahl m und dem superficiellen Inhalte des Fundamentalbereiches der Gruppe ϑ.

Mit Hülfe der durch Reihen von der Form (8) der Nr. 305 (S. 175) definirten Thetafunctionen lassen sich, wie wir am a. a. O. bereits bemerkt haben, durch Quotientenbildung eindeutige Functionen herstellen, die bei den Substitutionen der Gruppe ϑ ungeändert bleiben. Betrachten wir den daselbst gebildeten Quotienten

$$f(\eta) = \frac{\Theta_2(\eta)}{\Theta_1(\eta)}$$

zweier zur selben Zahl m gehöriger Thetafunctionen, und sei p_1 die Anzahl der Nullstellen, q_1 die Anzahl der Unendlichkeitsstellen von $\Theta_1(\eta)$ innerhalb F_0 und mögen p_2, q_2 die analoge Bedeutung für $\Theta_2(\eta)$ haben, dann ist im Allgemeinen $p_2 + q_1$ die Anzahl der Nullstellen, $p_1 + q_2$

die Anzahl der Unendlichkeitsstellen der Function $f(\eta)$ innerhalb F_0. Diese Function wird also im Innern des Fundamentalbereiches nur an einer endlichen Anzahl von Stellen gleich Null oder unendlich,

$f(\eta)$ ist also eine Fuchs'sche Function.

Da zufolge der Gleichung (48) (Nr. 312, S. 206)

$$p_1 + q_2 = p_2 + q_1$$

ist, so stimmt die Anzahl der Nullstellen von $f(\eta)$ mit der Anzahl der Unendlichkeitsstellen überein, wie es im Sinne des Satzes der Nr. 215 (Bd. II, 1, S. 338) sein muss.

Allgemeiner können wir in folgender Weise Fuchs'sche Functionen bilden.

Wir sagen, die durch die Reihe (8) dargestellte Thetafunction gehöre zur Zahl m. Ein Product von Thetafunctionen, die zu den Zahlen

$$m_1, m_2, \cdots m_\mu$$

gehören, möge ebenso als zu der Zahl

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_\mu$$

gehörig bezeichnet werden. Bilden wir eine ganze rationale Function mit constanten Coefficienten von Thetafunctionen, in welcher jedes Monom zur selben Zahl K gehört und dividiren dieselbe durch eine andere, ebenso beschaffene ganze Function, so gehört der Quotient zur Zahl Null und ist folglich eine Fuchs'sche Function.

Es entsteht naturgemäss die Frage, ob sich auch umgekehrt jede Fuchs'sche Function als ein solcher Quotient darstellen lässt. Wir beschränken uns bei der Behandlung dieser Frage auf den Fall, wo alle Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_{\sigma+1}$$

elliptische sind.

Drittes Kapitel.

314. Invariante eindeutige Formen. Allgemeine Gestalt der ganzen Formen als Functionen der unabhängigen Variabeln.

Denken wir uns die Fuchs'sche Function

$$z = f(\eta)$$

gebildet, die innerhalb F_0 jeden Werth nur ein einziges Mal annimmt und die für

$$\eta = \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_{\sigma+1}$$

beziehungsweise die Werthe

$$0 = f(\lambda_1), \qquad 1 = f(\lambda_2), \qquad \infty = f(\lambda_{\sigma+1})$$

besitzt. Dann wissen wir, dass sich jede zur Gruppe ϑ gehörige Fuchs'sche Function rational durch z darstellen lässt, und dass eine lineare Differentialgleichung von der Form (1) (Nr. 304, S. 168) existirt, in welcher η als der Quotient der beiden Integrale

$$y_1 = \sqrt{\frac{dz}{d\eta}}, \qquad y_2 = \eta\sqrt{\frac{dz}{d\eta}}$$

erscheint.

Wenn η die Substitution

$$S_\nu \eta = \frac{\alpha_\nu \eta + \beta_\nu}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}$$

der Gruppe ϑ erfährt, so verwandeln sich y_1, y_2 in

$$y_1^{(\nu)} = \pm(\delta_\nu y_1 + \gamma_\nu y_2),$$

$$y_2^{(\nu)} = \pm(\beta_\nu y_1 + \alpha_\nu y_2),$$

der Ausdruck

$$f'(z) = \frac{dz}{d\eta}$$

multiplicirt sich also mit

$$(\gamma_\nu \eta + \delta_\nu)^2.$$

Wir schliessen hieraus, dass das Product

$$(1) \qquad y_1^{-2m}\,\Theta(\eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} H\left(\frac{\alpha_\nu \eta + \beta_\nu}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}\right)\frac{1}{(\gamma_\nu y_2 + \delta_\nu y_1)^{2m}},$$

wo m die Zahl bedeutet, zu welcher $\Theta(\eta)$ gehört, eine eindeutige Function von η ist, die bei den Substitutionen der Gruppe ϑ ungeändert bleibt und sich innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 wie eine rationale Function verhält. Also ist (1) eine Fuchs'sche Function, und demnach eine rationale Function von z.

Der Ausdruck

$$H(\eta)\, y_1^{-2m}$$

ist offenbar eine rationale homogene Function $(-2m)^{\text{ten}}$ Grades der y_1, y_2; bedeutet umgekehrt $\varphi(y_1, y_2)$ eine beliebige rationale homogene Function vom Grade $-2m$ in den y_1, y_2, so ist $\varphi(y_1, y_2)$ in der Form

$$\varphi(y_1, y_2) = y_1^{-2m}\, \Phi(\eta)$$

darstellbar, wo $\Phi(\eta)$ eine rationale Function von η ist, und die Reihe

$$\text{(1a)} \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(y_1^{(\nu)}, y_2^{(\nu)})$$

ist demnach nichts anderes, wie ein Ausdruck von der Form (1).

Offenbar ist (1a) eine homogene (natürlich transcendente) Function vom Grade $(-2m)$ in den y_1, y_2, oder, wie wir kurz sagen wollen, eine Form. Diese Form ist nach Multiplication mit y_1^{2m} eine eindeutige Function von η, wir nennen sie deshalb eine eindeutige Form; sie hat ferner die Eigenschaft, ungeändert zu bleiben, wenn die y_1, y_2 eine Substitution der homogenen Monodromiegruppe ϑ der Differentialgleichung (1) (Nr. 304, S. 168) erfahren, sie soll darum eine invariante eindeutige Form heissen (vergl. Bd. II, 1, Nr. 195, S. 250).

Wir wollen allgemein eine homogene Function $H(y_1, y_2)$ von y_1, y_2 vom Grade r, die sich durch Multiplication mit y_1^{-r} in eine eindeutige Function

$$y_1^{-r} H(y_1, y_2) = \mathsf{H}(\eta)$$

von η verwandelt und die gleich der Wurzel aus einer rationalen Function von z ist, eine invariante eindeutige Form von y_1, y_2 nennen.

Offenbar ist der Grad r einer invarianten eindeutigen Form von y_1, y_2 stets eine rationale Zahl.

Eine invariante eindeutige Form soll insbesondere eine ganze Form heissen, wenn dieselbe für solche endliche Werthe der y_1, y_2, deren Quotient η innerhalb des Einheitskreises liegt, niemals unendlich wird, d. h. also wenn

$$\text{(2)} \qquad H(y_1, y_2) = y_1^r\, \mathsf{H}(\eta) = R(z)$$

so beschaffen ist, dass die eindeutige Function $\mathsf{H}(\eta)$ für kein η innerhalb des Einheitskreises, und die Wurzel aus einer rationalen Function $R(z)$ nur so unendlich wird, wie y_1^{-r} verschwindet.

Jede invariante eindeutige Form ist dann als Quotient zweier ganzer Formen darstellbar.

Um die allgemeine Gestalt einer ganzen Form aufzustellen, haben wir zunächst die Art des Verschwindens von y_1 zu untersuchen.

Da zufolge unserer Voraussetzung die $A_1, A_2, \cdots A_{\sigma+1}$ elliptische Substitutionen sind, haben die ganzen Zahlen

$$g_1, g_2, \cdots g_{\sigma+1}$$

endliche Werthe. Bei geeigneter Wahl von η ist dann y_1 für jeden regulären Werth von z endlich und von Null verschieden, verschwindet für $z = a_\varkappa$ von der Ordnung

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

und wird für $z = a_{\sigma+1} = \infty$ wie die

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{g_{\sigma+1}}\right)^{\text{te}}$$

Potenz von z unendlich. Die Anzahl der einfach zu zählenden Nullstellen von y_1 ist demnach gleich

$$\sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_\varkappa}\right) - 1 = -\frac{1}{\nu},$$

d. h. abgesehen von dem Factor 4π gleich dem superficiellen Inhalte des Fundamentalbereiches F_0.

Die Wurzel aus einer rationalen Function $R(z)$, die den Werth einer ganzen Form vom Grade r darstellt, hat also die Gestalt

$$(3) \qquad R(z) = \frac{G(z)}{\prod\limits_{\varkappa=1}^{\sigma}(z - a_\varkappa)^{-r\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_\varkappa}\right)}},$$

wo $G(z)$ die Wurzel aus einer rationalen Function von z bedeutet, deren Grad p einen Werth

$$p \leqq \frac{r}{\nu}$$

haben muss, damit $R(z)$ für $z = \infty$ von nicht niedrigerer Ordnung verschwindet wie y_1^r.

Sei der Zähler von $R(z)$

$$(4) \qquad G(z) = \prod_{i=1}^{\mu}(z - c_i)^{l_i},$$

wo die $c_1, c_2, \cdots c_\mu$ sämmtlich von einander verschieden und die $l_1, l_2, \cdots l_\mu$ positive rationale Zahlen sind, die der Gleichung

$$\sum_{i=1}^{\mu} l_i = p$$

genügen, möge ferner $\eta = \gamma_i$ diejenige innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 gelegene Stelle bedeuten, für welche

$$c_i = f(\gamma_i) \qquad (i=1, 2, \cdots \mu),$$

dann wird $\mathsf{H}(\eta)$ für die Stellen

$$S_\nu \gamma_i \qquad (\nu=0, 1, 2, \cdots; \; i=1, 2, \cdots \mu)$$

verschwinden, und zwar, wenn c_i ein regulärer Punkt ist, von der Ordnung l_i, dagegen, wenn c_i mit einem der im Endlichen gelegenen singulären Punkte, etwa mit $a_\varkappa$, zusammenfällt, von der Ordnung $l_i g_\varkappa$.

Da $\mathsf{H}(\eta)$ eine eindeutige Function von η sein sollte, so folgt hieraus, dass für einen regulären Werth c_i der Exponent l_i nothwendig eine ganze Zahl, dagegen für $c_i = a_\varkappa$ ein ganzzahliges Vielfaches von

$$\frac{1}{g_\varkappa}$$

sein muss.

Sind umgekehrt diese Bedingungen für die Exponenten l_i in einem Ausdrucke von der Form (4) erfüllt, so ist der Ausdruck $R(z)$, wie er durch die Gleichung (3) dargestellt wird, so beschaffen, dass

$$y_1^{-r} R(z) \tag{5}$$

in der Umgebung jeder innerhalb des Einheitskreises gelegenen Stelle η eindeutig, also eine unverzweigte Function von η ist. Da das Innere des Einheitskreises eine einfach zusammenhängende Fläche bildet, so folgt hieraus, dass das Product (5) eine schlechthin eindeutige Function von η sein muss, d. h. es stellt dann $R(z)$ auch stets eine ganze invariante eindeutige Form von y_1, y_2 dar.

Wir finden also für eine ganze invariante eindeutige Form r-ten Grades die Darstellung

$$H(y_1, y_2) = y_1^r \mathsf{H}(\eta) = \frac{M(z)}{\prod_{\varkappa=1}^{\sigma} (z - a_\varkappa)^{\mu_\varkappa}}, \tag{6}$$

wo die Zahlen $\mu_\varkappa$ den Ungleichungen

$$\mu_\varkappa < -r\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_\varkappa}\right) \qquad (\varkappa=1, 2, \cdots \sigma)$$

Genüge leisten und so beschaffen sind, dass die

$$-r\left(\frac{g_\varkappa}{2}-\frac{1}{2}\right)-\mu_\varkappa g_\varkappa$$

ganzzahlige Werthe haben, wo ferner $M(z)$ eine ganze rationale Function bedeutet, deren Grad p die Ungleichung

$$p \leqq \sum_{\varkappa=1}^{\sigma}\mu_\varkappa + r\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{g_{\sigma+1}}\right) \leqq \frac{r}{v}$$

erfüllt, und wo endlich auch

$$-r\left(\frac{g_{\sigma+1}}{2}+\frac{1}{2}\right)-\sum_{\varkappa=1}^{\sigma}\mu_\varkappa g_{\sigma+1}$$

eine ganze Zahl ist.

315. Theorie der ganzen Thetafunctionen.

Wenn die rationale Function $H(\eta)$, die zur Bildung der durch die Reihe (8) (Nr. 305, S. 175) definirten Fuchs'schen Thetafunction dient, an keiner innerhalb des Einheitskreises gelegenen Stelle η unendlich ist, so wird die Thetafunction $\Theta(\eta)$ selbst innerhalb des Einheitskreises allenthalben endlich sein. Wir wollen eine so beschaffene Thetafunction eine ganze Thetafunction nennen.

Bedeutet $\Theta(\eta)$ eine solche ganze Thetafunction, so ist offenbar das für dieselbe gebildete Product (1) (Nr. 314, S. 210) eine ganze invariante eindeutige Form von y_1, y_2, also in der Form (6) darstellbar. Da aber das Product (1) eine rationale Function von z sein muss, so haben, wenn in der Gleichung (6) die Function $\mathsf{H}(\eta)$ eine ganze Thetafunction bedeutet, die Zahlen

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots\ \mu_\sigma$$

ganzzahlige Werthe, und r ist gleich $-2m$. Es lässt sich also jede zur Zahl m gehörige ganze Thetafunction in die Form setzen

$$\Theta(\eta) = y_1^{2m}\frac{\vartheta_p(z)}{(z-a_1)^{\mu_1}(z-a_2)^{\mu_2}\cdots(z-a_\sigma)^{\mu_\sigma}}, \tag{7}$$

wo $\vartheta_p(z)$ eine ganze Function p-ten Grades von z, μ_1, μ_2, $\cdots$ μ_σ ganze Zahlen bedeuten, und wo für die p, μ_1, μ_2, $\cdots$ μ_σ die Ungleichungen

$$\begin{cases} \mu_\varkappa < m\left(1-\dfrac{1}{g_\varkappa}\right) \qquad (\varkappa=1,2,\cdots\sigma), \\ p < \displaystyle\sum_{\varkappa=1}^{\sigma}\mu_\varkappa - m\left(1+\dfrac{1}{g_{\sigma+1}}\right) < \dfrac{-2m}{v} \end{cases} \tag{8}$$

erfüllt sind.

Wenn die Zahl m gegeben ist, so ergeben die Ungleichungen (8) eine wohlbestimmte obere Grenze für den Grad p der ganzen rationalen Function $\vartheta_p(z)$. Sei diese obere Grenze $\mathfrak{g}_m$, so dass also p noch gleich $\mathfrak{g}_m - 1$ werden kann. Dann erhalten wir jedenfalls einen Ausdruck, in welchem die allgemeinste ganze und zur Zahl m gehörige Thetafunction enthalten sein muss, wenn wir bilden

$$(9) \qquad y_1^{2m} \frac{C_0 + C_1 z + \cdots + C_{\mathfrak{g}_m - 1} z^{\mathfrak{g}_m - 1}}{(z - a_1)^{\mu_1} (z - a_2)^{\mu_2} \cdots (z - a_\sigma)^{\mu_\sigma}},$$

wo $\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_\sigma$ die grössten ganzen Zahlen bedeuten, die den Ungleichungen

$$\mu_\varkappa < m\left(1 - \frac{1}{g_\varkappa}\right) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

Genüge leisten, und wo die $C_0, C_1, \cdots C_{\mathfrak{g}_m - 1}$ unbestimmte Constanten sind. Wir haben also den Satz:

Jede zur Zahl m gehörige ganze Thetafunction lässt sich homogen linear mit constanten Coefficienten durch $\mathfrak{g}_m$ geeignet gewählte, specielle derartige Functionen darstellen.

Es wären nun zwei Fälle möglich.

Von dem Ausdrucke (9) steht fest, dass sich derselbe durch $\mathfrak{g}_m$ und nicht durch weniger specielle Ausdrücke von derselben Gestalt homogen linear mit constanten Coefficienten darstellen lässt. Wenn nun jeder Ausdruck von der Form (9) auch durch eine ganze Thetafunction

$$(10) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} H(S_\nu \eta) \left(\frac{dS_\nu \eta}{d\eta}\right)^m$$

dargestellt werden kann, so lässt sich auch jede solche Thetafunction durch genau $\mathfrak{g}_m$ derselben und nicht durch weniger homogen linear mit constanten Coefficienten ausdrücken. Wenn dagegen nicht jeder Ausdruck (9) in die Form einer Thetareihe (10) gesetzt werden kann, so muss die allgemeinste, zur Zahl m gehörige ganze Thetafunction sich durch höchstens $\mathfrak{g}_m - 1$ ebenso beschaffene Thetafunctionen

$$(11) \qquad \Theta_i(\eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} H_i(S_\nu \eta) \left(\frac{dS_\nu \eta}{d\eta}\right)^m \qquad (i = 1, 2, \cdots \mathfrak{g}_m - 1)$$

homogen linear mit constanten Coefficienten ausdrücken lassen.

Es wird sich zeigen, dass die letztere Annahme auf einen Widerspruch führt.

316. Beweis, dass jede Fuchs'sche Function durch Thetafunctionen dargestellt werden kann.

Seien $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{\mathfrak{g}_m}$ irgend welche, z. B. innerhalb F_0 gelegene Werthe von η. Dann lassen sich stets $\mathfrak{g}_m$ Grössen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots \mathfrak{a}_{\mathfrak{g}_m}$ so bestimmen, dass die $\mathfrak{g}_m - 1$ homogenen Gleichungen

$$\mathfrak{a}_1 \Theta_i(\eta_1) + \mathfrak{a}_2 \Theta_i(\eta_2) + \cdots + \mathfrak{a}_{\mathfrak{g}_m} \Theta_i(\eta_{\mathfrak{g}_m}) = 0 \quad (i=1, 2, \cdots \mathfrak{g}_m - 1)$$

befriedigt werden.

Wenn nun jede ganze Thetafunction von der Form (10) durch die Functionen (11) homogen linear mit constanten Coefficienten darstellbar sein sollte, so müsste für jede rationale Function $H(\eta)$, die an keiner innerhalb des Einheitskreises gelegenen Stelle unendlich wird, die Gleichung

$$(12) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{\mathfrak{g}_m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{a}_\varkappa H(S_\nu \eta_\varkappa)(\gamma_\nu \eta_\varkappa + \delta_\nu)^{-2m} = 0$$

identisch erfüllt sein.

Bilden wir uns den Ausdruck

$$\Phi(\eta, a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\eta - S_\nu a} \frac{1}{(\gamma_\nu a + \delta_\nu)^{2m}},$$

so stellt derselbe offenbar eine zur Zahl m gehörige Thetafunction von a dar, die sofern wir η und a auf das Innere des Einheitskreises beschränken, nur für $a = \eta$ und die mit η correspondirenden Stellen $S_\nu \eta$ unendlich wird, und zwar wird sie an diesen Stellen unendlich gross von der ersten Ordnung. Sei

$$S\eta = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$$

irgend eine beliebige Substitution der Gruppe ϑ, dann ist

$$\Phi(S\eta, a) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{S\eta - S_i a} \left(\frac{dS_i a}{da}\right)^m,$$

und da offenbar

$$S\eta - b = -\frac{\gamma b - \alpha}{\gamma\eta + \delta}(\eta - S^{-1} b)$$

ist, so haben wir

$$\Phi(S\eta, a) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\gamma\eta + \delta}{\eta - S^{-1} S_i a} \cdot \frac{-1}{\gamma(S_i a) - \alpha} \left(\frac{dS^{-1} S_i a}{da} \cdot \frac{dS_i a}{dS^{-1} S_i a}\right)^m.$$

Setzen wir

$$S^{-1} S_i = S_\nu ,$$

so durchläuft S_ν alle Substitutionen der Gruppe ϑ, wenn i alle Werthe von 0 bis ∞ annimmt, es ist demnach

$$\Phi(S\eta,\ a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\gamma\eta+\delta}{\eta - S_\nu a} \frac{-1}{\gamma(SS_\nu a) - \alpha} \left(\frac{dS_\nu a}{da}\right)^m \left(\frac{dSS_\nu a}{dS_\nu a}\right)^m,$$

oder, da

$$\frac{-1}{\gamma(SS_\nu a) - \alpha} = \gamma(S_\nu a) + \delta,$$

$$\frac{dSS_\nu a}{dS_\nu a} = \frac{1}{[\gamma(S_\nu a) + \delta]^2}$$

ist, so ergiebt sich

$$\Phi(S\eta,\ a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\gamma\eta+\delta}{\eta - S_\nu a} \left(\frac{dS_\nu a}{da}\right)^m \frac{1}{[\gamma(S_\nu a) + \delta]^{2m-1}}.$$

Die Differenz

$$\Phi(S\eta,\ \eta_\varkappa) - (\gamma\eta+\delta)^{-2(m-1)} \Phi(\eta,\ \eta_\varkappa)$$

ergiebt sich demnach gleich

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{dS_\nu \eta_\varkappa}{d\eta_\varkappa}\right)^m \frac{1}{\eta - S_\nu \eta_\varkappa} \left\{ \frac{\gamma\eta+\delta}{[\gamma(S_\nu \eta_\varkappa) + \delta]^{2m-1}} - \frac{1}{(\gamma\eta+\delta)^{2m-2}} \right\}.$$

Setzen wir also

$$(13)\quad \mathfrak{H}(u) = \frac{1}{(\gamma\eta+\delta)^{2m-2}} \frac{1}{(\gamma u+\delta)^{2m-1}} \frac{(\gamma\eta+\delta)^{2m-1} - (\gamma u+\delta)^{2m-1}}{\eta - u},$$

so finden wir die identische Gleichung

$$(14)\ \Phi(S\eta,\ \eta_\varkappa) - (\gamma\eta+\delta)^{-2m+2} \Phi(\eta,\ \eta_\varkappa) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{H}(S_\nu \eta_\varkappa) \left(\frac{dS_\nu \eta_\varkappa}{d\eta_\varkappa}\right)^m.$$

Die durch die Gleichung (13) definirte rationale Function $\mathfrak{H}(u)$ von u wird an keiner innerhalb des Einheitskreises gelegenen Stelle u unendlich, es müsste folglich für dieselbe die Gleichung (12) erfüllt sein.

Setzen wir also

$$(15)\qquad A(\eta) = \sum_{\varkappa=1}^{6m} \mathfrak{a}_\varkappa \Phi(\eta,\ \eta_\varkappa),$$

so ergäbe sich aus der für $\mathfrak{H}(u)$ bestehenden Gleichung (12) mit Rücksicht auf (14)

$$\Delta(S\eta) = (\gamma\eta + \delta)^{-2(m-1)}\Delta(\eta),$$

und zwar müsste diese Gleichung für jede Substitution S der Gruppe ϑ erfüllt sein.

Wir schliessen hieraus, dass

$$y_1^{2m-2}\Delta(\eta)$$

eine zur Gruppe ϑ gehörige Fuchs'sche Function darstellt, also rational durch z ausdrückbar sein muss; sei

(16) $$y_1^{2m-2}\Delta(\eta) = \Re(z),$$

so haben wir also

(17) $$\Delta(\eta) = y_1^{-2m+2}\Re(z).$$

Die Gleichung (15) lehrt, dass die Function $\Delta(\eta)$ innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 nur an den $\mathfrak{g}_m$ Stellen

$$\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{\mathfrak{g}_m}$$

von der ersten Ordnung unendlich wird, der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (17) könnte demnach als Function von z nur an den $\mathfrak{g}_m$ Stellen

$$z = f(\eta_\varkappa) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \mathfrak{g}_m)$$

von der ersten Ordnung unendlich werden.

Aus der Art, wie y_1 an den Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1} = \infty$ verschwindet, schliessen wir demnach, dass sich die rationale Function $\Re(z)$ in der Form

(18) $$\Re(z) = \frac{(z-a_1)^{\tau_1}(z-a_2)^{\tau_2}\cdots(z-a_\sigma)^{\tau_\sigma}}{\prod_{\varkappa=1}^{\mathfrak{g}_m}(z - f(\eta_\varkappa))}$$

darstellen lassen muss, wo die Zahlen $\tau_1, \tau_2, \cdots \tau_\sigma$ die Ungleichungen

(19) $$\tau_\varkappa > (m-1)\left(1 - \frac{1}{g_\varkappa}\right) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

erfüllen, und $\mathfrak{g}_m$ die Ungleichung

(20) $$\mathfrak{g}_m > \sum_{\varkappa=1}^{\sigma}\tau_\varkappa - (m-1)\left(1 + \frac{1}{g_{\sigma+1}}\right)$$

befriedigen müsste. Vergleichen wir (19) mit der ersten der Ungleichungen (8), so finden wir

$$\tau_\varkappa \geqq \mu_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma),$$

dadurch steht aber die Ungleichung

$$\mathfrak{g}_m < \sum_{\varkappa=1}^{\sigma} \mu_\varkappa - m\left(1 + \frac{1}{g_{\sigma+1}}\right) + 1,$$

der $\mathfrak{g}_m$ seiner Definition gemäss genügen muss, mit der Ungleichung (20) im Widerspruch.

Es ist also nicht möglich, jede ganze Thetafunction von der Form (10) durch weniger wie $\mathfrak{g}_m$ specielle solche Functionen homogen linear mit constanten Coefficienten darzustellen. Nach den Bemerkungen am Schlusse der vorigen Nummer (S. 215) folgt hieraus der wichtige Satz:

Bedeutet m irgend eine ganze Zahl, die grösser ist wie Eins, so lässt sich jeder Ausdruck von der Form (9) als eine ganze zur Zahl m gehörige Fuchs'sche Thetafunction darstellen.

Auf Grund dieses Satzes ist unmittelbar evident, dass jede Fuchs'sche Function, die zur Gruppe ϑ gehört, d. h. jede rationale Function von z, in der am Schlusse der Nr. 313 (S. 209) angegebenen Weise als ein Quotient von ganzen rationalen Combinationen von Fuchs'schen Thetafunctionen, ja sogar von ganzen Thetafunctionen dargestellt werden kann.

317. Primformen. Wurzeln aus rationalen Functionen der unabhängigen Variabeln, die eindeutige Functionen des Integralquotienten sind.

Wir wollen nun noch eine andere Darstellungsart der Fuchs'schen Functionen kennen lernen, die uns nicht nur diese Functionen selbst, sondern auch gewisse aus denselben gebildete Wurzelausdrücke, die eindeutige Functionen von η sind, liefern wird. Wir gehen zu dem Ende auf den Begriff der allgemeinen ganzen invarianten eindeutigen Form von y_1, y_2 zurück und führen nach der Analogie der für endliche Gruppen in der Nr. 294 (S. 132) aufgestellten Definition auch hier den Begriff der Primform ein.

Wir wollen für eine beliebige Fuchs'sche Gruppe ohne parabolische Substitutionen eine ganze invariante eindeutige Form $H(y_1, y_2)$ eine Primform nennen, wenn das zu dieser Form $H(y_1, y_2)$ gehörige

$$\mathsf{H}(\eta) = y_1^{-r} H(y_1, y_2)$$

innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 nur an einer einzigen Stelle η und an dieser von der ersten Ordnung verschwindet.

Aus dieser Definition und aus den Erörterungen der Nr. 314 (S. 213) folgt, dass eine Primform durch Angabe ihrer Nullstelle innerhalb des Fundamentalbereiches F_0, abgesehen von einem constanten Factor, eindeutig bestimmt ist.

Sei zunächst diese Nullstelle $\eta = \gamma$ keine Ecke von F_0, dann ist $z = f(\gamma)$ ein regulärer Punkt unserer Differentialgleichung (1) (Nr. 304, S. 168) und folglich

$$z - f(\gamma) = \varepsilon_1 (\eta - \gamma) + \varepsilon_2 (\eta - \gamma)^2 + \cdots,$$

wir haben also, um die Darstellung der zur Nullstelle $\eta = \gamma$ gehörigen Primform zu erhalten, in dem Ausdrucke (6) (Nr. 314, S. 213)

$$M(z) = z - f(\gamma), \quad p = 1,$$

$$\mu_i = -r\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_i}\right) \qquad (i=1,2,\cdots\sigma),$$

zu setzen. Da ferner

$$p = \frac{r}{\nu}$$

sein muss, ergiebt sich $r = \nu$, die betreffende Primform lautet also

$$F_\gamma(y_1, y_2) = (z - f(\gamma))\prod_{i=1}^{\sigma}(z - a_i)^{\nu\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_i}\right)} = y_1^{\nu}\mathfrak{X}_\gamma(\eta),$$

wo $\mathfrak{X}_\gamma(\eta)$ eine eindeutige Function von η bedeutet.

Handelt es sich um die Aufstellung einer für $\eta = \lambda_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$ verschwindenden Primform, so haben wir in der Umgebung von $\eta = \lambda_\varkappa$

$$z - a_\varkappa = \varepsilon_1 (\eta - \lambda_\varkappa)^{g_\varkappa} + \varepsilon_2 (\eta - \lambda_\varkappa)^{g_\varkappa + 1} + \cdots,$$

also ist in dem Ausdrucke (3) der Nr. 314 (S. 212)

$$G(z) = (z - a_\varkappa)^{\frac{1}{g_\varkappa}}, \quad p = \frac{1}{g_\varkappa} = \frac{r}{\nu}$$

zu nehmen; es ergiebt sich demnach

$$r = \frac{\nu}{g_\varkappa},$$

und die betreffende Primform hat die Gestalt

$$F_\varkappa(y_1, y_2) = (z - a_\varkappa)^{\frac{1}{g_\varkappa}}\prod_{i=1}^{\sigma}(z - a_i)^{\frac{\nu}{g_\varkappa}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_i}\right)} = y_1^{\frac{\nu}{g_\varkappa}}\mathfrak{X}_\varkappa(\eta)$$
$$(\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma),$$

wo $\mathfrak{X}_\varkappa(\eta)$ eine eindeutige Function von η bedeutet.

Endlich ergiebt sich für die an der Stelle $\eta = \lambda_{\sigma+1}$ und den correspondirenden Stellen verschwindende Primform die Darstellung

$$F_{\sigma+1}(y_1, y_2) = \prod_{i=1}^{\sigma} (z - a_i)^{\frac{\nu}{g_{\sigma+1}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_i}\right)} = y_1^{\frac{\nu}{g_{\sigma+1}}} \mathfrak{X}_{\sigma+1}(\eta),$$

wo auch wieder $\mathfrak{X}_{\sigma+1}(\eta)$ eindeutig in η ist.

Für diese Primformen gelten nun analoge Sätze, wie die, welche wir für die Primformen in dem Falle einer endlichen Gruppe gefunden hatten. Wir heben nur einige dieser Sätze besonders hervor.

1. Zwischen je drei Primformen ν-ten Grades findet eine homogene lineare Beziehung mit constanten Coefficienten statt.

In der That, seien

$$F_{\gamma_1}, F_{\gamma_2}, F_{\gamma_3}$$

drei solche Primformen, deren Nullstellen innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 beziehungsweise durch γ_1, γ_2, γ_3 gegeben werden, so ist offenbar

$$[f(\gamma_3) - f(\gamma_2)]\, F_{\gamma_1}(y_1, y_2) + [f(\gamma_1) - f(\gamma_3)]\, F_{\gamma_2}(y_1, y_2) + [f(\gamma_2) - f(\gamma_1)]\, F_{\gamma_3}(y_1, y_2) = 0.$$

2. Das Gleiche gilt für irgend drei Formen, die entweder Primformen ν-ten Grades oder solche von absolut genommen niedrigerem Grade

$$\frac{\nu}{g_\varkappa}$$

zur $(g_\varkappa)$-ten Potenz erhoben sind. Es lässt sich also die allgemeine Primform ν-ten Grades in der Gestalt

$$\alpha F_\varkappa^{g_\varkappa}(y_1, y_2) + \beta F_i^{g_i}(y_1, y_2)$$

darstellen, wo die $\varkappa$, i zwei verschiedene der Zahlen $1, 2, \cdots \sigma+1$ und die α, β Constanten bedeuten.

3. Zwischen den Primformen und den aus denselben gebildeten Functionaldeterminanten bestehen analoge Beziehungen, wie die für den Fall endlicher Gruppen gefundenen (Nr. 295, S. 134).

Es ist nämlich

$$(21) \qquad z - a_\varkappa = \frac{F_\varkappa^{g_\varkappa}(y_1, y_2)}{F_{\sigma+1}^{g_{\sigma+1}}(y_1, y_2)} = \frac{\mathfrak{X}_\varkappa^{g_\varkappa}(\eta)}{\mathfrak{X}_{\sigma+1}^{g_{\sigma+1}}(\eta)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma);$$

setzt man diese Werthe in den Ausdruck der Primform $F_{\sigma+1}(y_1, y_2)$ ein, so ergiebt sich

$$y_1^2 F_{\sigma+1}^{2g_{\sigma+1}}(y_1, y_2) = \prod_{i=1}^{\sigma+1} F_i^{g_i - 1}(y_1, y_2).$$

Vergleicht man diese Gleichung mit den durch Differentiation aus den Gleichungen (21) und aus

$$(22) \qquad z - f(\gamma) = \frac{F_\gamma(y_1, y_2)}{F_{\sigma+1}^{g_{\sigma+1}}(y_1, y_2)} = \frac{\mathfrak{X}_\gamma(\eta)}{\mathfrak{X}_{\sigma+1}^{g_{\sigma+1}}(\eta)}$$

hervorgehenden Beziehungen, so findet man, ähnlich wie in der Nr. 295 (S. 134) die Relationen (32) gefunden wurden, die Formeln

$$\frac{g_\varkappa\, g_{\sigma+1}}{\nu}(F_{\sigma+1}, F_\varkappa) = \frac{F_1^{g_1-1} \cdot\cdot F_\sigma^{g_\sigma-1}}{F_\varkappa^{g_\varkappa-1}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma),$$

$$\frac{g_{\sigma+1}}{\nu}(F_{\sigma+1}, F_\gamma) = F_1^{g_1-1} \cdots F_\sigma^{g_\sigma-1},$$

wo die Functionaldeterminante in ähnlicher Weise bezeichnet wurde, wie dies für algebraische Formen üblich ist.

4. Jede ganze invariante eindeutige Form der y_1, y_2 lässt sich als ein Product von Primformen darstellen.

Um nun zu einer Darstellung der Primformen durch die y_1, y_2 selbst zu gelangen, betrachten wir den Ausdruck:

$$(23) \quad F(y_1, y_2) = y_1^\nu\, \mathfrak{X}(\eta) = (az+b)\prod_{i=1}^{\sigma}(z-a_i)^{\nu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{g_i}\right)}.$$

Derselbe stellt im Allgemeinen die für

$$z = -\frac{b}{a}$$

verschwindende Primform ν-ten Grades, dagegen, wenn $-\frac{b}{a}$ gleich einem der Werthe $a_1, a_2, \cdots a_\sigma, \infty$ ist, die $g_\varkappa$-te Potenz der zu dem betreffenden Punkte $a_\varkappa$ gehörigen Primform dar.

Sei ϱ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen

$$g_1, g_2, \cdots g_{\sigma+1},$$

und setzen wir

$$g = -\frac{2\varrho}{\nu} = \varrho\sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1}\left(1-\frac{1}{g_\varkappa}\right) - 2\varrho,$$

so ist g eine positive ganze Zahl, und der Ausdruck

$$(24) \qquad [\mathfrak{X}(\eta)]^g = y_1^{2\varrho}(az+b)^\varrho \prod_{i=1}^{\sigma}(z-a_i)^{\varrho\left(1-\frac{1}{g_\varkappa}\right)}$$

hat die Form (9) (Nr. 315, S. 215). Zufolge des Satzes der Nr. 316 (S. 219) lässt sich dieser Ausdruck durch eine zu der Zahl ϱ gehörige ganze Thetafunction

$$\Theta(\eta) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} H(S_\lambda \eta) \left(\frac{d S_\lambda \eta}{d\eta}\right)^{\varrho}$$

darstellen, so dass also

$$F(y_1, y_2) = y_1^{\nu} \sqrt[g]{\Theta(\eta)}$$

wird.

Dieser Darstellung einer Primform haftet der Mangel an, dass sie, wenn $g > 1$ ist, die Eindeutigkeit der von dem Factor y_1^{μ} befreiten Primform μ-ten Grades (wo

$$\mu = \nu, \ \frac{\nu}{g_1}, \ \cdots \ \frac{\nu}{g_{\sigma+1}}$$

sein kann) nicht unmittelbar hervortreten lässt. Sie lehrt uns aber, dass die g-te Potenz der Primformen ν-ten Grades und die $gg_\varkappa$-te Potenz der Primform $F_\varkappa(y_1, y_2)$ rationale Functionen von z sind, und dass dies auch für keine niedrigere Potenz jener Primformen der Fall ist. Ferner erhalten wir eine übersichtliche Darstellung derjenigen Wurzeln aus rationalen Functionen von z, die gleich eindeutigen Functionen von η werden.

318. Der Fall, wo eine parabolische Substitution auftritt.

Ein wesentlicher Theil der hier unter der Voraussetzung, dass alle Substitutionen $A_1, A_2, \cdots A_{\sigma+1}$ elliptische sind, entwickelten Resultate ist ohne Weiteres, ein anderer Theil ist mit leichten Modificationen auf den allgemeinen Fall, wo die Gruppe auch parabolische Substitutionen enthält, übertragbar. Das Charakteristische ist, dass man, wenn einige der Substitutionen $A_1, A_2, \cdots A_{\sigma+1}$ parabolische sind, bei der Definition einer invarianten eindeutigen Form die Bedingung, dass eine solche Form gleich der Wurzel aus einer rationalen Function von z sein soll, durch die allgemeinere zu ersetzen hat, wonach nicht nur Wurzeln aus rationalen Functionen, sondern auch Logarithmen solcher Functionen von z zuzulassen sind. Wir versagen es uns, die Untersuchung in diesem allgemeinen Falle hier durchzuführen und wollen nur mit wenigen Worten auf den Fall eingehen, wo eine der Substitutionen der Basis unserer Gruppe eine parabolische ist.

Man kann alsdann, wie Herr Klein in dem speciellen Falle $\sigma = 2$ bemerkt hat, durch einen einfachen Kunstgriff die volle Gültigkeit der für Gruppen ohne parabolische Substitutionen erzielten Resultate bewirken.

Wir können nämlich voraussetzen, dass die betreffende parabolische Substitution gerade $A_{\sigma+1}$ ist, und können uns überdies η so gewählt denken, dass $A_{\sigma+1}$ die canonische Form

$$A_{\sigma+1}\eta = \eta + \gamma_{\sigma+1}$$

besitzt. Dann ist also in der Differentialgleichung (1) der Nr. 304 (S. 168) $z = \infty$ der einzige logarithmische singuläre Punkt, und wir haben, wenn

$$t = e^{\frac{2\pi i}{\gamma_{\sigma+1}}\eta}$$

gesetzt wird, in der Umgebung von $t = 0$

$$\frac{1}{z} = t\mathfrak{P}(t), \qquad y_1 = \frac{1}{t}\mathfrak{P}_1(t),$$

wo $\mathfrak{P}(t)$, $\mathfrak{P}_1(t)$ gewöhnliche Potenzreihen von t bedeuten, die für $t = 0$ nicht verschwinden.

Die Endlichkeit der durch den Ausdruck (6) (Nr. 314, S. 213) definirten ganzen invarianten Form $H(y_1, y_2)$, ebenso wie die der Primformen

$$F_\gamma(y_1, y_2), \qquad F_\varkappa(y_1, y_2) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

bleibt dann gewahrt, auch wenn η so in den Punkt $\eta = \infty$ einrückt, wie es einrücken muss, damit $\frac{1}{z}$ verschwinde. Dagegen spielt für $z = \infty$ die Form

$$\Phi(y_1, y_2) = \prod_{\varkappa=1}^{\sigma} (z - a_\varkappa)^{\nu\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{g_\varkappa}\right)}$$

dieselbe Rolle, wie für einen nicht logarithmisch singulären Punkt die $(g_\varkappa)$-te Potenz der Primform $F_\varkappa(y_1, y_2)$.

Im Falle der Gauss'schen Differentialgleichung ($\sigma = 2$) hat Halphén die Primformen oder, genauer gesagt, die denselben entsprechenden eindeutigen Functionen $\mathfrak{X}_\gamma$, $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_3$ von η zuerst allgemein (d. h. für die transcendenten Fälle eines eindeutig umkehrbaren Integralquotienten) betrachtet. In dem besonderen Falle $g_1 = 3$, $g_2 = 2$, $g_3 = \infty$, d. h. für die Function

$$\tau = s\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0, J\right),$$

hat Herr Klein die expliciten Ausdrücke für die entsprechenden Primformen aufgestellt. Sie stimmen dann im Wesentlichen mit den Weierstrass'schen Ausdrücken für die beiden Invarianten g_2, g_3 und die Discriminante Δ der biquadratischen Form (IV) (Nr. 276, S. 69) überein, deren absolute Invariante durch J gegeben ist. Da in diesem Falle $\nu = -12$, $\varrho = 6$ ist, so haben wir

$$g = -\frac{2\varrho}{\nu} = 1,$$

d. h. die Primformen ν-ten Grades sind dann direct rationale Functionen von J, also durch ganze Thetafunctionen darstellbar.

Viertes Kapitel.

319. Abänderung des Fundamentalbereiches. Symmetrische Gruppen. Spiegelungen.

Wir wollen nun einen besonders interessanten und wichtigen Specialfall Fuchs'scher Gruppen beziehungsweise Functionen ins Auge fassen, der als die unmittelbare Verallgemeinerung der eindeutig umkehrbaren Dreiecksfunctionen angesehen werden kann.

Der Umstand, dass wir die Seiten des Fundamentalbereiches F_0 als Kreise, die den Orthogonalkreis (Einheitskreis) rechtwinkelig schneiden, gewählt hatten, bewirkt, dass die Querschnitte, durch welche die Ebene der unabhängigen Variabeln z der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dz^2} = q(z)y$$

zerschnitten ist, eine völlig bestimmte Gestalt haben.

Für $\sigma = 2$ ist F_0 ein Kreisbogenviereck mit den Ecken $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_3'$; legen wir dann durch λ_1, λ_2 einen den Orthogonalkreis unter rechtem Winkel schneidenden Kreis s_0, so zerfällt das Viereck F_0 in zwei in Bezug auf s_0 symmetrische Dreiecke, d. h. in zwei Dreiecke, die Spiegelbilder von einander in Bezug auf den Kreis s_0 sind. Wir kommen also dann auf die Fig. 19 (Nr. 269, S. 38), d. h. in diesem Falle sind die Querschnitte, die von $z = 0$ und $z = 1$ aus nach $z = \infty$ hingelegt sind, Theile der realen z-Axe.

Würden wir nicht $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \infty$ nehmen, so würde offenbar der Begrenzung des Kreisbogendreiecks $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ der η-Ebene, die Peripherie des durch die drei Punkte a_1, a_2, a_3 gelegten Kreises der z-Ebene entsprechen, und es wäre von den beiden Dreiecken

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3')$$

der η-Ebene das eine die Abbildung des Innern, das andere die Abbildung des Äussern jenes durch die Punkte a_1, a_2, a_3 hindurchgelegten Kreises der z-Ebene. In diesem Falle wären also die von a_1, a_2 nach a_3 hin gelegten Querschnitte der z-Ebene Kreisbogen.

Wir wollen für $\sigma > 2$ die bereits in der Nr. 210 (Bd. II, 1, S. 311) ausgeführte erlaubte Abänderung des Fundamentalbereiches F_0 vornehmen und uns dabei so einrichten, dass der neue Fundamentalbereich, den wir durch R_0 bezeichnen, auch von Kreisbogen, die den Einheitskreis orthogonal schneiden, begrenzt werde.

Legen wir zu dem Ende durch die Ecken λ_1, λ_2, ferner durch λ_2, λ_3, u. s. w., endlich durch $\lambda_{\sigma-1}$, λ_σ innerhalb F_0 verlaufende Kreisbogen, die den Einheitskreis unter rechten Winkeln schneiden, fügen wir ferner dem von Kreisbogen begrenzten $(\sigma + 1)$-ecke

$$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_{\sigma-1}, \lambda_\sigma, \lambda_{\sigma+1})$$

die folgenden sich schlicht an einander lagernden Kreisbogendreiecke hinzu

$$(\lambda_1, \quad \lambda_2', \quad \lambda_{\sigma+1}) = A_1^{-1}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{\sigma+1}'),$$
$$(\lambda_2', \quad \lambda_3', \quad \lambda_{\sigma+1}) = A_1^{-1} A_2^{-1}(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_{\sigma+1}''),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(\lambda_{\sigma-1}', \lambda_\sigma', \lambda_{\sigma+1}) = A_1^{-1} A_2^{-1} \cdots A_{\sigma-1}^{-1}(\lambda_{\sigma-1}, \lambda_\sigma, \lambda_{\sigma+1}^{(\sigma-1)}),$$

so erhalten wir den Bereich R_0. Die Ecken dieses neuen Fundamentalbereiches sind

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots \lambda_\sigma, \lambda_{\sigma+1}, \lambda_\sigma', \cdots \lambda_3', \lambda_2',$$

von denselben bilden λ_1, $\lambda_{\sigma+1}$ je einen eingliedrigen Cyklus, während

$$\lambda_\varkappa, \lambda_\varkappa' \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots \sigma)$$

die übrigen (zweigliedrigen) Cykeln ausmachen. Die Seiten

$$(\lambda_\varkappa, \lambda_{\varkappa+1}) = t_\varkappa, \quad (\lambda_\varkappa', \lambda_{\varkappa+1}') = t_\varkappa' \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

von R_0, wo $\lambda_1' = \lambda_1$, $\lambda_{\sigma+1}' = \lambda_{\sigma+1}$ zu nehmen ist, sind Kreisbogen, die den Einheitskreis rechtwinkelig schneiden, und $t_\varkappa'$ geht aus $t_\varkappa$ durch die Substitution

$$(2) \qquad S_\varkappa = A_1^{-1} A_2^{-1} \cdots A_\varkappa^{-1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

hervor.

In der z-Ebene entsprechen den Seiten von R_0 die beiden Ufer eines von a_1 über a_2, a_3, $\cdots a_\sigma$ nach $a_{\sigma+1} = \infty$ hingelegten Querschnittes $\bar{l}$ (vergl. die Fig. 4, Bd. II, 1, S. 311) und zwar entspricht das linke (positive) Ufer des zwischen $a_\varkappa$, $a_{\varkappa+1}$ verlaufenden Querschnittstückes der Seite $t_\varkappa'$, das rechte (negative) Ufer eben dieses Stückes der Seite $t_\varkappa$ von R_0*). Die Seite s_1 des alten Fundamentalbereiches fassen

*) a. a. O. ist $t_\varkappa$ durch $\bar{s}_\varkappa'$, $t_\varkappa'$ durch $\bar{s}_\varkappa$ und $\lambda_\varkappa'$ durch $\bar{\lambda}_\varkappa$ bezeichnet, für $\varkappa = 2, 3, \cdots \sigma$.

wir als **Diagonale** von R_0 auf, sie entspricht (was wir hier in Erinnerung bringen wollen) dem negativen Ufer des von a_1 nach $a_{\sigma+1}$ hingelegten Querschnittes l_1, welches mit dem negativen Ufer von $\bar{l}$ zusammengenommen eine die singulären Punkte der Differentialgleichung (1) unter einander verbindende geschlossene Linie bildet. Durch die Diagonale s_1 zerfällt R_0 in zwei Theile

$$(\lambda_{\sigma+1}, \lambda_\sigma, \cdots \lambda_2, \lambda_1, \lambda_{\sigma+1}) = R_0'$$

und

$$(\lambda_{\sigma+1}, \lambda_\sigma', \cdots \lambda_2', \lambda_1', \lambda_{\sigma+1}) = R_0'';$$

dieselben entsprechen je einem der beiden Bereiche, in welche die z-Ebene durch die erwähnte geschlossene Linie zerlegt wird.

Der Gleichmässigkeit wegen wollen wir im Folgenden die Diagonale s_1 mit t_0 bezeichnen; die ganze geschlossene Linie, die aus dem Querschnitte $\bar{l}$ und aus l_1 besteht, nennen wir (wie a. a. O.) l und den bisher mit l_1 bezeichneten Theil von l nennen wir l_0.

Es kann sich nun ereignen, dass die beiden Bereiche R_0', R_0'', in welche R_0 durch die Diagonale t_0 zerlegt wird, **Spiegelbilder** von einander in Bezug auf den Kreis t_0 sind, d. h. dass der Bereich R_0 aus den beiden in Bezug auf die Diagonale t_0 **symmetrischen** Hälften R_0', R_0'' besteht. Wenn dies der Fall ist, so sagen wir kurz, der Fundamentalbereich R_0 sei **symmetrisch** und bezeichnen auch die Gruppe $\mathfrak{G}$ als eine **symmetrische Fuchs'sche Gruppe**.

Da bei der Spiegelung in Bezug auf einen Kreis die Winkel erhalten bleiben, sind die Winkel der beiden Bereiche R_0', R_0'' bei entsprechenden Ecken $\lambda_\varkappa$, $\lambda_\varkappa'$ dieselben, d. h. da die Winkelsummen bei den Ecken der Cykeln

$$\lambda_1; \quad \lambda_2, \lambda_2'; \quad \lambda_3, \lambda_3'; \cdots \lambda_\sigma, \lambda_\sigma'; \quad \lambda_{\sigma+1}$$

beziehungsweise

$$\frac{2\pi}{g_1}; \quad \frac{2\pi}{g_2}; \quad \frac{2\pi}{g_3}; \quad \cdots \quad \frac{2\pi}{g_\sigma}; \quad \frac{2\pi}{g_{\sigma+1}}$$

betragen, sind die Winkel von R_0' bei den Ecken $\lambda_\varkappa$ gleich

$$\frac{\pi}{g_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma+1).$$

Sei die Gleichung des Kreises $t_\varkappa$

$$c_\varkappa \eta \bar{\eta} + a_\varkappa \eta + \bar{a}_\varkappa \bar{\eta} + b_\varkappa = 0, \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots \sigma),$$

wo $c_\varkappa$, $b_\varkappa$ reale Grössen bedeuten und

$$-a_\varkappa \bar{a}_\varkappa + b_\varkappa c_\varkappa = -1$$

ist, dann ist die zu diesem Kreise gehörige Spiegelung

$$B_\varkappa \bar{\eta} = \frac{-\bar{a}_\varkappa \bar{\eta} - b_\varkappa}{c_\varkappa \bar{\eta} + a_\varkappa}.$$

Wenn η auf $t_\varkappa$ liegt, so ist für $\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma$

$$\eta = B_\varkappa \bar{\eta},$$

also, da die Spiegelung $B_\varkappa$, wenn man in jedem Coefficienten derselben $+i$ in $-i$ verwandelt, in $B_\varkappa^{-1}$ übergeht,

$$\bar{\eta} = B_\varkappa^{-1} \eta.$$

Das Spiegelbild eines Punktes η von $t_\varkappa$ in Bezug auf den Diagonalkreis t_0 ist der correspondirende Punkt $S_\varkappa \eta$ von $t_\varkappa'$, wir haben demnach

$$S_\varkappa \eta = B_0 \bar{\eta} = B_0 B_\varkappa^{-1} \eta \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma),$$

d. h. die Substitution, welche $t_\varkappa$ in $t_\varkappa'$ verwandelt, lautet

$$S_\varkappa = B_0 B_\varkappa^{-1}, \tag{3}$$

und die Gleichung des Kreises $t_\varkappa'$ lässt sich in der Form

$$\eta = B_0 B_\varkappa^{-1} B_0 \bar{\eta}$$

darstellen.

320. **Besondere Gestalt des Querschnittsystems. Abbildungsproblem.**

Betrachten wir nun die Function z, die bei den Substitutionen der symmetrischen Fuchs'schen Gruppe ungeändert bleibt und innerhalb des Fundamentalbereiches R_0 jeden Werth nur einmal annimmt, so können wir die Werthe, die z erhält, wenn η die Begrenzung des Kreisbogenpolygons R_0' durchläuft, mit Leichtigkeit charakterisiren.

Bedeute η einen Punkt im Innern von R_0, und sei

$$z = f(\eta)$$

der entsprechende Punkt in der durch den Querschnitt $\bar{l}$ zerschnittenen z-Ebene. Gehen wir von η auf einer im Innern von R_0 verbleibenden Curve nach dem Spiegelbilde $B_0 \bar{\eta}$ von η in Bezug auf t_0, so geht z auf einem in der zerschnittenen Ebene verlaufenden Wege, der die geschlossene Curve l in einem Punkte von l_0 überschreitet, nach dem Punkte

$$z_0 = f(B_0 \bar{\eta}).$$

Die Punkte z und z_0 sind dann einander gegenseitig eindeutig zugeordnet, jedoch ist z_0 keine monogene Function der complexen

Variabeln z, da z_0 eine monogene Function von $\bar{\eta}$, z aber eine monogene Function von η ist.

Dagegen ist der conjugirte Werth von z

$$\bar{z} = \overline{f(\eta)}$$

eine monogene Function von $\bar{\eta}$, also ist auch z_0 eine monogene Function von $\bar{z}$. Das gegenseitig eindeutige Entsprechen von z_0 und z bewirkt ein gegenseitig eindeutiges Entsprechen von z_0 und $\bar{z}$. Hat man aber zwei complexe Variable, die monogene Functionen von einander sind, und weiss man, dass die Werthe dieser beiden Variabeln einander ausnahmslos gegenseitig eindeutig zugeordnet sind, so folgt nach einem bekannten Satze der Functionentheorie, dass die beiden Variabeln ganze oder gebrochene lineäre Functionen von einander sein müssen.

Also ist z_0 eine lineare Function von $\bar{z}$,

$$z_0 = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Gehen wir nun von dem Punkte $B_0\bar{\eta}$ auf einem ebenfalls innerhalb R_0 verlaufenden Wege nach dem Punkte η, d. h. nach dem Spiegelbilde von $B_0\bar{\eta}$ in Bezug auf den Kreis t_0 zurück, so bewegt sich der entsprechende Punkt der z-Ebene von z_0 ausgehend auf einer in der zerschnittenen z-Ebene verlaufenden Bahn nach dem Punkte z hin; es muss folglich z aus z_0 ebenso hervorgehen, wie z_0 aus z, d. h. wir haben

$$z = \frac{\alpha \bar{z}_0 + \beta}{\gamma \bar{z}_0 + \delta}.$$

Die vier Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind demnach so beschaffen, dass

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} & \bar{\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = 1$$

ist, wir können folglich nach den Ergebnissen der Nr. 268 (S. 35, 36) die Beziehung zwischen z_0 und $\bar{z}$ in die Form setzen

$$z_0 = \frac{-\bar{a}\bar{z} - b}{c\bar{z} + a}, \qquad -a\bar{a} + bc = -1,$$

wo b, c reale Grössen bedeuten.

Nun ist offenbar, wenn η auf dem Kreisbogen t_0 liegt, z_0 mit z identisch. Bedeutet ferner η einen Punkt, der einem der Kreisbogen $t_\varkappa$ angehört, so ist das Spiegelbild von η in Bezug auf t_0 in der Form

$$S_\varkappa \eta = B_0 B_\varkappa^{-1} \eta \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

darstellbar. D. h. es ist in diesem Falle

$$B_0\bar{\eta} = S_\varkappa \eta,$$

und da allgemein für jedes η

$$f(S_\varkappa \eta) = f(\eta)$$

ist, so haben wir also auch für einen auf $t_\varkappa$ gelegenen η-Werth

$$f(\eta) = f(B_0\bar{\eta}),$$

d. h. auch wenn η auf einem der Kreisbogen

$$t_1, t_2, \cdots t_\sigma$$

gelegen ist, wird z_0 mit z identisch.

Die den Punkten der Begrenzung von R_0' entsprechenden z-Werthe befriedigen folglich die Gleichung

$$z = \frac{-\bar{a}\bar{z} + b}{c\bar{z} + a},$$

d. h. sie liegen auf einem Kreise.

Im Falle einer symmetrischen Gruppe ϑ liegen also die z-Werthe, die den Ecken des Fundamentalbereiches entsprechen, d. h. die Punkte

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1},$$

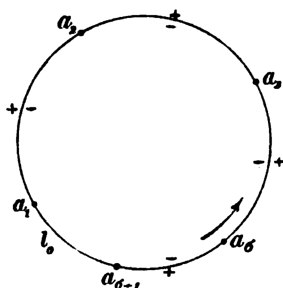


Fig. 31.

auf einem Kreise und der Querschnitt $\bar{l}$ ist nichts anderes wie der von a_1 über $a_2, \cdots a_\sigma$ nach $a_{\sigma+1}$ hinführende Bogen dieses Kreises, während die Gesammtperipherie die geschlossene Curve l darstellt.

Nehmen wir um die Vorstellung zu fixiren an, dass die Punkte

$$a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$$

auf der Kreisperipherie so aufeinander folgen wie die wachsenden Ziffern auf dem Zifferblatte einer Uhr, so entspricht dem Bereiche R_0' der η-Ebene das Innere, dem Bereiche R_0'' das Aeussere dieses Kreises (vergl. die Fig. 31).

Wenn insbesondere wie gewöhnlich

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{\sigma+1} = \infty$$

genommen wird, so streckt sich der Kreis l zur realen z-Axe aus, d. h. unter dieser Annahme sind die sämmtlichen singulären Stellen der Differentialgleichung (1) reale Werthe, und die Function

$$z = f(\eta)$$

ist auf der Begrenzung von R_0' real. Das Kreisbogenpolygon R_0'

ist die eindeutig conforme Abbildung der unteren, das Kreisbogenpolygon R_0'' die Abbildung der oberen z-Halbebene. Ferner folgt aus der Invarianz des Differentialausdruckes

$$\Delta\binom{\eta}{z}$$

bei projectiven Transformationen von η, dass für reale Werthe von z auch dieser Differentialausdruck und folglich auch die rationale Function $q(z)$, die auf der rechten Seite der Differentialgleichung (1) auftritt, reale Werthe annimmt; es sind demnach die sämmtlichen Coefficienten von $q(z)$ real.

Wir sehen also in der That, dass sich der Fall einer symmetrischen Gruppe als die unmittelbare Verallgemeinerung der eindeutig umkehrbaren Dreiecksfunction erweist.

Die Function $z = f(\eta)$ liefert uns die eindeutig conforme Abbildung des Kreisbogenpolygons R_0' auf eine Halbebene. Es ist nun leicht einzusehen, dass diese Function auch umgekehrt durch diese ihre Eigenschaft definirt werden kann. In der That lässt die Aufgabe, das in der η-Ebene gegebene Kreisbogenpolygon R_0' eindeutig conform auf eine Halbebene abzubilden, nach einem allgemeinen Satze von Riemann stets eine Lösung zu, und ist diese Lösung auch, abgesehen von drei realen willkürlichen Constanten, eindeutig bestimmt. Man kann dies entweder durch Anwendung des in der Nr. 212 (Bd. II, 1, S. 323 ff.) geschilderten Verfahrens direct beweisen, oder aber den Beweis, ähnlich wie für den in der Nr. 270 (S. 41 ff.) bereits behandelten speciellen Fall der Abbildung eines Kreisbogendreiecks, durch Anwendung des Riemann'schen Symmetrieprincips auf den in den Nummern 213, 214 (Bd. II, 1, S. 327 ff.) gelieferten Existenzbeweis zurückführen.

Eine Function ζ von η, die das Kreisbogenpolygon R_0' conform auf eine Halbebene*) abbildet, ist nämlich zunächst auf der Begrenzung von R_0' real. Sie nimmt folglich nach dem Riemann'schen Symmetrieprincipe für Werthe von η, die Spiegelbilder von einander in Bezug auf einen der Kreise $t_\varkappa$ sind, conjugirte complexe Werthe an, so dass also z. B. die Functionswerthe, die für die Punkte von R_0' und von R_0'' (dem Spiegelbilde von R_0' in Bezug auf die Seite t_0) zu Tage treten, die ganze complexe ζ-Ebene einfach erfüllen. Ferner nimmt diese Function in correspondirenden Punkten von $t_\varkappa$ und $t_\varkappa'$, d. h. in Punkten dieser Seiten, die durch Spiegelung in Bezug auf t_0 aus-

*) Hier und im Folgenden ist stets eine durch die reale Axe begrenzte Halbebene gemeint.

einander hervorgehen, offenbar denselben Werth an. Da nun t_x' aus t_x durch Anwendung der linearen Substitution S_x hervorgeht, so sind die Seiten des Bereiches $R_0' + R_0''$ durch lineare Substitutionen einander paarweise zugeordnet, und die gesuchte Function ζ von η hat die Eigenschaften, innerhalb des Bereiches $R_0' + R_0''$ jeden Werth nur ein einziges Mal anzunehmen und in correspondirenden Punkten der einander zugeordneten Seitenpaare gleiche Werthe zu besitzen. Die Existenz solcher Functionen ist aber in den Nrn. 212—216 (Bd. II, 1, S. 337 ff.) bewiesen, und es folgt zugleich aus den Betrachtungen der Nr. 216, dass, wenn ζ eine bestimmte dieser Functionen ist, jede andere in der Form

$$\frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta},$$

wo α, β, γ, δ reale Constanten bedeuten, enthalten sein muss. Wir haben also den Satz:

Die Function $z = f(\eta)$ kann auch durch die Eigenschaft definirt werden, dass sie die eindeutig conforme Abbildung des Kreisbogenpolygons R_0' auf eine Halbebene liefert.

Das Innere oder Aeussere eines beliebigen Kreises K kann stets durch eine linear gebrochene Function von z auf die eine oder die andere der beiden z-Halbebenen abgebildet werden. Daraus folgt, dass wir dem eben ausgesprochenen Satze die folgende allgemeinere Fassung geben können:

Die Function $\mathfrak{z}$ von η, die die eindeutig conforme Abbildung des Kreisbogenpolygons R_0' auf das Innere oder Aeussere eines Kreises K liefert, ist durch diese ihre Eigenschaft, abgesehen von drei realen Constanten, bestimmt und geht aus z durch Anwendung einer projectiven Substitution hervor. Die allgemeinste Function, die diese Abbildung vermittelt, ist durch $\mathfrak{z}$ in der Form

$$\frac{\alpha\mathfrak{z} + \beta}{\gamma\mathfrak{z} + \delta}$$

darstellbar, wo α, β, γ, δ die Coefficienten einer projectiven Substitution bedeuten, die den Kreis K in sich selbst transformirt.

Die so formulirte Abbildungsaufgabe lässt aber eine wesentlich allgemeinere Fassung zu, auf die wir mit wenigen Worten eingehen wollen, da uns dieselbe einen Einblick in die Theorie von eindeutigen Functionen, die durch projective Gruppen ungeändert bleiben, verschaffen wird, die in gewissem Sinne bedeutend umfassender ist, als die Theorie derjenigen Fuchs'schen Functionen, die wir hier behandeln.

321. **Das allgemeine Abbildungsproblem von Schottky.**

Denken wir uns in der η-Ebene einen beliebigen von Kreisbogen (oder geraden Linien) begrenzten $(p+1)$-fach zusammenhängenden Bereich R.

Sei ferner $\mathfrak{R}(\eta)$ eine beliebige rationale Function von η, die an keiner Stelle der Begrenzung von R unendlich wird.

Dann lässt sich, wie Herr Schottky gezeigt hat, stets eine Function $F(\eta)$ von η finden, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. $F(\eta)$ verhält sich im Innern von R wie die vorgeschriebene rationale Function $\mathfrak{R}(\eta)$, d. h. die Differenz

$$F(\eta) - \mathfrak{R}(\eta)$$

ist im Innern von R allenthalben regulär.

2. Auf der Begrenzung von R ist der Coefficient von i der Function $F(\eta)$ gleich einer willkürlich zu wählenden constanten Grösse; also z. B. gleich Null; dann ist $F(\eta)$ auf der Begrenzung von R real.

Da R mehrfach zusammenhängend ist, so ist die Function $F(\eta)$ im Innern von R nicht nothwendig eindeutig. Denken wir uns vielmehr den Bereich durch p geeignet gewählte Querschnitte in einen einfach zusammenhängenden zerschnitten, so hat $F(\eta)$ ferner die Eigenschaft:

3. An den p Querschnitten besitzt die Function $F(\eta)$ wohlbestimmte reale Periodicitätsmoduln.

Aus Functionen von der Art wie $F(\eta)$ lassen sich Functionen von derselben Beschaffenheit bilden, für welche die Periodicitätsmoduln an den p Querschnitten von R verschwinden, die also innerhalb R eindeutig sind, den Charakter von rationalen Functionen haben und an der Begrenzung von R reale Werthe besitzen. Diese Functionen mögen mit $G(\eta)$ bezeichnet werden.

Unter diesen Functionen $G(\eta)$ lassen sich stets zwei u, v auswählen, die durch eine algebraische Gleichung

$$\text{(I)} \qquad \Phi(u, v) = 0$$

mit realen Coefficienten und vom Range p mit einander verknüpft sind und die die Eigenschaft haben, dass jede Function vom Charakter von $G(\eta)$ rational mit realen Coefficienten durch u, v dargestellt werden kann. An die Stelle von u, v können irgend zwei andere Functionen u_1, v_1 vom Charakter $G(\eta)$ treten, die mit den durch die Gleichung (I) verknüpften u, v durch eine eindeutig umkehrbare rationale Transformation (mit realen Coefficienten) verbunden sind.

Betrachtet man die u, v als reale Variable und deutet dieselben als Cartesische Coordinaten der Punkte einer Ebene, so stellt die Gleichung (I) eine reale Curve C dieser Ebene dar. Da (I) vom Range p ist, so ist die Curve C vom Geschlechte p und besteht demnach aus p getrennt verlaufenden Zügen. Wir können uns z. B. u, v so gewählt denken, dass die Curve C aus p geschlossenen Linien besteht.

Dann zerfällt das algebraische Gebilde (u, v), welches durch die Gleichung (I) definirt wird, durch die Curve C in zwei conjugirte Hälften B, B'. Durch die beiden Functionen u, v von η wird die eine dieser Hälften, etwa B, eindeutig conform auf das Gebiet R der η-Ebene abgebildet.

Die Fortsetzung der nur für die Stellen von B des algebraischen Gebildes (I) definirten Function η nach den Stellen von B' hin erfolgt nun nach dem in der Nr. 270 (S. 43) dargelegten Riemann'schen Symmetrie-Principe.

Denken wir uns die das algebraische Gebilde (u, v) darstellende, z. B. über der u-Ebene ausgebreitete Riemann'sche Fläche T vom Zusammenhange $2p + 1$, so entsprechen den Punkten der Realitätscurve C gewisse Strecken der realen u-Axe in den verschiedenen Blättern von T, wir wollen diese Strecken als die Realitätslinien von T bezeichnen. Den Punkten dieser Realitätslinien entsprechen dann die Punkte der Begrenzung von R in der η-Ebene.

Gehen wir von einer Stelle (u, v) des Gebietes B auf einem in der Riemann'schen Fläche T verlaufenden Wege nach der conjugirten Stelle $(\bar{u}, \bar{v})$ des Gebietes B', so müssen wir eine der Realitätslinien, etwa l, in einem Punkte überschreiten. Wir richten den Weg so ein, dass dieser Punkt kein singulärer Punkt sei, d. h. dass demselben keine Ecke des Bereiches R der η-Ebene entspricht und dass er kein Verzweigungspunkt von T sei. Dann entspricht dem l ein Theil eines gewissen Kreisbogens s der η-Ebene, der einen Theil der Begrenzung, oder wie wir sagen wollen eine Seite von R bildet. Nach dem erwähnten Riemann'schen Principe ist dann der Stelle $(\bar{u}, \bar{v})$ derjenige Werth von η zuzuordnen, der aus dem der Stelle (u, v) entsprechenden Punkte η von R durch Spiegelung in Bezug auf den Kreisbogen s hervorgeht.

Sei also R' das Spiegelbild von R in Bezug auf s, so bilden die beiden Bereiche R und R' zusammengenommen einen von Kreisbogen begrenzten Bereich R_0, der die eindeutig conforme Abbildung der ganzen durch die Realitätslinien mit Ausnahme von l zerschnittenen Riemann'schen Fläche T darstellt.

Vollziehen wir den Uebergang von (u, v) nach $(\bar{u}, \bar{v})$, indem wir eine von l verschiedene Realitätslinie, oder l selbst aber in einem Punkte überschreiten, der von dem früher gewählten Durchgangspunkte durch einen singulären Punkt, der einer Ecke von R entspricht, getrennt ist, so wird dem Punkte $(\bar{u}, \bar{v})$ jetzt ein η-Werth zuzuordnen sein, der aus η durch Spiegelung in Bezug auf eine von s verschiedene Seite des Bereiches R hervorgeht. Der so erscheinende Punkt der η-Ebene geht also aus dem früher gefundenen durch eine linear gebrochene (projective) Substitution hervor.

Wir sehen also, dass η eine unendlich vieldeutige Function des Ortes auf der Riemann'schen Fläche T ist, und dass geschlossenen Wegen von (u, v) in der Fläche T gewisse projective Substitutionen entsprechen, die η beim Durchlaufen dieser Wege erfährt. Diese Substitutionen bilden offenbar eine Gruppe ϑ.

Da der Ausdruck

$$\Delta\binom{\eta}{u},$$

wie leicht einzusehen ist, ebenfalls eine Function vom Charakter $G(\eta)$ ist, so ist dieser Ausdruck rational durch (u, v) darstellbar; sei

$$\Delta\binom{\eta}{u} = \varphi(u, v)\cdot$$

Dann bildet also

$$y_1 = \sqrt{\frac{du}{d\eta}}, \quad y_2 = \eta\sqrt{\frac{du}{d\eta}}$$

ein Fundamentalsystem der linearen Differentialgleichung

$$\text{(II)} \qquad \frac{d^2 y}{du^2} = \varphi(u, v)\, y,$$

worin $\varphi(u, v)$ eine rationale Function der durch die Gleichung (I) verknüpften Variabeln u, v mit realen Coefficienten darstellt.

322. Die Frage der eindeutigen Umkehrbarkeit. Die Klein'schen und die allgemeinen Fuchs'schen Gruppen. Beispiel symmetrischer Klein'scher Gruppen vom Geschlechte Null.

Es entsteht nun die Frage, unter welchen Bedingungen u, v eindeutige Functionen von η sind, d. h. wann ϑ eine discontinuirliche Gruppe ist.

Die projectiven Fundamentalsubstitutionen der Gleichung (II) sind offenbar nichts anderes, wie diejenigen projectiven Substitutionen, die zwei Seiten des Bereiches R_0, die Spiegelbilder von einander in Bezug

auf s sind, in einander überführen. Wir werden also R_0 als den Fundamentalbereich der Gruppe ϑ ansehen müssen. Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Discontinuität von ϑ ist dann die folgende.

Denken wir uns aus R durch Spiegelung in Bezug auf seine sämmtlichen Seiten symmetrische Bereiche gebildet, spiegeln wir diese Bereiche weiter über ihre freien Seiten und fahren so fort, so bilden die so entstehenden Bereiche eine Fläche F, die einen Theil oder auch die ganze η-Ebene einfach oder mehrfach überdeckt. Je zwei dieser Bereiche fügen sich zu einem Bereiche zusammen, der aus R_0 durch eine Substitution von ϑ hervorgeht. Die Gruppe ϑ ist also discontinuirlich, wenn die Fläche F die η-Ebene an keiner Stelle mehrfach überdeckt.

Die explicite Aufstellung der Bedingungen, denen der Bereich R genügen muss, damit eine solche einfache Ueberdeckung eintritt, bietet im Allgemeinen nicht unerhebliche Schwierigkeiten dar.

Wenn die Kreisbogen, die die Begrenzung von R bilden, einen allen gemeinsamen Orthogonalkreis besitzen, so sind die Substitutionen von ϑ Verschiebungen in Bezug auf den Orthogonalkreis. In diesem Falle sind die Discontinuitätsbedingungen leicht aufzustellen.

Fassen wir diejenigen Ecken von R_0, die einer und derselben Stelle der Riemann'schen Fläche T entsprechen, zu einem Cyklus zusammen, so ist für die Discontinuität der Gruppe ϑ nothwendig und hinreichend, dass die Summe der Winkel bei jedem solchen Cyklus ein aliquoter Theil von 2π sei. Der Beweis ist bis auf geringe Modificationen genau derselbe, wie der in der Nr. 287 (S. 108) für den Fall der Dreiecksfunction gelieferte.

Nehmen wir dann $p = 0$, d. h. das Kreisbogenpolygon R als ein einfach zusammenhängendes, so kommen wir auf den Fall einer symmetrischen Fuchs'schen Gruppe von der in der Nr. 319 (S. 227) erörterten Art.

Herr Poincaré bezeichnet allgemein eine discontinuirliche Gruppe projectiver Substitutionen, die Verschiebungen in Bezug auf einen Orthogonalkreis sind, als eine Fuchs'sche, eine discontinuirliche Gruppe, deren Substitutionen keine Verschiebungen sind, als eine Klein'sche Gruppe. Die von uns bisher betrachteten Fuchs'schen Gruppen werden als solche vom Geschlechte Null zu charakterisiren sein, weil sich jede zu einer solchen Gruppe gehörige Fuchs'sche Function rational durch eine dieser Functionen darstellen lässt, oder, was dasselbe heisst, weil zwischen je zwei derartigen Functionen eine algebraische Gleichung vom Range (oder Geschlechte) Null besteht.

Wenn die vorhin erörterte Abbildungsaufgabe des mehrfach ($p+1$-fach) zusammenhängenden Kreisbogenpolygons R auf den Bereich B der Riemann'schen Fläche T zu einer discontinuirlichen Gruppe ϑ führt, so liefert uns diese ein Beispiel einer Fuchs'schen oder Klein'schen Gruppe vom Geschlechte p, u. z. einer symmetrischen Gruppe dieses Geschlechtes.

Wir wollen nun noch einige specielle Fälle des Kreisbogenpolygons R kurz behandeln, in welchen die Discontinuität der entsprechenden projectiven Gruppe unmittelbar evident ist. Für die allgemeine Theorie der Fuchs'schen und Klein'schen Gruppen, sowie der zu solchen Gruppen gehörigen eindeutigen Functionen müssen wir auf die Arbeiten von Herrn Poincaré in den Acta Mathematica verweisen.

Sei der Bereich R begrenzt von $(\sigma+1)$ Kreisbogen $s_0, s_1, s_2, \cdots s_\sigma$, die so beschaffen sind, dass $s_\varkappa$, $s_{\varkappa+1}$ für $\varkappa=0, 1, \cdots \sigma$ einander im Punkte $\lambda_{\varkappa+1}$ von aussen berühren; dabei ist $s_{\sigma+1}=s_0$ zu nehmen. Es ist dann $p=0$, die Gleichung (I) kann in der Form

$$v = \text{const.}$$

geschrieben werden, und die sämmtlichen zum Bereiche R gehörigen Functionen vom Charakter $G(\eta)$ sind rational durch u darstellbar. Diese Function u vermittelt die Abbildung von R auf eine der beiden Halbebenen, in welche die u-Ebene durch die reale u-Axe, die jetzt als Realitätslinie fungirt, getheilt wird. Sei R' das Spiegelbild von R in Bezug auf den Kreis s_0, so bilden R und R' zusammengenommen einen Bereich R_0, der von 2σ Kreisbogen begrenzt wird. Alle Winkel von R_0 sind gleich Null und die Substitutionen $S_\varkappa$, welche die Seiten $s_\varkappa$ in ihre Spiegelbilder $s_\varkappa'$ in Bezug auf s_0 überführen, bilden mit ihren inversen die Basis einer Gruppe ϑ projectiver Substitutionen. Die $(\sigma+1)$ Substitutionen

$$S_\varkappa^{-1} S_{\varkappa+1} \qquad (\varkappa=0,1,2,\cdots\sigma)$$

sind parabolisch und können ebenfalls als eine Basis von ϑ angesehen werden.

Die Discontinuität der Gruppe ϑ ist evident. Denn das Spiegelbild von R in Bezug auf irgend eine seiner Seiten $s_\varkappa$ liegt ganz innerhalb des Kreises, dem $s_\varkappa$ angehört, kann also mit R keinen Theil gemein haben; ähnlich schliesst man für die durch fortgesetzte Spiegelung entstehenden Bereiche, dass sie einander nicht überdecken können (vergl. Nr. 272, S. 50 und Nr. 304, S. 173).

Also ist ϑ eine symmetrische Klein'sche Gruppe vom Geschlechte Null; die Function u, die bei den Substitutionen dieser Gruppe ungeändert bleibt, ist eindeutig in η und nimmt innerhalb des Funda-

mentalbereiches R_0 von ϑ jeden Werth nur ein einziges Mal an. Auf der Begrenzung von R_0 ebensowohl wie auf der **Diagonale** s_0 ist u real. Jede Function von η, die sich innerhalb R_0 wie eine rationale Function verhält und bei den Substitutionen von ϑ ungeändert bleibt, ist rational durch u darstellbar, und η ist der Integralquotient einer Differentialgleichung

$$\text{(IIa)} \qquad \frac{d^2y}{du^2} = \varphi(u)y,$$

wo $\varphi(u)$ eine rationale Function bedeutet. Die singulären Punkte dieser Differentialgleichung sind die Werthe $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$, die u in den Ecken $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_{\sigma+1}$ von R annimmt; die Differentialgleichung (IIa) gehört zur Fuchs'schen Classe, und die determinirenden Fundamentalgleichungen, die zu den Punkten $a_\varkappa$ gehören, haben je eine doppelte Wurzel.

Man nennt nach Herrn Poincaré u und jede rationale Function von u eine **Klein'sche Function** von η.

Wenn die Kreisbogen $s_0, s_1, s_2, \cdots s_\sigma$ einen Orthogonalkreis O besitzen, so haben wir den Fall einer Fuchs'schen Gruppe von der von uns betrachteten Art, u. z. ist die Gruppe eine symmetrische und die Zahlen $g_1, g_2, \cdots g_{\sigma+1}$ sind insgesammt unendlich. Wenn dann R innerhalb des Orthogonalkreises O gelegen ist, so existirt die Function u nur im Innern von O, und O ist, wie wir wissen, überall dicht besetzt von den Doppelpunkten der parabolischen und hyperbolischen Substitutionen der Gruppe ϑ.

Besitzen die Kreisbogen $s_0, s_1, s_2, \cdots s_\sigma$ **keinen Orthogonalkreis**, so ist gleichwohl der Existenzbereich der Function u ein beschränkter. Die Grenze dieses Existenzbereiches wird gebildet von der Gesammtheit der Doppelpunkte der parabolischen, hyperbolischen und loxodromischen Substitutionen der Klein'schen Gruppe ϑ. Fügen wir der von diesen Doppelpunkten gebildeten Punktmenge ihre erste Ableitung hinzu, so erhalten wir eine **perfecte Punktmenge** Ω. Während aber im Falle der Existenz eines Orthogonalkreises O die perfecte Punktmenge Ω mit der Peripherie von O identisch ist, bildet Ω, wenn die Gruppe keine Fuchs'sche ist, eine **nicht analytische Linie**. Dieser merkwürdige Umstand ist zuerst von Herrn Klein bemerkt worden. Wie Herr Poincaré gezeigt hat, besitzt diese Linie Ω in jedem Punkte, der eine Ecke eines der aus R durch Spiegelungen hervorgehenden Kreisbogenpolygone ist, eine bestimmte Tangente, sie besitzt aber an keiner Stelle einen Krümmungskreis.

323. Beispiel einer Klein'schen Gruppe von beliebigem Geschlechte. Klein'sche Functionen.

Betrachten wir als zweites Beispiel einen Bereich R, der von $(\sigma + 1)$ sich gegenseitig ausschliessenden Vollkreisen begrenzt wird; seien diese Kreise

$$s_0, s_1, s_2, \cdots s_\sigma.$$

Der Bereich R ist dann vom Zusammenhange $\sigma + 1$ und er besitzt keine Ecke. Spiegeln wir denselben z. B. in Bezug auf den Kreis s_0, so bildet das Spiegelbild R' mit R zusammengenommen einen von 2σ Kreisen, nämlich den $s_1, s_2, \cdots s_\sigma$ und ihren Spiegelbildern in Bezug auf s_0

$$s_1', s_2', \cdots s_\sigma',$$

begrenzten Bereich R_0. Die Substitutionen $S_\varkappa$, welche $s_\varkappa$ in $s_\varkappa'$ verwandeln, sind hyperbolische oder loxodromische, dieselben bilden mit ihren inversen die Basis einer projectiven Gruppe ϑ.

Die Discontinuität dieser Gruppe ergiebt sich ebenso wie in dem vorhin betrachteten Beispiele aus der einfachen Bemerkung, dass z. B. das Spiegelbild von R in Bezug auf eine Seite $s_\varkappa$ dieses Bereiches ganz im Innern des Kreises $s_\varkappa$ gelegen sein muss, also den Bereich R an keiner Stelle überdecken kann. Demnach ist ϑ im Allgemeinen eine Klein'sche Gruppe, sie wird insbesondere zu einer Fuchs'schen, wenn die Kreise $s_0, s_1, s_2, \cdots s_\sigma$ einen Orthogonalkreis O besitzen.

Die Gleichung (I), welche die beiden zu diesem Bereiche R gehörigen Functionen u, v mit einander verknüpft, ist vom Range σ. Ihre Riemann'sche Fläche T wird durch die Realitätslinien, die den Kreisen

$$s_1, s_2, \cdots s_\sigma, \qquad s_1', s_2', \cdots s_\sigma'$$

entsprechen, in eine $(2\sigma - 1)$-fach zusammenhängende zerschnitten. Diese ist die eindeutig conforme Abbildung des $(2\sigma - 1)$-fach zusammenhängenden Bereiches R_0. Da die Gruppe ϑ eine discontinuirliche ist, so sind die u, v eindeutige Functionen von η, und jede eindeutige Function von η, die sich innerhalb R_0 wie eine rationale Function verhält und bei den Substitutionen von ϑ ungeändert bleibt, ist eine rationale Function der durch die Gleichung (I) verknüpften Grössen u, v.

Denken wir uns den Bereich R_0 aus der η-Ebene ausgeschnitten und durch Deformation und Biegung so umgestaltet, dass die correspondirenden Punkte der Seiten

$$s_\varkappa, s_\varkappa' \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

aufeinanderfallen, so stellt derselbe eine geschlossene Fläche $\overline{T}$ dar, die die eindeutig conforme Abbildung der unzerschnittenen Riemann'schen Fläche T ist.

Die so definirte Klein'sche Gruppe ist eine symmetrische, die Gleichung (I), die zwischen u, v besteht, hat dem entsprechend reale Coefficienten.

Wir können aber leicht eine analog beschaffene nicht symmetrische Klein'sche Gruppe definiren.

Denken wir uns nämlich in der η-Ebene 2σ beliebige Kreise

$$s_1, s_2, \cdots s_\sigma, \quad s_1', s_2', \cdots s_\sigma',$$

die sich gegenseitig ausschliessen und weder schneiden noch berühren. Bezeichnen wir das durch diese Kreise begrenzte Gebiet der η-Ebene durch R_0, so gehen die Seiten

$$s_\varkappa, s_\varkappa' \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

dieses Bereiches durch hyperbolische oder loxodromische Substitutionen $S_\varkappa$ aus einander hervor, und diese Substitutionen $S_\varkappa$ bilden mit ihren inversen die Basis einer projectiven Gruppe ϑ.

Genau so wie im symmetrischen Falle schliessen wir, dass diese Gruppe eine discontinuirliche sein müsse. In der That, construiren wir z. B. die Abbildung von R_0 durch die Function

$$S_\varkappa \eta,$$

so erhalten wir einen Bereich $R_\varkappa$, der ganz innerhalb des Kreises $s_\varkappa'$ gelegen ist, also R_0 nicht überdecken kann; u. s. w. Man kann leicht einsehen, dass die aus R_0 durch Anwendung der Substitutionen von ϑ hervorgehenden Bereiche die ganze η-Ebene, mit Ausnahme gewisser perfecter Punktmengen, die aber kein zweidimensionales Gebiet erfüllen, einfach und lückenlos bedecken.

Man kann nun in ähnlicher Weise, wie wir es nach dem Verfahren von Herrn Klein in der Nr. 214 (Bd. II, 1, S. 332 ff.) für den daselbst betrachteten einfach zusammenhängenden Bereich gethan haben, die Existenz von Functionen nachweisen, die sich innerhalb R_0 wie rationale Functionen verhalten und in correspondirenden Punkten der Seiten

$$s_\varkappa, s_\varkappa' \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

dieselben Werthe annehmen. Man kann die Existenz solcher Functionen aber auch nach dem Vorgange von Herrn Poincaré dadurch erweisen, dass man mittelst der Substitutionen

$$1 = S_0, S_1, S_2, \cdots \quad \text{ad infinitum}$$

der Gruppe ϑ, Thetareihen

$$\Theta(\eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} H(S_\nu \eta) \left(\frac{d S_\nu \eta}{d\eta}\right)^m$$

bildet, wo H eine beliebige rationale Function, m eine ganze Zahl grösser als Eins bedeutet. Die Convergenz dieser Thetareihen, die Herr Poincaré als Klein'sche Thetareihen bezeichnet, kann nach dem beim ersten Convergenzbeweise für die Fuchs'schen Thetareihen (Nr. 306, S. 177) angewandten Verfahren erwiesen werden. Dieselben haben die Eigenschaft, dass wenn

$$S_\varkappa \eta = \frac{\alpha_\varkappa \eta + \beta_\varkappa}{\gamma_\varkappa \eta + \delta_\varkappa}$$

eine beliebige Substitution der Gruppe ϑ bedeutet,

$$\Theta(S_\varkappa \eta) = (\gamma_\varkappa \eta + \delta_\varkappa)^{2m}\, \Theta(\eta)$$

ist; man erhält also durch Quotientenbildung aus solchen Klein'schen Thetafunctionen Ausdrücke, die innerhalb R_0 den Charakter von rationalen Functionen besitzen und bei den Substitutionen der Gruppe ϑ ungeändert bleiben. Herr Poincaré bezeichnet diese Functionen als Klein'sche (vgl. Nr. 322, S. 238).

Denken wir uns den Bereich R_0 durch Dehnung und Biegung wiederum so umgeformt, dass correspondirende Punkte der Seiten

$$s_\varkappa,\ s_\varkappa' \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

aufeinanderfallen, so sind die zur Gruppe ϑ gehörigen Klein'schen Functionen eindeutige Functionen des Ortes auf der so entstehenden geschlossenen Fläche $\overline{T}$, die in jedem Punkte dieser Fläche den Charakter von rationalen Functionen besitzen.

Da die Fläche $\overline{T}$ eine $(2\sigma + 1)$-fach zusammenhängende ist, so folgt hieraus nach einem von Riemann in der Theorie der algebraischen Functionen angewandten Schlussverfahren, dass sich jede zur Gruppe ϑ gehörige Klein'sche Function durch zwei solche Functionen u, v, zwischen denen eine algebraische Gleichung vom Range σ

$$\text{(Ia)} \qquad f(u, v) = 0$$

besteht, rational darstellen lässt. Die zu der Gleichung (Ia) gehörige, z. B. über der u-Ebene auszubreitende Riemann'sche Fläche ist die eindeutig conforme Abbildung der geschlossenen Fläche $\overline{T}$.

Wir haben also in diesem Falle die beiden durch die Gleichung (Ia) vom Range σ verknüpften Variabeln als eindeutige Klein'sche Functionen des Parameters η dargestellt.

324. Darstellung der durch eine algebraische Gleichung verknüpften Variabeln als eindeutiger Functionen eines Parameters.

Der am Schlusse der vorigen Nummer erwähnte Parameter η erscheint als Integralquotient einer linearen Differentialgleichung

$$\text{(IIb)} \qquad \frac{d^2y}{du^2} = \varphi(u, v)\, y,$$

wo $\varphi(u, v)$ eine rationale Function der durch die Gleichung (Ia) verknüpften Variabeln u, v darstellt. Die projective Monodromiegruppe dieser Differentialgleichung ist ϑ, und da der Fundamentalbereich R_0 keine Ecken hat, sind die einzigen singulären Punkte dieser Differentialgleichung die Verzweigungspunkte der algebraischen Function v von u. Das Verhalten der Integrale von (IIb) in der Umgebung dieser Punkte lässt sich ohne Schwierigkeit übersehen.

Die Functionen u, v sind nicht eindeutig bestimmt; man kann vielmehr an Stelle derselben zwei rationale Functionen

$$u_1 = \varphi(u, v), \quad v_1 = \psi(u, v)$$

betrachten, die so beschaffen sind, dass sich u, v mit Berücksichtigung der Gleichung (Ia) auch wieder als rationale Functionen

$$u = \varphi_1(u_1, v_1), \quad v = \psi_1(u_1, v_1)$$

von u_1, v_1 ergeben. Die u_1, v_1 genügen also dann einer Gleichung

$$\text{(Ib)} \qquad f_1(u_1, v_1) = 0,$$

die mit (Ia) in der Bezeichnung von Riemann (vgl. Nr. 163, Bd. II, 1, S. 110) zu derselben Classe gehört.

Wir können also nicht nur u, v, sondern irgend zwei Variable u_1, v_1, die durch eine mit (Ia) zur selben Classe gehörige Gleichung (Ib) mit einander verknüpft sind, als eindeutige, zur Gruppe ϑ gehörige Klein'sche Functionen der Variabeln η darstellen.

Wenn $\sigma = 1$ ist, d. h. wenn R_0 von zwei Kreisen begrenzt wird, so besteht die Gruppe ϑ aus den Potenzen einer einzigen hyperbolischen oder loxodromischen Substitution, die wir in der Normalform als

$$\frac{S\eta - \lambda}{S\eta - \mu} = K\frac{\eta - \lambda}{\eta - \mu}, \qquad |K| \neq 1,$$

schreiben wollen. Bilden wir uns dann eine eindeutige doppeltperiodische Function $p(\zeta)$ mit den Perioden

$$2\pi i, \ \log K,$$

die innerhalb des Periodenparallelogramms jeden Werth nur zweimal annimmt, so liefert die Function

$$u = p\left(\log \frac{\eta - \lambda}{\eta - \mu}\right)$$

und die Ableitung derselben nach ζ

$$v = p'\left(\log \frac{\eta - \lambda}{\eta - \mu}\right)$$

das durch eine Gleichung vom Range Eins

(III) $$f(u, v) = 0$$

verknüpfte Functionenpaar u, v, durch welches eine jede zu dieser Klein'schen Gruppe ϑ gehörige Klein'sche Function rational dargestellt werden kann.

Diese Gruppe ist nichts anderes wie die projective Monodromiegruppe des in der Nr. 197 (Bd. II, 1, S. 256) behandelten Fuchs'schen Beispiels.

Bilden wir den zu dem Periodenquotienten

(IV) $$\frac{\log K}{2\pi i}$$

gehörigen Modul $\varkappa^2$ des entsprechenden elliptischen Integrals, so ist dieser Modul eine Invariante der durch die Gleichung (III) bestimmten Classe von algebraischen Gleichungen oder Functionen.

Ist umgekehrt ein beliebiger Modul $\varkappa^2$ vorgelegt, so können wir den entsprechenden Periodenquotienten finden und denselben in die Form (IV) setzen. Wir erhalten auf diese Weise die Substitution $S\eta$ (natürlich abgesehen von einer noch willkürlich zu wählenden projectiven Substitution, durch welche $S\eta$ transformirt werden kann und durch deren Festlegung die Doppelpunkte von $S\eta$ fixirt werden) und somit für eine beliebige Classe von algebraischen Gleichungen vom Range Eins die Variable η, mit Hülfe deren die durch eine solche Gleichung verknüpften Variabeln, als eindeutige Klein'sche Functionen dargestellt werden können.

Wenn $\varkappa^2$ real ist, so können wir K real nehmen, dann ist die Substitution $S\eta$ eine hyperbolische, und die Gruppe ϑ wird zu einer Fuchs'schen.

Wenn $\sigma > 1$ ist, so wird, wie Riemann gezeigt hat, eine Classe von algebraischen Gleichungen vom Range σ durch $3\sigma - 3$ constante Grössen bestimmt. Man nennt dieselben die Classenmoduln, und diese spielen für $\sigma > 1$ die analoge Rolle wie das $\varkappa^2$ für $\sigma = 1$.

Wenn wir von einem durch die 2σ Kreise $s_\varkappa$, $s_\varkappa'$ begrenzten Bereiche R_0 ausgehen, so sind die $3\sigma - 3$ Classenmoduln derjenigen

Classe von algebraischen Gleichungen, die die Eigenschaft haben, dass die durch dieselben verknüpften Variabeln als eindeutige Functionen von η erscheinen, vollkommen bestimmt.

Nun hängt die aus den σ Substitutionen $S_\varkappa \eta$ und deren inversen gebildete Klein'sche Gruppe ϑ von 3σ, und wenn wir von einer willkürlichen transformirenden projectiven Substitution absehen, von

$$3\sigma - 3$$

Parametern ab. Die Anzahl der Parameter der Gruppe ϑ stimmt also genau überein mit der Anzahl der Classenmoduln der zugehörigen Classe von algebraischen Gleichungen.

Es liegt also die Frage nahe, ob man nicht auch allgemein, wenn $\sigma > 1$ ist, die Classenmoduln willkürlich vorschreiben und dann die $3\sigma - 3$ Parameter einer Klein'schen Gruppe ϑ von der jetzt betrachteten Art finden kann, die so beschaffen ist, dass sich zwei Variable, die durch eine Gleichung der durch die gegebenen Moduln bestimmten Classe verknüpft sind, als eindeutige zu ϑ gehörige Klein'sche Functionen darstellen lassen.

Diese Frage lässt sich nach Herrn Poincaré im bejahenden Sinne beantworten und dadurch der fundamentale Satz beweisen, dass zwei durch irgend eine algebraische Gleichung verknüpfte Variable als eindeutige Klein'sche Functionen eines Parameters dargestellt werden können.

Wenn die Kreise

$$s_\varkappa,\ s_\varkappa' \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

einen Orthogonalkreis besitzen, so sind die Substitutionen $S_\varkappa$ hyperbolische und die Gruppe ϑ eine Fuchs'sche. In diesem Falle kann man zeigen, dass die $3\sigma - 3$ Classenmoduln der entsprechenden Classe von algebraischen Gleichungen reale Grössen sind. Für Gleichungen mit realen Classenmoduln würde also eine Darstellung der durch eine solche Gleichung verknüpften Variabeln durch Fuchs'sche Functionen möglich sein.

Herr Poincaré hat aber gezeigt, dass sich auch für die durch eine beliebige algebraische Gleichung (mit complexen Classenmoduln) verknüpften Variabeln eine Darstellung als Fuchs'sche Functionen eines Parameters angeben lässt; wir werden eine solche Darstellung noch später kennen lernen.

Sechzehnter Abschnitt.

Das Poincaré'sche Princip und seine Anwendungen.

Erstes Kapitel.

325. Formulirung eines neuen Problems. Bedeutung desselben. Das Poincarésche Princip in allgemeiner Fassung.

Zum Beweise des Theorems, welches wir oben (Nr. 324, S. 244) erwähnt hatten, kann man sich einer Methode bedienen, die Herr Poincaré erdacht und als Méthode de continuité bezeichnet hat. Wir werden weiter unten (Nr. 328) diese Methode an einem einfachen Beispiele auseinandersetzen, in Bezug auf die allgemeine Fassung derselben müssen wir uns damit begnügen, auf die Arbeit von Herrn Poincaré im vierten Bande der Acta Mathematica hinzuweisen.

Es möge jetzt ein etwas anderes Problem formulirt werden, welches Herr Poincaré durch eben diese Methode gelöst hat. Wir beschränken uns dabei auf die besondere Art von Fuchs'schen Functionen, die wir in den drei ersten Kapiteln des vorigen Abschnittes behandelt haben.

Wir waren ausgehend von dem Fundamentalbereiche R_0, der in den aus den Ecken gebildeten Cykeln

$$\lambda_1, \ (\lambda_2, \lambda_2'), \ (\lambda_3, \lambda_3'), \cdots (\lambda_\sigma, \lambda_\sigma'), \ \lambda_{\sigma+1}$$

beziehungsweise die Winkelsummen

$$\frac{2\pi}{g_1}, \quad \frac{2\pi}{g_2}, \quad \frac{2\pi}{g_3}, \quad \cdots \quad \frac{2\pi}{g_\sigma}, \quad \frac{2\pi}{g_{\sigma+1}}$$

aufweist, zu einer Fuchs'schen Gruppe ϑ und den zugehörigen Fuchs'schen Functionen gelangt, die sich insgesammt durch

$$z = f(\eta)$$

rational darstellen lassen. Dabei war η der Integralquotient einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

(1) $$\frac{d^2y}{dz^2} = q(z)\,y,$$

wo die rationale Function $q(z)$, die in der Nr. 216 (Bd. II, 1, S. 343, Gl. [29b]) angegebene Form

(2) $$q(z) = \frac{1}{\prod\limits_{\lambda=1}^{\sigma}(z-a_\lambda)}\left\{-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{g_{\sigma+1}^2}\right)E_{\sigma-2}(z)\right.$$
$$\left.-\sum_{\lambda=1}^{\sigma}\frac{(a_\lambda-a_1)\cdots\cdots(a_\lambda-a_\sigma)}{z-a_\lambda}\,\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{g_\lambda^2}\right)\right\}$$

besitzt, wenn wir z so einrichten, dass

$$a_{\sigma+1} = f(\lambda_{\sigma+1}) = \infty$$

ist; dabei bedeutet $E_{\sigma-2}(z)$ eine ganze Function $(\sigma-2)^{\text{ten}}$ Grades, in welcher der Coefficient von $z^{\sigma-2}$ den Werth Eins besitzt.

Wenn wir noch $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ wählen, so sind in der rationalen Function $q(z)$ noch die $\sigma - 2$ Grössen

$$a_3,\ a_4,\ \cdots\ a_\sigma$$

und die $\sigma - 2$ Coefficienten von $E_{\sigma-2}(z)$ enthalten, die, wenn wir uns die Zahlen

(3) $$g_1,\ g_2,\ \cdots\ g_\sigma,\ g_{\sigma+1}$$

fest denken, d. h. wenn wir einen Typus holoedrisch isomorpher Fuchs'scher Gruppen betrachten, durch Angabe der Gruppe ϑ vollkommen bestimmt sind.

Innerhalb eines Typus holoedrisch isomorpher Gruppen, der durch Angabe eines bestimmten Systems der ganzen Zahlen (3) charakterisirt ist, hängt eine einzelne Gruppe (vergl. Nr. 308, S. 189) noch von $2\sigma - 4$ realen Parametern ab. Durch Angabe dieser $2\sigma - 4$ realen Grössen, die nur noch gewissen Ungleichheitsbedingungen zu genügen haben, damit die Gruppe eine Fuchs'sche sei, sind also die $2\sigma - 4$ in $q(z)$ auftretenden complexen Grössen vollkommen bestimmt.

Diese $2\sigma - 4$ complexen Grössen sind $4\sigma - 8$ realen Grössen aequivalent, so dass also $q(z)$ genau $2\sigma - 4$ reale Parameter mehr enthält, wie die Fuchs'sche Gruppe ϑ.

Wir schliessen hieraus, dass zwischen den $4\sigma - 8$ realen Parametern, die in $q(z)$ bei Fixirung der Grössen (3) noch enthalten sind, genau $2\sigma - 4$ Bedingungsgleichungen erfüllt sein müssen, wenn in der Differentialgleichung (1) z eine Fuchs'sche Function des Integralquotienten η sein soll.

Hat man also die Aufgabe, $q(z)$ so zu bestimmen, dass für (1) die letztere Bedingung (immer bei bestimmter Wahl der Zahlen (3)) erfüllt ist, so darf man nur über $2\sigma - 4$ der in $q(z)$ enthaltenen realen Parameter disponiren.

Man kann also z. B. die $\sigma - 2$ singulären Stellen

$$a_3, a_4, \cdots a_\sigma$$

vorschreiben und fragen:

Lassen sich die gedachten $2\sigma - 4$ Bedingungsgleichungen stets befriedigen, wenn in $q(z)$, nebst den Grössen (3), noch die singulären Punkte $a_3, a_4, \cdots a_\sigma$ willkürlich vorgeschrieben werden; oder mit anderen Worten (vergl. Nr. 216, Bd. II, 1, S. 346):

Kann man die Coefficienten der ganzen Function $E_{\sigma-2}(z)$ stets so bestimmen, dass bei fester Wahl der Grössen (3) und für willkürlich gegebene singuläre Punkte $a_3, a_4, \cdots a_\sigma$ in der Differentialgleichung (1) die unabhängige Variable eine eindeutige Fuchs'sche Function des Integralquotienten sei?

Um die grosse Bedeutung, welche die Beantwortung dieser Frage besitzt, hervortreten zu lassen, knüpfen wir an das in der Nr. 303 (S. 162) für den besonderen Fall einer Function mit drei singulären Punkten dargelegte Poincaré'sche Princip an.

Sei durch eine bestimmte Fuchs'sche Gruppe ϑ des durch die Zahlen (3) charakterisirten Typus eine Differentialgleichung (1) gewonnen, in welcher also die $a_3, a_4, \cdots a_\sigma$ bestimmte Werthe besitzen.

Betrachten wir eine Function

$$Y = F(z),$$

die keine anderen Stellen der z-Ebene als

$$0, 1, a_3, a_4, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$$

zu Verzweigungspunkten hat, und die so beschaffen ist, dass jeder Zweig von Y, wenn $g_\varkappa$ eine endliche ganze Zahl ist, nach $g_\varkappa$-maliger Umkreisung des singulären Punktes $a_\varkappa$ zu seinem Ausgangswerthe zurückkehrt, während sie, wenn $g_\varkappa$ unendlich gross ist, in der Umgebung von $z = a_\varkappa$ auch unendlich vieldeutig sein kann.

Setzen wir dann

$$z = f(\eta),$$

wo η den Integralquotienten der Differentialgleichung (1) bedeutet, so ist die Function

$$Y = F(f(\eta)) = g(\eta)$$

von η offenbar nur innerhalb des Einheitskreises der η-Ebene definirt.

In der Umgebung einer Stelle η, die keine Ecke eines der Bereiche R_ν ist, die aus R_0 durch die Substitutionen

$$S_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

der Gruppe ϑ hervorgehen, verhält sich die Function $g(\eta)$ offenbar eindeutig, sie verhält sich aber auch eindeutig in der Umgebung einer im Innern des Einheitskreises gelegenen Ecke eines Bereiches R_ν. Denn wenn diese Ecke z. B. mit der Ecke $\lambda_\varkappa$ von R_0 correspondirt, so entspricht einem einfachen Umlaufe von η um $\lambda_\varkappa$ eine $g_\varkappa$-malige Umkreisung des Punktes $a_\varkappa$ durch die Variable z.

Also ist $g(\eta)$ eine unverzweigte und folglich, da das Innere des Einheitskreises eine einfach zusammenhängende Fläche ist, eine schlechthin eindeutige Function von η.

Die functionale Beziehung zwischen Y und z lässt sich also in der Form

$$z = f(\eta), \quad Y = g(\eta)$$

darstellen, wo $f(\eta)$, $g(\eta)$ eindeutige Functionen von η sind, und wir erhalten die sämmtlichen Zweige der Function Y von z, wenn wir in $g(\eta)$ an die Stelle von η die Werthe $S_\nu \eta$ setzen und S_ν der Reihe nach die Substitutionen der Gruppe ϑ durchlaufen lassen. Dies ist das Poincaré'sche Princip in seiner allgemeinen Fassung.

Sei nun

$$Y = F(z)$$

eine willkürlich gegebene Function, die nur eine endliche Anzahl $\sigma + 1$ von Verzweigungspunkten besitzt und die eindeutig ist, wenn wir uns die z-Ebene durch einen diese $\sigma + 1$ Punkte untereinander verbindenden Schnitt zerschnitten denken. Dann können wir zunächst ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass drei der Verzweigungspunkte an den Stellen

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{\sigma+1} = \infty$$

der z-Ebene gelegen sind, die übrigen $\sigma - 2$ Verzweigungspunkte seien

$$a_3, a_4, \cdots a_\sigma.$$

Wenn jeder Zweig der Function Y nach einer endlichen Anzahl von Umkreisungen des Punktes $a_\varkappa$ zu seinem Ausgangswerthe zurückkommt, so sei $g_\varkappa$ gleich dieser Anzahl; wenn die Function Y in der Umgebung von $a_\varkappa$ unendlich vieldeutig ist, so nehmen wir $g_\varkappa = \infty$.

Bilden wir mit Hülfe dieser Werthe $a_3, a_4, \cdots a_\sigma$ und der zugehörigen Zahlen

$$g_1, g_2, \cdots g_\sigma, g_{\sigma+1}$$

die durch die Gleichung (2) definirte Function $q(z)$, und betrachten dann die Differentialgleichung (1), worin $q(z)$ die eben erklärte Bedeutung hat.

Wenn es dann möglich ist, über die in $q(z)$ noch unbestimmt gebliebenen Coefficienten von $E_{\sigma-2}(z)$ so zu disponiren, dass z eine eindeutige Function des Integralquotienten η wird, für welche der Bereich, wo sich diese Function wie eine rationale Function verhält, ein einfach zusammenhängender ist, so folgt aus dem Poincaré'schen Principe, dass auch Y eine eindeutige Function von η sein muss, so dass also die functionale Beziehung, die zwischen Y und z besteht, dadurch dargestellt werden könnte, dass wir z und Y als eindeutige Functionen des Parameters η ausdrücken.

Y kann als Function von z, z. B. als die Lösung einer beliebigen linearen Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten definirt sein, dann sind offenbar die für die Function $F(z)$ aufgestellten Bedingungen erfüllt.

326. Normale Differentialgleichungen. Fuchs'sche Differentialgleichungen. Untergeordnete Differentialgleichungen. Fuchs'sche Functionen, die vorgeschriebene Werthe auslassen.

Wir sagen von einer Differentialgleichung (1), in welcher $q(z)$ die Form (2) besitzt und wo die $g_\varkappa$ positive ganze Zahlen oder unendlich gross sind, sie sei eine normale Differentialgleichung. Wenn in einer normalen Differentialgleichung die unabhängige Variable z eine Fuchs'sche Function des Integralquotienten ist, so sagen wir, sie sei eine Fuchs'sche Differentialgleichung.

Damit eine normale Differentialgleichung eine Fuchs'sche sein könne, müssen die Zahlen $g_1, g_2, \cdots g_{\sigma+1}$ die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{\sigma+1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{g_i}\right)-1=\frac{-1}{\nu}>0 \tag{4}$$

erfüllen, welche (vergl. Nr. 312, S. 205) besagt, dass die Summe der Winkel des Fundamentalbereiches F_0 oder R_0 kleiner als

$$2\pi(\sigma-1)$$

ist, d. h. mit anderen Worten, dass sich R_0 eindeutig conform auf ein von geodätischen Linien gebildetes Polygon auf einer Fläche vom constanten Krümmungsmaasse -1 abbilden lässt.

Wenn die Zahlen g_i die Ungleichung (4) nicht erfüllen, d. h. wenn entweder

(I) $$-\frac{1}{\nu} < 0$$

oder

(II) $$-\frac{1}{\nu} = 0,$$

so kann die normale Differentialgleichung (1) zwar keine Fuchs'sche sein, aber es kann gleichwohl z eine eindeutige Function von η werden, deren Existenzbereich ein einfach zusammenhängender ist.

Was zunächst den Fall (I) anlangt, so muss also für positives ν

$$\sum_{i=1}^{\sigma+1} \frac{\nu}{g_i}(g_i - 1) = 2\nu - 2$$

sein. Diese Gleichung wurde in der Nr. 299 (S. 149 ff.) discutirt, und wir fanden daselbst als die einzig möglichen Fälle die cyklischen Gruppen mit $\sigma = 1$ und die Gruppen des Dieders, Tetraeders, Oktaeders und Ikosaeders mit $\sigma = 2$. Wie wir schon in der Nr. 312 (S. 206) erwähnt haben, folgt hieraus, dass ν, wenn es positiv ist, stets eine ganze Zahl sein muss; wir haben also das Resultat:

Im Falle (I) bleibt in $q(z)$ kein Parameter unbestimmt, und in der Normalgleichung (1) ist z stets eine rationale Function des Integralquotienten.

Im Falle (II) muss offenbar σ gleich Zwei oder gleich Drei sein.

Für $\sigma = 2$ ist $q(z)$ wiederum vollständig bestimmt, und wir haben die drei (beziehungsweise vier) in der Nr. 289 (S. 113) behandelten Fälle, wo R_0 oder F_0 als geradliniges Dreieck gewählt werden kann und in welchen z eine elliptische Function von η ist.

Für $\sigma = 3$ ergiebt sich als einzige Möglichkeit

$$g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = \frac{1}{2},$$

und $q(z)$ enthält, wenn $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_4 = \infty$ und a_3 willkürlich, aber gegeben ist, noch einen unbestimmten Parameter.

In diesem Falle ist, wie man leicht erkennt, die Differentialgleichung (1) im Wesentlichen diejenige, die wir in der Nr. 197 (Bd. II, 1, S. 256) als das Fuchs'sche Beispiel behandelt haben.

Es ergab sich daselbst, dass der in $q(z)$ willkürlich bleibende Parameter stets und zwar nur auf eine Weise so bestimmt werden kann, dass z als eindeutige Function von η erscheint, und zwar ist dann z im Wesentlichen auch eine elliptische Function von η.

Der Fall (II) liefert also nebst den bereits erledigten Fällen $\sigma = 2$, wo $q(z)$ vollkommen bestimmt ist, einen Fall, in welchem wir lernen, dass die Bestimmung des Parameters, der in $q(z)$ noch

willkürlich geblieben ist, stets und nur auf eine Weise so erfolgen kann, dass z eine eindeutige Function von η sei.

Ein analoges Resultat besteht nun in dem Falle, wo die Zahlen

$$g_1, g_2, \cdots g_{\sigma+1}$$

die Ungleichung (4) befriedigen. Herr Poincaré hat nämlich mit Hülfe der „Méthode de continuité“ den folgenden Satz bewiesen:

Wenn in einer normalen Differentialgleichung (1) nebst den die Ungleichung (4) befriedigenden Zahlen g_i noch die singulären Punkte

$$a_3, a_4, \cdots a_\sigma$$

willkürlich vorgeschrieben sind, so lassen sich die Coefficienten der ganzen Function $E_{\sigma-2}(z)$ in $q(z)$ stets und nur auf eine Weise so bestimmen, dass z eine Fuchs'sche Function des Integralquotienten η sei.

Aus diesem Satze, der die in der vorigen Nummer (S. 247) aufgeworfene Frage erledigt, folgt in Verbindung mit den für die Fälle (I), (II) bereits früher gefundenen Resultaten, dass in der That für jede Function

$$Y = F(z),$$

die nur eine endliche Anzahl von Verzweigungspunkten besitzt und die in der durch eine Curve, welche die Verzweigungspunkte untereinander verbindet, zerschnittenen z-Ebene eindeutig ist, ein Parameter η so gefunden werden kann, dass Y und z als eindeutige Functionen von η erscheinen.

Um jedoch die Möglichkeit einer solchen Darstellung zu erweisen, bedarf es nicht des Poincaré'schen Satzes in seiner vollen Allgemeinheit. Um dies einzusehen bemerken wir Folgendes.

Seien für eine gegebene Function Y von der angegebenen Beschaffenheit die Verzweigungspunkte

$$0, 1, a_3, a_4, \cdots a_\sigma, \infty$$

und die zu denselben gehörigen Zahlen $g_\varkappa$ gegeben; dann ist (1) die mit diesen Grössen gebildete normale Differentialgleichung.

Denken wir uns eine andere normale Differentialgleichung (1'), die nebst den singulären Punkten

$$0, 1, a_3, a_4, \cdots a_\sigma, \infty$$

eventuell noch gewisse andere singuläre Punkte

$$a_{\sigma+2}, a_{\sigma+3}, \cdots a_{\sigma+\tau+1}$$

besitzt, in welcher ferner die Differenz der Wurzeln der zu einem Punkte $a_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung für

$$\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma + 1$$

der reciproke Werth einer ganzen Zahl $\gamma_\varkappa$ ist, die ein Vielfaches von $g_\varkappa$ oder unendlich gross ist, während für $\varkappa > \sigma + 1$ diese Differenz eine beliebige reciproke ganze Zahl oder Null sein kann. Wir sagen dann (vergl. Nr. 303, S. 165) von der normalen Differentialgleichung (1'), sie sei der normalen Differentialgleichung (1) untergeordnet oder subordinirt.

Wir können z. B. eine normale Differentialgleichung, die die $\sigma + 1$ singulären Punkte

$$0, 1, a_3, \cdots a_\sigma, \infty$$

besitzt und deren determinirende Fundamentalgleichungen sämmtlich eine doppelte Würzel haben, stets als der Differentialgleichung (1) subordinirt ansehen, wenn in (1) einige der Zahlen g_i endliche ganzzahlige Werthe haben.

Gelingt es dann zu zeigen, dass sich in einer der Differentialgleichung (1) subordinirten normalen Differentialgleichung (1') die noch unbestimmt gebliebenen $\sigma + \tau - 2$ Parameter so bestimmen lassen, dass diese Differentialgleichung eine Fuchs'sche wird, so sind offenbar für die Function

$$Y = F(z)$$

Y und z auch eindeutige Functionen des Integralquotienten dieser Fuchs'schen Differentialgleichung.

Wenn in einer Fuchs'schen Differentialgleichung alle determinirenden Fundamentalgleichungen doppelte Wurzeln haben, so sind in dem Fundamentalbereiche R_0 der entsprechenden Fuchs'schen Gruppe ϑ alle Winkel gleich Null, die Ecken aller Bereiche, die aus R_0 durch die Substitutionen von ϑ hervorgehen, liegen auf der Peripherie des Einheitskreises, und die unabhängige Variable z, die eine Fuchs'sche Function des Integralquotienten ist, hat die charakteristische Eigenschaft, innerhalb des Bereiches, wo sich diese Function wie eine rationale Function verhält, keinen der Werthe annehmen zu können, der einem singulären Punkte der betrachteten Fuchs'schen Differentialgleichung entspricht. Wir sagen dann (vergl. Nr. 303, S. 166), diese Fuchs'sche Function lasse die gedachten Werthe aus.

Es wird also hinreichend sein, wenn wir zeigen, dass stets eine Fuchs'sche Function hergestellt werden kann, die die beliebig vorgeschriebenen Werthe

$$a_1, a_2, a_3, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1},$$

wo wir, ohne die Allgemeinheit zu beschränken,

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{\sigma+1} = \infty$$

nehmen können, und eventuell auch noch gewisse andere Werthe

$$a_{\sigma+2}, \cdots a_{\tau+\sigma+1}$$

auslässt.

327. Beweis, dass eine normale Differentialgleichung nicht auf zwei Arten zu einer Fuchs'schen gemacht werden kann.

Ehe wir auf den am Schlusse der vorigen Nummer in Aussicht gestellten Nachweis eingehen, möge erst gezeigt werden, dass allgemein für eine beliebige normale Differentialgleichung (1), wo die $g_\varkappa$ der Ungleichung (4) Genüge leisten, die Bestimmung der Coefficienten von $E_{\sigma-2}(z)$ bei fester Wahl der $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ nicht auf zwei verschiedene Weisen so erfolgen kann, dass die Differentialgleichung eine Fuchs'sche wird.

Nehmen wir an, es sei für eine bestimmte Wahl der Coefficienten von $E_{\sigma-2}(z)$ die Function $q(z)$ gleich $q_1(z)$, für eine andere Wahl dieser Coefficienten gleich $q_2(z)$, und mögen die beiden Differentialgleichungen

$$(5) \qquad \frac{d^2y}{dz^2} = q_1(z)y, \qquad \frac{d^2y}{dz^2} = q_2(z)y$$

Fuchs'sche sein. Wir bezeichnen den Integralquotienten der ersten Gleichung durch η, den der zweiten durch ζ und denken uns η, ζ so gewählt, dass für beide Fuchs'sche Functionen

$$z = f_1(\eta), \qquad z = f_2(\zeta)$$

der Orthogonalkreis der Einheitskreis der η- beziehungsweise ζ-Ebene sei, dass ferner η und ζ gleichzeitig verschwinden, so dass etwa

$$a = f_1(0), \qquad a = f_2(0)$$

ist, wo a einen regulären Punkt beider Differentialgleichungen (5) bedeutet, und dass endlich für einen anderen ebenfalls regulären Punkt $z = b$ sowohl η als auch ζ reale Werthe annehmen.

Die Gruppen ϑ_1, ϑ_2, die zu den beiden Fuchs'schen Functionen $f_1(\eta)$, $f_2(\zeta)$ gehören, sind holoedrisch isomorph, die entsprechenden Fundamentalbereiche R_0^1 und R_0^2 sind beide eindeutig conforme Ab-

bildungen der in passender Weise zerschnittenen z-Ebene. Wir schliessen hieraus, dass η, ζ gegenseitig eindeutige Functionen von einander sind, so lange diese beiden Grössen innerhalb des Einheitskreises verbleiben.

Betrachten wir den Quotienten

$$\frac{\zeta}{\eta},$$

so ist derselbe sowohl als Function von η als auch als Function von ζ aufgefasst eindeutig innerhalb des Einheitskreises der betreffenden Variabeln, und bleibt überdies, da ζ, η gleichzeitig verschwinden, daselbst stets endlich und von Null verschieden.

Zerlegen wir z. B. η in seinen realen und imaginären Theil

$$\eta = u + vi$$

und fassen den Quotienten von ζ und η als Function von η auf, so wird der Ausdruck

$$t = \log \left| \frac{\zeta}{\eta} \right|$$

eine in dem Bereiche

$$u^2 + v^2 < 1$$

eindeutige, endliche und stetige Function der beiden realen Variabeln u, v sein, die überdies, da t den realen Theil der monogenen Function

$$\log \frac{\zeta}{\eta}$$

darstellt, der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} = 0 \tag{6}$$

Genüge leistet.

Betrachten wir in der η-Ebene einen Kreis

$$u^2 + v^2 = r^2,$$

dessen Radius r kleiner ist als Eins. Wenn η auf der Peripherie dieses Kreises verbleibt, ist ζ dem absoluten Betrage nach stets kleiner wie Eins, und folglich

$$t < \log \frac{1}{r}. \tag{7}$$

Nach einem bekannten Satze kann aber eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (6), die innerhalb eines von einer geschlossenen Curve C begrenzten Bereiches eindeutig, endlich und stetig ist, im Innern dieses Bereiches keinen Werth annehmen der grösser ist, als der grösste Werth, den die Function auf der Begrenzung C erhält. Die Ungleichung (7) gilt folglich für alle Werthe

$$u^2 + v^2 < r^2.$$

Lassen wir nun r gegen die Einheit convergiren, dann ist

$$\lim_{r=1} \log \frac{1}{r} = 0;$$

wir schliessen also, dass t niemals positiv sein kann, wenn η im Innern des Einheitskreises verbleibt. Es ist also für $|\eta| < 1$ jedenfalls

$$\left|\frac{\zeta}{\eta}\right| \leqq 1.$$

Da η und ζ einander ganz gleichberechtigt gegenüberstehen, folgt ebenso, dass für $|\zeta| < 1$ auch

$$\left|\frac{\eta}{\zeta}\right| \leqq 1$$

sein muss. Wir haben also für

$$|\eta| < 1, \qquad |\zeta| < 1$$

nothwendig die Gleichung

$$|\eta| = |\zeta|,$$

also

$$\eta = e^{\tau i} \zeta$$

wo τ eine reale Constante bedeutet.

Da aber η, ζ für $z = b$ gleichzeitig reale Werthe annehmen sollten, muss $\tau = 0$ sein, d. h. es ist

$$\eta = \zeta,$$

so dass in der That die beiden Differentialgleichungen (5) identisch sein müssen. D. h.:

Wenn bei gegebenen g_i und a_i die Coefficienten von $E_{\sigma-2}(z)$ so bestimmt werden können, dass die normale Differentialgleichung (1) eine Fuchs'sche wird, so ist diese Bestimmung auch nur auf eine einzige Weise möglich.

328. Erläuterung der „Méthode de continuité" an einem einfachen Beispiele.

Wir wollen nun die „Méthode de continuité", deren sich Herr Poincaré zum Beweise seines in der Nr. 326 (S. 251) angeführten Satzes bedient, an einem einfachen Beispiele zu erläutern suchen, um eine Vorstellung von dieser tiefen und wichtigen Methode zu erlangen.

Wir betrachten den Fall, wo die gegebenen Werthe

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$$

real sind. Wenn dann die normale Differentialgleichung (1) durch geeignete Wahl der Coefficienten von $E_{\sigma-2}(z)$ zu einer Fuchs'schen

gemacht werden kann, so ist leicht einzusehen, dass die entsprechende Fuchs'sche Gruppe ϑ eine symmetrische sein müsse. Dann sind also (Nr. 320, S. 231) in $q(z)$ alle Coefficienten real, d. h. die Coefficienten von $E_{\sigma-2}(z)$ selbst sind reale Grössen.

Für $\sigma = 2$ ist $q(z)$ vollkommen bestimmt. Der nächste Fall $\sigma = 3$ ist also der einfachste, für den der Poincaré'sche Satz überhaupt in Betracht kommt.

Nehmen wir also $\sigma = 3$, d. h. nebst

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_4 = \infty$$

noch einen Punkt a_3, und zwar möge a_3 ein realer zwischen 1 und ∞ gelegener Werth sein.

Die Zahlen g_1, g_2, g_3, g_4 mögen sämmtlich unendlich gross gewählt werden, es handelt sich darum zu zeigen, dass es eine Fuchs'sche Function giebt, die die Werthe $0, 1, a_3, \infty$ auslässt.

Betrachten wir in der η-Ebene ein Viereck mit den auf dem Einheitskreise gelegenen Ecken $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, dessen Seiten Kreise sind, die den Einheitskreis rechtwinkelig schneiden. Wir construiren das Spiegelbild dieses Vierecks etwa in Bezug auf die Seite (μ_1, μ_4) und vereinigen dasselbe mit dem ursprünglichen Vierecke zu einem Bereiche R_0, der dann den Fundamentalbereich einer gewissen symmetrischen Fuchs'schen Gruppe $\bar{\vartheta}$ darstellt.

Sei

$$x = \varphi(\eta)$$

diejenige zur Gruppe $\bar{\vartheta}$ gehörige Fuchs'sche Function, die die eindeutig conforme Abbildung des Viereckes $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ auf die untere x-Halbebene darstellt und die in den Punkten μ_1, μ_2, μ_4 die Werthe

$$0 = \varphi(\mu_1), \quad 1 = \varphi(\mu_2), \quad \infty = \varphi(\mu_4)$$

annimmt. Setzen wir dann

$$\varphi(\mu_3) = c,$$

so ist c real positiv und grösser wie Eins.

Die Function η von x ist dann der Integralquotient einer linearen Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \bar{q}(x)\,y, \tag{8}$$

wo $\bar{q}(x)$ eine rationale Function bedeutet, die aus dem Ausdrucke (2) (Nr. 325, S. 246) hervorgeht, wenn man daselbst x an Stelle von z schreibt und

$$\sigma = 3,\quad a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = c,\quad g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = 0$$

nimmt; in

$$E_{\sigma-2}(x) = x + \tau$$

hat der constante Parameter τ einen bestimmten Werth.

Es handelt sich darum zu zeigen, dass wir die Ecken $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ des Vierecks als Punkte des Einheitskreises so wählen können, dass

$$c = \varphi(\mu_3)$$

gleich dem willkürlich vorgeschriebenen zwischen 1 und ∞ gelegenen realen Werthe a_3 wird.

Lassen wir die drei Ecken μ_1, μ_2, μ_4 fest (vergl. Fig. 32), und denken wir uns μ_3 auf dem Bogen (μ_2, μ_4) veränderlich, so hängt die Function x der Variabeln η von dem veränderlichen Parameter μ_3 ab. Mit μ_3 ändert sich auch die Gruppe ϑ, und zwar sind die verschiedenen Gruppen, welche verschiedenen Werthen von μ_3 entsprechen, offenbar holoedrisch isomorph.

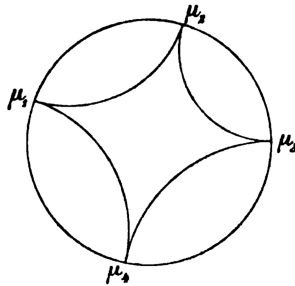


Fig. 32.

Nach dem Satze der Nr. 309 (S. 192) sind die zur Gruppe ϑ gehörigen Fuchs'schen Thetafunctionen stetige Functionen des Parameters μ_3; also ist auch die Function $\varphi(\eta)$ eine stetige Function von μ_3, und folglich hängt auch der Werth c, den diese Function für $\eta = \mu_3$ annimmt, stetig von dem Parameter μ_3 ab.

Lassen wir μ_3 mit μ_2 oder μ_4 zusammenfallen, so verwandelt sich das Viereck, von welchem wir ausgegangen waren, in ein Dreieck. Die Untersuchung dieser Grenzfälle bildet einen wesentlichen Theil der Poincaré'schen Methode.

Herr Poincaré zeigt, dass wenn μ_3 auf der Peripherie des Einheitskreises verbleibend in den Punkt μ_2 einrückt,

$$\lim_{\mu_3=\mu_2} \varphi(\mu_3) = \lim_{\mu_3=\mu_2} c = 1,$$

und wenn μ_3 ebenso in den Punkt μ_4 einrückt,

$$\lim_{\mu_3=\mu_4} \varphi(\mu_3) = \lim_{\mu_3=\mu_4} c = \infty$$

wird.

Nach dem in der vorigen Nummer bewiesenen Satze kann nicht für zwei von einander verschiedene Werthe von μ_3, die auf dem Einheitskreise zwischen μ_2, μ_4 liegen, die Grösse c denselben Werth annehmen.

Wir haben also eine stetige Function c von μ_3, die, wenn μ_3 auf dem Einheitskreise von μ_2 bis μ_4 geht, jeden Werth nur einmal annimmt, für $\mu_3 = \mu_2$ gleich Eins und für $\mu_3 = \mu_4$ gleich Unendlich wird. Nach einem bekannten Satze muss diese Function folglich jeden zwischen Eins und Unendlich gelegenen Werth einmal und nur einmal annehmen, während μ_3 den zwischen μ_2 und μ_4 gelegenen Bogen des Einheitskreises durchläuft.

Damit ist also der Poincaré'sche Satz (Nr. 326, S. 251) in dem hier betrachteten besonderen Falle bewiesen. Aehnlich lässt sich der Beweis für den Fall beliebig vieler realer $a_3, a_4, \cdots a_\sigma$ und beliebiger der Ungleichung (4) (Nr. 326, S. 249) genügender g_x führen. Wesentlich schwieriger ist die Anwendung der „Méthode de continuité" im allgemeinen Falle nicht realer Werthe der

$$a_3, a_4, \cdots a_\sigma;$$

wir müssen es uns versagen, auf eine Darlegung des Verfahrens einzugehen, mit Hülfe dessen Herr Poincaré diese Schwierigkeiten überwunden hat.

329. Untergruppen mit endlichem Quotienten von Fuchs'schen Gruppen.

Wir wollen nun eine andere Methode entwickeln, die in dem Falle realer Werthe der $a_3, a_4, \cdots a_\sigma$ und für unendlich grosse g_x nicht nur einen Beweis des Poincaré'schen Theorems liefert, sondern auch lehrt, wie man die Fuchs'sche Function, welche die Werthe

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_3, a_4, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1} = \infty$$

auslässt, wirklich herzustellen im Stande ist. Diese Methode stützt sich auf die Theorie der Untergruppen oder, wie man auch sagen kann, auf die Theorie der Transformation der Fuchs'schen Functionen; wir müssen daher jetzt Einiges aus den Grundzügen dieser Theorie entwickeln.

Es sei eine Fuchs'sche Gruppe ϑ von der in den ersten Kapiteln des vorigen Abschnittes behandelten Art durch ihren Fundamentalbereich R_0 gegeben, die Substitutionen von ϑ seien

$$S_0 = 1, S_1, S_2, \cdots,$$

insbesondere möge $S_x (x = 1, 2, \cdots \sigma)$ diejenige Substitution bedeuten, die die Seite t_x von R_0 in die congruente t_x' überführt. Ferner sei

$$z = f(\eta)$$

eine zur Gruppe ϑ gehörige Fuchs'sche Function, die innerhalb R_0 jeden Werth nur ein einziges Mal annimmt, durch welche sich also jede zur Gruppe ϑ gehörige Fuchs'sche Function rational ausdrücken lässt. Die Werthe, welche z in den Eckpunkten

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_{\sigma+1}$$

von R_0 annimmt, bezeichnen wir wie gewöhnlich mit

$$(1) \qquad a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}.$$

Wir gelangen auf die einfachste Weise zu derjenigen Art von Untergruppen der Gruppe ϑ, die uns hier am meisten interessirt, indem wir eine algebraische Function Z von z betrachten, die sich nur in den Punkten (1) der z-Ebene verzweigt, und die folglich nach dem Poincaré'schen Principe als eindeutige Function von η

$$Z = F(\eta)$$

dargestellt werden kann, wenn, wie wir voraussetzen wollen, die Ordnungszahlen der dem Punkte $a_\varkappa$ entsprechenden Windungspunkte in der die Verzweigung von Z darstellenden Riemann'schen Fläche T in der zu $a_\varkappa$ gehörigen Zahl $g_\varkappa$ als Divisoren enthalten sind.

Betrachten wir ein System von geschlossenen Wegen in der z-Ebene, die so beschaffen sind, dass beim Durchlaufen derselben alle Zweige der algebraischen Function Z von z zum Vorschein kommen, dann entsprechen diesen Wegen gewisse Substitutionen

$$T_1, T_2, \cdots T_{n-1}$$

der Gruppe ϑ, und wir haben folglich in den n Ausdrücken

$$(2) \qquad Z_\varkappa = F(T_\varkappa \eta) \quad (\varkappa = 0, 1, \cdots n-1),$$

woselbst

$$T_0 = 1, \qquad Z_0 = Z = F(\eta)$$

gesetzt wurde, die sämmtlichen Wurzeln der irreductiblen algebraischen Gleichung n-ten Grades mit in z rationalen Coefficienten

$$(3) \qquad \Phi(Z, z) = 0,$$

der Z als Function von z genügt.

Die Function $F(\eta)$ bleibt bei gewissen Substitutionen der Gruppe ϑ ungeändert; diese Substitutionen bilden offenbar eine Gruppe Θ, also eine Untergruppe von ϑ. Die Gruppe Θ ist im Sinne der allgemeinen in der Nr. 322 (S. 236) aufgestellten Definition eine Fuchs'sche, sie ist aber im Allgemeinen nicht vom Geschlechte Null, wie ϑ.,

Setzen wir

$$Z_\varkappa = F(T_\varkappa \eta) = F_\varkappa(\eta) \qquad (\varkappa=0,1,\cdots n-1),$$

so ist offenbar, wenn Σ irgend eine Substitution von Θ bedeutet,

$$F_\varkappa(\eta) = F(\Sigma T_\varkappa \eta) = F(T_\varkappa T_\varkappa^{-1} \Sigma T_\varkappa \eta) = F_\varkappa(T_\varkappa^{-1} \Sigma T_\varkappa \eta),$$

und umgekehrt ist jede Substitution von ϑ, die $F_\varkappa(\eta)$ ungeändert lässt, in der Form

$$T_\varkappa^{-1} \Sigma T_\varkappa$$

darstellbar. Die Substitutionen von ϑ, welche $F_\varkappa(\eta)$ ungeändert lassen, bilden folglich die mit Θ innerhalb ϑ gleichberechtigte Untergruppe (Nr. 140, Bd. II, 1, S. 36)

$$\Theta_\varkappa = T_\varkappa^{-1} \Theta T_\varkappa.$$

Betrachten wir nun eine beliebige Substitution S von ϑ und bilden

$$F(S\eta),$$

so muss, da die Anwendung der Substitution S auf η einem geschlossenen Wege der Variabeln z entspricht,

$$F(S\eta) = F_\varkappa(\eta)$$

sein, wo $\varkappa$ eine bestimmte der Zahlen $0, 1, \cdots n-1$ bedeutet. Wir haben also

$$F(S\eta) = F(T_\varkappa \eta),$$

d. h. die Substitution

$$S T_\varkappa^{-1} = \Sigma$$

gehört der Gruppe Θ an, denn sie lässt $F(\eta)$ ungeändert und ist in ϑ enthalten.

Die beliebige Substitution S von ϑ ist also in der Form

$$S = \Sigma T_\varkappa$$

darstellbar.

Wir können demnach

$$(4) \qquad \vartheta = \Theta(1, T_1, T_2, \cdots T_{n-1})$$

setzen, wo das symbolische Product auf der rechten Seite andeutet, dass jede Substitution von Θ mit jeder der Substitutionen

$$(5) \qquad 1, T_1, T_2, \cdots T_{n-1}$$

zu componiren ist. Wir nennen das System der Substitutionen (5) den Quotienten der Untergruppe Θ in Bezug auf ϑ (vergl. Nr. 275, S. 66),

und sagen, da dieser Quotient aus einer endlichen Anzahl von Substitutionen besteht, Θ sei eine Untergruppe mit endlichem Quotienten von ϑ.

Wir können uns die Substitutionen (5) so gewählt denken, dass die Bereiche

$$R_\varkappa = T_\varkappa R_0 \qquad (\varkappa=1,2,\cdots n-1),$$

die aus dem Fundamentalbereiche R_0 durch Anwendung dieser Substitutionen hervorgehen, mit R_0 zusammengenommen ein zusammenhängendes Gebiet P_0 bilden. Dieses Gebiet spielt für die Untergruppe Θ die Rolle des Fundamentalbereiches, die Ecken von P_0 vertheilen sich in Cykeln, und die Winkelsumme bei den Ecken eines Cyklus ist, da die Gruppe Θ eine discontinuirliche ist, gleich einem aliquoten Theile von 2π.

330. Vereinigung mehrerer Bereiche zu einem Fundamentalbereiche. Untergruppen vom Geschlechte Null.

Wir betrachten nun umgekehrt eine gewisse Anzahl von Bereichen der der Gruppe ϑ entsprechenden Theilung des Innern des Einheitskreises, die mit R_0 zusammengenommen ein zusammenhängendes Gebiet P_0' bilden; seien

(6) $$R_0,\ R_1',\ R_2',\ \cdots R_{n-1}'$$

diese Bereiche, und bedeute $T_\varkappa'$ die Substitution von ϑ, welche R_0 in $R_\varkappa'$ überführt. Dann werden von den Seiten der Bereiche (6) gewisse frei geblieben sein, d. h. längs einiger dieser Seiten stösst der Bereich P_0' an Bereiche der der Gruppe ϑ entsprechenden Theilung, die von den Bereichen (6) verschieden sind. Diese Seiten bilden die Begrenzung von P_0'.

Sei t_i irgend eine Seite von R_0, t_i' die ihr congruente; also

$$t_i' = S_i t_i,$$

bedeute ferner $t_{i\varkappa}$ die dem t_i entsprechende Seite von $R_\varkappa'$ und $t_{i\varkappa}'$ die dem t_i' entsprechende Seite von $R_\varkappa'$, also

$$t_{i\varkappa} = T_\varkappa t_i, \quad t_{i\varkappa}' = T_\varkappa t_i',$$

dann werden von den Seiten

$$t_i,\ t_{i1},\ t_{i2},\ \cdots t_{i,n-1}$$

eine gewisse Anzahl, etwa ν_i, frei geblieben sein. Offenbar sind dann auch genau ν_i von den Seiten

$$t_i',\ t_{i1}',\ t_{i2}',\ \cdots t_{i,n-1}'$$

frei.

Wir können dann einer beliebigen der frei gebliebenen Seiten $t_{i\varkappa}$ eine beliebige der frei gebliebenen Seiten, deren erster Index ebenfalls gleich i ist, etwa $t'_{i\varkappa}$, zuordnen, und so ν_i Seitenpaare von P_0' erhalten. Auf diese Weise erscheinen die Seiten von P_0' einander paarweise zugeordnet; möge der Seite $\tau_\varkappa$ von P_0' die Seite $\tau'_\varkappa$ entsprechen, für

$$\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma_1; \quad \sigma_1 = \sum_{i=1}^{\sigma} \nu_i.$$

Die Ecken von P_0' mögen dann in folgender Weise angeordnet werden.

Denken wir uns die Begrenzung von P_0' in einem bestimmten Sinne, also etwa so durchlaufen, dass die Fläche von P_0' zur Linken bleibt. Wir gehen von einer Ecke $\lambda_1^{(1)}$ von P_0' aus, durchlaufen in dem angegebenen Sinne die in $\lambda_1^{(1)}$ einmündende Seite von P_0', dann in demselben Sinne die dieser Seite entsprechende und kommen auf diese Weise zu einer zweiten Ecke $\lambda_2^{(1)}$ von P_0'. Dann durchlaufen wir wiederum die in $\lambda_2^{(1)}$ einmündende Seite, dann ihre entsprechende, kommen so zu einer dritten Ecke $\lambda_3^{(1)}$ von P_0' und fahren so fort, bis wir zu der Ausgangsecke $\lambda_1^{(1)}$ zurückgekehrt sind, was offenbar nach einer endlichen Anzahl von Wiederholungen des angegebenen Vorganges eintreten muss. Die so der Reihe nach berührten Ecken

$$\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \lambda_3^{(1)}, \cdots$$

fassen wir in einen Cyklus zusammen.

Wir sehen, dass sich die Ecken von P_0' auf diese Weise in Cykeln vertheilen.

Es möge nun vorausgesetzt werden, dass für jeden der so gewonnenen Cykeln die Summe der Winkel von P_0' ein aliquoter Theil von 2π sei.

Dann bilden die Substitutionen $\Sigma_\varkappa$, welche die Seiten $\tau_\varkappa$ von P_0' in ihre entsprechenden $\tau_\varkappa'$ verwandeln, mit ihren inversen $\Sigma_\varkappa^{-1}$ die Basis einer Gruppe Θ', für welche P_0' die Rolle des Fundamentalbereiches spielt, und diese Gruppe Θ' ist eine Untergruppe von ϑ, also selbst wieder eine Fuchs'sche Gruppe.

Denken wir uns den Bereich P_0' ausgeschnitten und derart deformirt, dass jede Seite $\tau_\varkappa$ mit ihrer entsprechenden $\tau_\varkappa'$ so zusammenfällt, dass correspondirende Punkte zur Deckung gelangen, so vereinigen sich die in einen Cyklus zusammengefassten Ecken von P_0' in einem Punkte. Die so entstehende geschlossene Fläche $\overline{P_0'}$ ist im Allgemeinen von höherem als einfachem Zusammenhange, sei ihr Zusammenhang ein $(2\varrho + 1)$-facher.

Diese Fläche $\bar{P}_0'$ denken wir uns nun auf die z-Ebene in folgender Weise abgebildet. Wir markiren in jedem Punkte von $\bar{P}_0'$ denjenigen η-Werth, der vor der Deformation von P_0' durch den betreffenden Punkt dargestellt wurde, und bestimmen nun die Gesammtheit der z-Werthe, die diesen η-Werthen vermöge der Function

$$z = f(\eta)$$

entsprechen. Diese Gesammtheit bildet eine Fläche, welche die z-Ebene offenbar genau n-fach überdeckt und die eine unzerschnittene ist, da ja z in correspondirenden Punkten der Seiten $\tau_\varkappa$, $\tau_\varkappa'$ von P_0' denselben Werth annimmt. Diese n-blättrige Fläche T' ist als eindeutig conforme Abbildung von $\bar{P}_0'$ eine $(2\varrho + 1)$-fach zusammenhängende und besitzt nur die Punkte $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$, die den Ecken der Bereiche (6), aus denen sich P_0' zusammensetzt, entsprechen, zu Windungspunkten.

Denken wir uns nun eine Function Z' von z, die auf dieser n-blättrigen Fläche T' eine eindeutige Function des Ortes ist und jeden Werth nur in einer endlichen Anzahl von Stellen annimmt, so ist diese Function eine algebraische Function von z und eine eindeutige Function von η

$$Z' = F'(\eta).$$

Diese Function bleibt offenbar bei den Substitutionen der Gruppe Θ' ungeändert, ist also eine zu dieser Untergruppe von ϑ gehörige Fuchs'sche Function, und zwar eine solche Function vom Geschlechte ϱ.

Die Gruppe Θ' ist eine Untergruppe mit endlichem Quotienten von ϑ; wir haben nämlich offenbar

$$\vartheta = \Theta'(1,\ T_1',\ T_2',\ \cdots\ T_{n-1}'),$$

und die Ausdrücke

$$Z_\varkappa' = F'(T_\varkappa'\eta) \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n-1)$$

stellen die sämmtlichen Zweige der algebraischen Function Z' von η dar.

Wir kommen also, sowohl wenn wir von einer algebraischen Function von z, die in η eindeutig ist, ausgehen, als auch wenn wir eine endliche Anzahl der Bereiche der durch die Gruppe ϑ bestimmten Theilung zu einem neuen Bereiche P_0 zusammenfassen, zu Untergruppen mit endlichem Quotienten von ϑ, und zwar können wir offenbar auf beide Arten zu jeder beliebigen solchen Untergruppe gelangen.

Von besonderer Wichtigkeit für uns ist der Fall, wo die Untergruppe mit endlichem Quotienten selbst wieder eine Fuchs'sche Gruppe von derselben Beschaffenheit wie ϑ, d. h. also eine Fuchs'sche Gruppe vom Geschlechte Null ist.

Um zu einer solchen Untergruppe Θ' zu gelangen, hat man die Bereiche (6) nur so zu wählen und die Zuordnung der frei gebliebenen Seiten in entsprechende Paare nur so einzurichten, dass der Bereich P_0' in Bezug auf die Vertheilung seiner Ecken in Cykeln die für den Bereich R_0 vorausgesetzte Beschaffenheit besitzt. Bedeutet dann Z eine zu der Gruppe Θ' gehörige Fuchs'sche Function, welche innerhalb des Fundamentalbereiches P_0' jeden Werth nur ein einziges Mal annimmt, so lässt sich jede zur Gruppe Θ' gehörige Fuchs'sche Function rational durch Z' darstellen.

Nun ist offenbar

$$z = f(\eta)$$

eine eindeutige Function von η, die bei den Substitutionen von Θ' ungeändert bleibt, denn z bleibt ja bei allen Substitutionen von ϑ ungeändert, und Θ' ist in ϑ als Untergruppe enthalten. Ferner nimmt z innerhalb eines jeden der Bereiche (6) jeden Werth nur einmal an, also erhält z innerhalb P_0' jeden Werth genau n Male, wenn n die Anzahl der Bereiche (6) angiebt. Es ist also z eine zur Gruppe Θ' gehörige Fuchs'sche Function und folglich eine rationale Function

$$z = \mathfrak{R}_1(Z') \tag{7}$$

von Z'.

Da zu jedem Werthe von z genau n Werthe von η innerhalb P_0' gehören und da Z' innerhalb P_0' jeden Werth nur ein einziges Mal annimmt, gehören zu jedem Werthe von z genau n im Allgemeinen von einander verschiedene Werthe von Z', die nur für diejenigen z-Werthe, welche Ecken der Bereiche (6) entsprechen, d. h. für die Punkte

$$z = a_1,\ a_2,\ \cdots a_{\sigma+1}$$

theilweise zusammenfallen können.

D. h.: Die Gleichung (7) stellt eine algebraische Gleichung n-ten Grades für Z' als Function von z dar, und die Coefficienten dieser Gleichung sind lineare Functionen von z. Diese Gleichung ist also vom Range Null.

Wenn Z' eine Fuchs'sche Function bedeutet, die zu einer Untergruppe mit endlichem Quotienten Θ' von ϑ gehört, die ebenfalls eine Fuchs'sche Gruppe vom Geschlechte Null ist, und wenn Z' innerhalb des Fundamentalbereiches P_0' von Θ' jeden Werth nur ein einziges Mal annimmt, so sagen wir, die Fuchs'sche Function Z' gehe aus der Fuchs'schen Function z durch eine rationale Transformation und zwar durch eine solche Transformation vom n-ten Grade hervor,

wenn P_0' durch Vereinigung von n Bereichen der der Gruppe ϑ entsprechenden Theilung des Einheitskreises entstanden ist.

Wenn man die Bereiche (6) kennt, so hat es keine Schwierigkeit die Riemann'sche Fläche anzugeben, die die Verzweigung der algebraischen Function Z' von z darstellt. Wir werden dies im folgenden Kapitel an einigen Beispielen erläutern.

331. Ausgezeichnete Untergruppen. Beziehungen zur Galois'schen Theorie der algebraischen Gleichungen.

Indem wir auf die Bezeichnungen der Nr. 329 zurückgreifen, wollen wir zunächst kurz den Fall betrachten, wo die Untergruppe Θ, die zu der algebraischen Function Z von z gehört, in der Gruppe ϑ als ausgezeichnete Untergruppe enthalten ist.

In diesem Falle ist Θ mit jeder Substitution von ϑ vertauschbar, und folglich

$$\Theta_x = T_x^{-1} \Theta T_x = \Theta \qquad (x=1, 2, \cdots n-1).$$

Die sämmtlichen Zweige

$$Z_0, Z_1, \cdots Z_{n-1}$$

der algebraischen Function Z von z sind also Fuchs'sche Functionen von η, die bei den Substitutionen derselben Gruppe Θ ungeändert bleiben, und hieraus folgt (Nr. 323, S. 241), dass diese sämmtlichen Zweige durch einen derselben und durch z rational mit constanten Coefficienten dargestellt werden können. Die Gleichung (3) der Nr. 329 (S. 259), welche die algebraische Function Z von z definirt, ist demnach im Sinne der von Kronecker eingeführten Terminologie eine Galois'sche.

Aus diesen Bemerkungen können wir in dem allgemeinen Falle, wo die Gruppe Θ keine ausgezeichnete Untergruppe von ϑ ist, einige wichtige Folgerungen ziehen. Betrachten wir nämlich die mit Θ innerhalb ϑ gleichberechtigten Untergruppen

$$\Theta_x = T_x^{-1} \Theta T_x \qquad (x=1, 2, \cdots n-1),$$

und sei S eine beliebige Substitution von ϑ. Dann ist S entweder in Θ enthalten, oder es wird der Zweig Z_0 unserer algebraischen Function Z von z durch Anwendung von S auf η in einen anderen Zweig, etwa Z_i, dieser Function übergeführt. Im letzteren Falle ist die Gruppe

$$S^{-1} \Theta S$$

diejenige, deren Substitutionen den Zweig Z_i ungeändert lassen, d. h. nichts anderes wie Θ_i. Wenn wir also die Gruppe Θ durch irgend eine Substitution von ϑ transformiren, so erhalten wir immer nur eine der Gruppen

$$\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \cdots \Theta_{n-1},$$

d. h. diese Gruppen sind die sämmtlichen mit Θ innerhalb ϑ gleichberechtigten Untergruppen.

Betrachten wir nun die Gesammtheit der Substitutionen, die den Gruppen

$$\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \cdots \Theta_{n-1}$$

gleichzeitig angehören, so bildet diese Gesammtheit offenbar ebenfalls eine Gruppe, also eine Untergruppe T von ϑ.

Seien $\alpha_0, \alpha_1, \cdots \alpha_{n-1}$ unbestimmte, aber von z unabhängige Grössen, dann ist

$$V = \alpha_0 Z_0 + \alpha_1 Z_1 + \cdots + \alpha_{n-1} Z_{n-1}$$

die zu der algebraischen Gleichung (3) gehörige empfindliche Function (Nr. 148, Bd. II, 1, S. 61). Da die Gruppe T aus der Gesammtheit derjenigen Substitutionen von ϑ besteht, die jeden Zweig der algebraischen Function Z von z ungeändert lassen, stellt offenbar T genau diejenige Gruppe dar, bei deren Substitutionen die Function V von η ihren Werth nicht verändert, d. h. V ist eine zu der Gruppe T gehörige Fuchs'sche Function von η, und da V überdies eine algebraische Function von z ist, so ist T eine Untergruppe mit endlichem Quotienten von ϑ.

Durch alle möglichen Umläufe, die die Variable z in ihrer Ebene vollzieht, erfahren die Zweige

$$Z_0, Z_1, \cdots Z_{n-1}$$

gewisse Permutationen, deren Gesammtheit die Galois'sche Gruppe γ der Gleichung (3) constituirt, wenn man als Rationalitätsbereich den Bereich der rationalen Functionen von z mit willkürlichen constanten Coefficienten zu Grunde legt. Durch Anwendung dieser Permutationen in dem Ausdrucke für V verwandelt sich diese Function in die sämmtlichen Zweige derjenigen irreductiblen Gleichung mit in z rationalen Coefficienten, der V Genüge leistet, und diese Gleichung ist dann nichts Anderes, wie der in dem angegebenen Rationalitätsbereiche irreductible Factor der zu der algebraischen Gleichung (3) gehörigen Galois'schen Resolvente. Sei

$$1, U_1, U_2, \cdots U_{\nu-1}$$

ein System von Substitutionen der Gruppe ϑ, bei deren Anwendung

auf η die sämmtlichen Zweige der algebraischen Function V von z zum Vorschein kommen, so ist also

$$\vartheta = \mathsf{T}(1, U_1, U_2, \cdots U_{\nu-1}),$$

und ν ist die Ordnung der zur Gleichung (3) gehörigen Galois'schen Gruppe γ, d. h. die Anzahl der in γ enthaltenen Permutationen, die ihrerseits eindeutig den Substitutionen

$$1, U_1, U_2, \cdots U_{\nu-1}$$

zugeordnet sind.

Da irgend eine Substitution S von ϑ auf η angewandt nur eine Permutation der Zweige

$$Z_0, Z_1, \cdots Z_{n-1}$$

bewirken kann, während die Substitutionen von T alle diese Zweige ungeändert lassen, so verwandelt sich jede Substitution von T durch Transformation mit S wieder in eine Substitution, die alle Zweige der Function Z von z ungeändert lässt, d. h. wieder in eine Substitution von T; wir haben also

$$S^{-1}\mathsf{T}S = \mathsf{T},$$

d. h. T ist eine ausgezeichnete Untergruppe von ϑ. Aus den oben gemachten Bemerkungen über ausgezeichnete Untergruppen folgt daher in Uebereinstimmung mit einem bekannten Satze der Algebra, dass die Gleichung, der V als Function von z genügt, die Eigenschaft besitzt, dass jede ihrer Wurzeln durch eine derselben und durch z rational ausgedrückt werden kann, d. h. dass diese Gleichung eine Galois'sche ist. Da ferner jedes Z_x als Function von η durch die Substitutionen von T nicht verändert wird, ist auch jeder Zweig der algebraischen Function Z von z eine rationale Function von V und z mit constanten Coefficienten.

Zweites Kapitel.

332. Behandlung einer speciellen Untergruppe vom Geschlechte Null.

Sei die Gruppe ϑ so beschaffen, dass die sämmtlichen Winkel ihres Fundamentalbereiches R_0 gleich Null sind. Es ist also

$$g_\varkappa = \infty \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma + 1),$$

und die Substitutionen S von ϑ befriedigen demnach keine Relation (Nr. 308, S. 188).

Wir denken uns dann die sämmtlichen Bereiche

$$R_{\pm\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma),$$

die den Fundamentalbereich R_0 kranzförmig umgeben, mit R_0 zu einem Bereiche $P_0^{(1)}$ vereinigt. Diese Bereiche, die aus R_0 durch die Substitutionen

$$S_\varkappa, \; S_\varkappa^{-1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

hervorgehen, sind sämmtlich von einander verschieden, und $P_0^{(1)}$ besitzt demnach genau

(8) $$\sigma_1 = \sigma(2\sigma - 1)$$

freie Seitenpaare. Die Zuordnung dieser $2\sigma_1$ Seiten werde nun wie folgt gemacht.

Wir bezeichnen diejenige Seite des Bereiches

$$R_{\pm\varkappa} = S_\varkappa^{\pm 1}(R_0) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma),$$

die der Seite t_ι beziehungsweise t_ι' von R_0 entspricht, mit

$$t_\iota^{(\pm\varkappa)} \text{ beziehungsweise } t_{-\iota}^{(\pm\varkappa)} \qquad (\iota = 1, 2, \cdots \sigma),$$

dann bilden die Seiten

$$t_\iota^{(\varkappa)} \qquad (\iota, \varkappa = \pm 1, \pm 2, \cdots \pm \sigma; \; \iota \neq \varkappa)$$

die Begrenzung von $P_0^{(1)}$, während längs der Seite $t_\varkappa^{(\varkappa)}$ der Bereich $R_\varkappa$ mit R_0 zusammenstösst. Es mögen dann die Seitenpaare

$$t_\iota^{(\varkappa)}, \quad t_{-\iota}^{(-\varkappa)}$$

einander zugeordnet werden.

Die Substitutionen, welche diese Seitenpaare in einander überführen, lauten der Reihe nach:

$$\begin{array}{ll}
S_1 S_1 \; S_1,\; S_1 S_2 \; S_1, \cdots S_1 S_{\sigma-1} S_1,\; S_1 S_\sigma S_1, & \\
S_1 S_\sigma^{-1} S_1,\; S_1 S_{\sigma-1}^{-1} S_1, \cdots S_1 S_2^{-1}\; S_1; & S_2 S_1^{-1} S_2, \\
S_2 S_1 \; S_2,\; S_2 S_2 \; S_2, \cdots S_2 S_{\sigma-1} S_2,\; S_2 S_\sigma S_2, & \\
S_2 S_\sigma^{-1} S_2,\; S_2 S_{\sigma-1}^{-1} S_2, \cdots S_2 S_3^{-1}\; S_2; & S_3 S_2^{-1}\; S_3,\; S_3 S_1^{-1} S_3, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;; & S_\varkappa S_{\varkappa-1}^{-1} S_\varkappa,\quad \cdots,\; S_\varkappa S_1^{-1} S_\varkappa, \\
S_\varkappa S_1 \; S_\varkappa,\; S_\varkappa S_2 \; S_\varkappa, \cdots S_\varkappa S_{\sigma-1} S_\varkappa,\; S_\varkappa S_\sigma S_\varkappa, & \\
S_\varkappa S_\sigma^{-1} S_\varkappa,\; S_\varkappa S_{\sigma-1}^{-1} S_\varkappa, \cdots S_\varkappa S_{\varkappa+1}^{-1} S_\varkappa; & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{array}$$

Bezeichnen wir dieselben in dieser Reihenfolge durch

$$S_1^{(1)},\; S_2^{(1)}, \cdots S_{\sigma_1}^{(1)},$$

so constituiren diese Substitutionen mit ihren inversen die Basis einer Untergruppe $\Theta^{(1)}$, für welche $P_0^{(1)}$ als Fundamentalbereich fungirt.

Vermöge der angegebenen Art der gegenseitigen Zuordnung der Seiten von $P_0^{(1)}$ hat der Bereich $P_0^{(1)}$ genau dieselbe Structur wie der Fundamentalbereich R_0 der ursprünglichen Gruppe ϑ. Die Untergruppe $\Theta^{(1)}$ ist also eine Untergruppe mit endlichem Quotienten und vom Geschlechte Null.

Jede Substitution S von ϑ lässt sich in die Form setzen

$$(9) \qquad S = S^{(1)} S_\varkappa^{\pm 1},$$

wo $\varkappa$ eine bestimmte der Zahlen

$$0,\; 1,\; 2, \cdots \sigma_1, \qquad S_0 = 1,$$

und $S^{(1)}$ eine Substitution von $\Theta^{(1)}$ bedeutet. Um diese Darstellung für die Substitution S von ϑ zu erhalten, kann man wie folgt verfahren.

Sei die Substitution S durch die Elemente der Basis

$$(10) \qquad S_\varkappa,\; S_\varkappa^{-1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

von ϑ ausgedrückt,

$$(11) \qquad S = S_{\varkappa_1}^{\varrho_{\varkappa_1}} S_{\varkappa_2}^{\varrho_{\varkappa_2}} \cdots S_{\varkappa_\mu}^{\varrho_{\varkappa_\mu}},$$

wo $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_\mu$ Zahlen aus der Reihe

$$1,\; 2, \cdots \sigma$$

bedeuten, von denen niemals zwei auf einanderfolgende übereinstimmen, während die

$$g_{\varkappa_1}, g_{\varkappa_2}, \cdots g_{\varkappa_\mu}$$

positive oder negative ganze Zahlen sind. Wir nennen dann die Anzahl der Substitutionen der Basis von ϑ, die in dem Ausdrucke von S auftreten, den Index oder das Gewicht von S in Bezug auf die Gruppe ϑ und setzen

$$\sum_{i=1}^{\mu} |g_{\varkappa_i}| = \mathrm{Ind}_0\, S.$$

Seien S_α, S_β zwei Substitutionen der Basis (10) von ϑ, wo α, β irgend zwei Zahlen der Reihe

$$\pm 1, \pm 2, \cdots \pm \sigma$$

bedeuten und für negative Werthe von α, β

$$S_\alpha = S_{|\alpha|}^{-1}, \qquad S_\beta = S_{|\beta|}^{-1}$$

zu nehmen ist, dann lässt sich die componirte Substitution

$$S_\alpha S_\beta$$

in die Form setzen:

$$S_\alpha S_\beta = S_\alpha S_\beta S_\alpha \cdot S_\alpha^{-1}; \tag{12}$$

ebenso ist für eine aus drei Substitutionen der Basis (10) componirte Substitution

$$S_\alpha S_\beta S_\gamma = S_\alpha S_\beta S_\alpha \cdot S_\alpha^{-1} S_\gamma S_\alpha^{-1} \cdot S_\alpha \tag{13}$$

u. s. w. Sowohl in (12) als auch in (13) steht auf der rechten Seite eine Substitution von $\Theta^{(1)}$ angewandt hinter einer Substitution der Basis (10).

Verfahren wir auf diese Weise mit den Substitutionen, welche die rechte Seite der Gleichung (11) bilden, so erhalten wir S in der Form

$$S = (S_{l_1}^{(1)})^{h_{l_1}} (S_{l_2}^{(1)})^{h_{l_2}} \cdots (S_{l_\nu}^{(1)})^{h_{l_\nu}} \cdot S_\varkappa^{\pm 1}, \tag{14}$$

wo $l_1, l_2, \cdots l_\nu$ Zahlen der Reihe

$$1, 2, \cdots \sigma_1$$

und $h_{l_1}, h_{l_2}, \cdots h_{l_\nu}$ positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, während $\varkappa$ eine bestimmte der Zahlen

$$0, 1, 2, \cdots \sigma$$

ist, und

$$S_0 = 1$$

gesetzt wurde. Ist also in (14) $\varkappa = 0$, so ist S selbst eine Substitution von $\Theta^{(1)}$, und die rechte Seite von (14) bricht mit

$$\left(S_{i_\nu}^{(1)}\right)^{h_{i_\nu}}$$

ab. Ferner denken wir uns in (14) allemal zwei aufeinander folgende der Substitutionen $(S_i^{(1)})^{\pm 1}$, die einander zerstören, weggelassen, so dass also in der Folge der Zahlen

$$l_1, l_2, \cdots l_\nu$$

niemals zwei aufeinanderfolgende identisch sind.

Dann liefert also die Gleichung (14) die gesuchte Darstellung von S in der Form (9), und wir können zugleich über die Zusammensetzung der Substitution $S^{(1)}$ von $\Theta^{(1)}$ eine wichtige Bemerkung machen.

Denken wir uns nämlich irgend eine Substitution $S^{(1)}$ von $\Theta^{(1)}$ in der Form

$$S^{(1)} = \left(S_{i_1}^{(1)}\right)^{m_{i_1}} \left(S_{i_2}^{(1)}\right)^{m_{i_2}} \cdots \left(S_{i_\nu}^{(1)}\right)^{m_{i_\nu}} \qquad (i_1, i_2, \cdots i_\nu = 1, 2, \cdots \sigma_1)$$

dargestellt und zwar in der einfachsten Weise, d. h. so, dass zwei aufeinanderfolgende Substitutionen, die sich zerstören, bereits weggelassen sind, so werden wir die Summe

$$\sum_{\varkappa=1}^{\nu} |m_{i_\varkappa}| = \mathrm{Ind}_1\, S^{(1)}$$

setzen und dieselbe als den Index oder das Gewicht der Substitution $S^{(1)}$ in Bezug auf die Gruppe $\Theta^{(1)}$ bezeichnen.

Die Gleichungen (12), (13) zeigen uns, dass wenn S auf die angegebene Weise in die Form (9) gesetzt wird, allemal

$$\mathrm{Ind}_1\, S^{(1)} < \mathrm{Ind}_0\, S \tag{15}$$

sein muss.

Für die Gruppe ϑ ergiebt sich die Darstellung

$$\vartheta = \Theta^{(1)}(1,\ S_1,\ S_2, \cdots S_\sigma,\ S_\sigma^{-1} \cdots S_2^{-1},\ S_1^{-1}) \tag{16}$$

als Product von $\Theta^{(1)}$ in den Quotienten

$$Q_1 = (1,\ S_1,\ S_2, \cdots S_\sigma,\ S_\sigma^{-1} \cdots S_2^{-1},\ S_1^{-1}). \tag{17}$$

Wir wenden uns nun zur Untersuchung der zur Untergruppe $\Theta^{(1)}$ gehörigen Fuchs'schen Functionen.

333. Bestimmung der zu der betrachteten Untergruppe gehörigen Riemann'schen Fläche.

Sei

$$z = f(\eta)$$

eine zur Gruppe ϑ gehörige,

$$z_1 = f_1(\eta)$$

eine zur Gruppe $\Theta^{(1)}$ gehörige Fuchs'sche Function, die innerhalb des Fundamentalbereiches R_0, beziehungweise $P_0^{(1)}$, jeden Werth nur ein einziges Mal annimmt. Dann wissen wir, dass z als rationale Function von z_1 darstellbar sein muss, und dass die Gleichung, der z_1 als Function von z genügt, in z_1 vom Grade $2\sigma + 1$ und in z vom ersten Grade ist.

Die einzigen Verzweigungspunkte der Function z_1 von z sind die den Ecken von R_0 entsprechenden Werthe $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$. Wir untersuchen also das Verhalten von z_1, wenn z geschlossene Umläufe um diese Punkte vollzieht.

Einem einfachen positiven Umlaufe von z um den Punkt $a_\varkappa$ entspricht die Substitution $A_\varkappa$ von ϑ. Diese Substitution ist nach Gleichung (2) der Nr. 319 (S. 226) für $\varkappa = 2, 3, \cdots \sigma$ in der Form

$$A_\varkappa = S_\varkappa^{-1} S_{\varkappa-1}$$

darstellbar. Die Function z_1, oder genauer gesprochen der Zweig

$$z_1^{(0)} = f_1(\eta)$$

dieser Function, verwandelt sich demnach durch einen einfachen positiven Umlauf der Variabeln z um $a_\varkappa$ in den Zweig

$$f_1(S_\varkappa^{-1} S_{\varkappa-1}\eta) = f_1(S_\varkappa^{-1} S_{\varkappa-1} S_\varkappa^{-1} \cdot S_\varkappa \eta) = f_1(S_\varkappa \eta) = z_1^{(\varkappa)}.$$

Eine Wiederholung dieses Umlaufes verwandelt $z_1^{(\varkappa)}$ in den Zweig

$$f_1(S_\varkappa S_\varkappa^{-1} S_{\varkappa-1}\eta) = f_1(S_{\varkappa-1}\eta) = z_1^{(\varkappa-1)},$$

und durch einen dritten Umlauf um $a_\varkappa$ wird $z_1^{(\varkappa-1)}$ in den Zweig

$$f_1(S_{\varkappa-1} S_\varkappa^{-1} S_{\varkappa-1}\eta) = f_1(\eta) = z_1^{(0)}$$

zurückkehren.

Für a_1 ist

$$A_1 = S_1^{-1},$$

wir haben also beim erstmaligen Umlaufe um a_1 für den Zweig $z_1^{(0)}$

$$f_1(S_1^{-1}\eta) = z_1^{(-1)},$$

beim zweiten Umlaufe

$$f_1(S_1^{-1}S_1^{-1}\eta) = f_1(S_1^{-1}S_1^{-1}S_1^{-1}\cdot S_1\eta) = z_1^{(1)},$$

während der dritte Umlauf wieder den Ausgangszweig

$$f_1(S_1^{-1}S_1^{-1}S_1^{-1}\eta) = f_1(\eta) = z_1^{(0)}$$

liefert. Der Zweig

$$z_1^{(\varkappa)} = f_1(S_\varkappa\eta) \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots \sigma)$$

verwandelt sich bei einmaligem Umlaufe von z um a_1 in

$$f_1(S_\varkappa S_1^{-1}\eta) = f_1(S_\varkappa S_1^{-1}S_\varkappa \cdot S_\varkappa^{-1}\eta) = z_1^{(-\varkappa)},$$

und ein nochmaliger Umlauf um a_1 führt $z_1^{(-\varkappa)}$ in

$$f_1(S_\varkappa^{-1}S_1^{-1}\eta) = f_1(S_\varkappa^{-1}S_1^{-1}S_\varkappa^{-1}\cdot S_\varkappa\eta) = z_1^{(\varkappa)}$$

zurück.

Für $a_{\sigma+1}$ ist

$$A_{\sigma+1} = A_1^{-1}A_2^{-1}\cdots A_\sigma^{-1} = S_\sigma,$$

also verwandelt ein einmaliger Umlauf um diesen Punkt den Zweig $z_1^{(0)}$ in

$$f_1(S_\sigma\eta) = z_1^{(\sigma)},$$

und den Zweig $z_1^{(\varkappa)}$ für $\varkappa = 1, 2, 3, \cdots \sigma$ in

$$f_1(S_\varkappa S_\sigma\eta) = f_1(S_\varkappa S_\sigma S_\varkappa \cdot S_\varkappa^{-1}\eta) = z_1^{(-\varkappa)}.$$

Ein abermaliger Umlauf um $a_{\sigma+1}$ wird dann $z_1^{(-\varkappa)}$ in

$$f_1(S_\varkappa^{-1}S_\sigma\eta) = f_1(S_\varkappa^{-1}S_\sigma S_\varkappa^{-1}\cdot S_\varkappa\eta) = z_1^{(\varkappa)}$$

überführen, so dass also $z_1^{(0)}$ nach einem dreimaligen Umlaufe um $a_{\sigma+1}$ zu seinem Ausgangswerthe zurückkehrt.

Die Zweige $z_1^{(\varkappa)}$ und $z_1^{(-\varkappa)}$ bleiben, da

$$f_1(S_\varkappa^{\pm1}S_i^{-1}S_{i-1}\eta) = f_1(S_\varkappa^{\pm1}S_i^{-1}S_\varkappa^{\pm1}S_\varkappa^{\mp1}S_{i-1}S_\varkappa^{\mp1}\cdot S_\varkappa^{\pm1}\eta) = f_1(S_\varkappa^{\pm1}\eta)$$

ist, falls i von $1, \varkappa, \varkappa+1, \sigma+1$ verschieden genommen wird, ungeändert, wenn z einen Umlauf um einen der Punkte a_i vollzieht.

Bezeichnen wir also kurz durch $\pm\varkappa$ den Zweig

$$z_1^{(\pm\varkappa)} = f_1(S_\varkappa^{\pm1}\eta) \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots \sigma),$$

so wird das Verhalten der algebraischen Function z_1 von z durch das folgende Schema dargestellt:

$$(18)\begin{cases} z=a_1\colon (0,\ -1,\ +1),\ (2,\ -2),\ (3,\ -3),\cdots(\sigma,\ -\sigma); \\ z=a_\varkappa\colon (0,\ \varkappa,\ \varkappa-1) \qquad (\varkappa=2,\ 3,\cdots\sigma); \\ z=a_{\sigma+1}\colon (0,\ \sigma,\ -\sigma),\ (1,\ -1),\ (2,\ -2),\cdots[\sigma-1,\ -(\sigma-1)]. \end{cases}$$

Die über der z-Ebene auszubreitende $(2\sigma+1)$-blättrige Riemann-sche Fläche T^1, welche die Verzweigung der Function z_1 von z darstellt, wird demnach in folgender Weise zu construiren sein.

Wir legen durch die Punkte

$$a_1,\ a_2,\cdots a_\sigma,\ a_{\sigma+1}$$

einen alle $(2\sigma+1)$ Blätter (die wir den durch dieselben repräsentirten Zweigen $z_1^{(\pm\varkappa)}$ entsprechend durch die Zahlen

$$0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots\pm\sigma$$

bezeichnen wollen) durchdringenden Verzweigungschnitt und heften für

$$\varkappa=1,\ 2,\cdots\sigma$$

längs des Stückes $(a_\varkappa,\ a_{\varkappa+1})$ das rechte (negative) Ufer des Schnittes im Blatte 0 an das linke (positive) Ufer im Blatte $-\varkappa$, das rechte Ufer im Blatte $-\varkappa$ an das linke im Blatte $\varkappa$, das rechte Ufer im Blatte $\varkappa$ an das linke im Blatte 0, ferner wenn i eine von $\varkappa$ verschiedene Zahl der Reihe

$$1,\ 2,\cdots\sigma$$

bedeutet, das rechte Ufer des Schnittes im Blatte i an das linke im Blatte $-i$ und das rechte Ufer im Blatte $-i$ an das linke im Blatte i.

Ein positiver Umlauf um $a_\varkappa$ ist dann für $\varkappa=2,3,\cdots\sigma$ so zu vollziehen, dass wir von dem in einem bestimmten Blatte $\varkappa_1$ gelegenen z-Werthe ausgehend zuerst bis an das rechte Ufer des zwischen $a_\varkappa$, $a_{\varkappa+1}$ gelegenen Schnittstückes herangehen, den Schnitt überschreitend in ein Blatt $\varkappa_2$ gelangen, in diesem bis an das linke Ufer des zwischen $a_{\varkappa-1}$, $a_\varkappa$ gelegenen Schnittstückes fortschreiten, den Schnitt abermals überschreitend in ein Blatt $\varkappa_3$ gelangen und in diesem uns dem über dem Ausgangspunkte z gelegenen Punkte annähern. Beim positiven Umlaufe um $a_{\sigma+1}$ hat man dagegen das zwischen $(a_\sigma,\ a_{\sigma+1})$ gelegene Schnittstück längs seines linken Ufers zu überschreiten und in dem Blatte, in welches man so gelangt, zu der über dem Ausgangspunkte gelegenen Stelle hinzugehen.

Unter den Zweigen

$$z_1^{(0)},\ z_1^{(1)},\ z_1^{(-1)},\cdots z_1^{(\sigma)},\ z_1^{(-\sigma)}$$

der algebraischen Function z_1 von z ist der Zweig $z_1^{(0)}$ dadurch vor allen übrigen ausgezeichnet, dass sich derselbe in jedem der Verzweigungspunkte

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$$

verzweigt. Wir können darum diesen Zweig $z_1^{(0)}$ als den Hauptzweig bezeichnen.

334. Betrachtung einer speciellen Untergruppe im Falle eines symmetrischen Fundamentalbereiches.

Wenn die Gruppe ϑ, von der wir in dem vorigen Beispiele ausgegangen waren, eine symmetrische ist, d. h. wenn der Fundamentalbereich R_0 durch die Diagonale t_0, die die Ecken $\lambda_{\sigma+1}$, λ_1 mit einander verbindet, in zwei symmetrische Hälften R_0', R_0'' zerlegt wird, so kann man Untergruppen mit endlichem Quotienten von ϑ angeben, die selbst wieder symmetrische Gruppen sind. Wir erhalten z. B. auf folgende Weise eine derartige Untergruppe, die ebenso wie ϑ vom Geschlechte Null ist.

Der Bereich R_0' ist von den $(\sigma + 1)$ Kreisbogen

$$t_0, t_\sigma, t_{\sigma-1}, \cdots t_1$$

begrenzt, von denen jeder sowohl den vorhergehenden wie den darauf folgenden in einem auf dem Einheitskreise der η-Ebene gelegenen Punkte berührt. Sei

$$z = f(\eta)$$

diejenige zu ϑ gehörige Fuchs'sche Function, die die eindeutig conforme Abbildung von R_0' auf das Innere des Einheitskreises der z-Ebene vermittelt. Dann entsprechen also den Punkten der Begrenzung von R_0' die Punkte der Peripherie des Einheitskreises der z-Ebene, diese Peripherie ist also die Linie l, welche die singulären Punkte

$$a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1},$$

die den Ecken von R_0' entsprechen, untereinander verbindet.

Wir denken uns nun die Spiegelbilder des Bereiches R_0' in Bezug auf jede seiner $\sigma + 1$ Seiten construirt; seien diese

(19) $$\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \cdots \mathfrak{R}_\sigma,$$

so dass also $\mathfrak{R}_\varkappa$ das Spiegelbild von R_0' in Bezug auf die Seite $t_\varkappa$ bedeutet. Vereinigen wir dann R_0' mit den $(\sigma + 1)$ Bereichen (19), so erhalten wir einen von

$$\sigma_1 + 1 = \sigma(\sigma + 1)$$

Seiten begrenzten Bereich $\mathfrak{R}^1$, der genau dieselbe Beschaffenheit besitzt wie R_0' selbst. Diesen Bereich $\mathfrak{R}^1$ denken wir uns durch eine Function

$$\zeta_1 = \varphi_1(\eta)$$

auf das Innere des Einheitskreises einer ζ_1-Ebene abgebildet, dann ist diese Function offenbar auch wieder eine Fuchs'sche von derselben Beschaffenheit wie $f(\eta)$; wir behaupten, dass die zu der Function $\varphi_1(\eta)$ gehörige Gruppe ϑ^1 eine Untergruppe mit endlichem Quotienten von ϑ ist.

Bezeichnen wir den Werth, der das Spiegelbild eines complexen Werthes a in Bezug auf den Einheitskreis darstellt, durch

$$'a = \frac{1}{\bar{a}},$$

wo $\bar{a}$ der conjugirte complexe Werth von a ist, und nennen (wie in der Nr. 306, S. 177) $'a$ kurz den zu a harmonischen Werth, so lautet die Gleichung des Kreises, der die Seite $t_\varkappa$ des Bereiches R_0' bildet,

$$(20) \qquad 2\eta'\eta - (\lambda_\varkappa + \lambda_{\varkappa+1})(\eta + '\eta) + 2\lambda_\varkappa\lambda_{\varkappa+1} = 0 \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots \sigma),$$

wo für $\varkappa = 0$

$$\lambda_0 = \lambda_{\sigma+1}$$

zu nehmen ist. In der That schneidet der durch die Gleichung (20) dargestellte Kreis den Einheitskreis der η-Ebene in den Punkten $\lambda_\varkappa$, $\lambda_{\varkappa+1}$ unter rechtem Winkel.

Bezeichnen wir die projective Substitution mit der Determinante -1

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_\varkappa + \lambda_{\varkappa+1}}{\lambda_\varkappa - \lambda_{\varkappa+1}} & -\dfrac{2\lambda_\varkappa\lambda_{\varkappa+1}}{\lambda_\varkappa - \lambda_{\varkappa+1}} \\ \dfrac{2}{\lambda_\varkappa - \lambda_{\varkappa+1}} & -\dfrac{\lambda_\varkappa + \lambda_{\varkappa+1}}{\lambda_\varkappa - \lambda_{\varkappa+1}} \end{pmatrix}$$

mit $\Sigma_\varkappa$, so ist offenbar

$$(21) \qquad \Sigma_\varkappa^2 = 1 \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots \sigma)$$

und der Ausdruck

$$\Sigma_\varkappa\, '\eta = '(\Sigma_\varkappa \eta)$$

stellt das Spiegelbild des Punktes η in Bezug auf den Kreis (20) dar. Wir können also die Spiegelung in Bezug auf den Kreisbogen $t_\varkappa$ mit

$$\Sigma_{\varkappa}'\eta$$

bezeichnen. In der Regel werden wir für dieselbe kurz nur $\Sigma_{\varkappa}$ schreiben.

Bilden wir nun aus den $\sigma + 1$ Operationen

$$(22) \qquad \Sigma_0'\eta, \; \Sigma_1'\eta, \cdots \Sigma_\sigma'\eta$$

als Basis eine Gruppe $\bar{\vartheta}$, so sind die Operationen dieser Gruppe eindeutig zugeordnet den verschiedenen Bereichen, die aus R_0' durch immer fortgesetzte Spiegelungen in Bezug auf die Seiten entstehen, d. h. mit anderen Worten, den Halbbereichen, in welche die Bereiche

$$S_\nu R_0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots \infty),$$

die aus R_0 durch die Substitutionen S_ν der Gruppe ϑ hervorgehen, durch die der Diagonale t_0 von R_0 entsprechenden Diagonalen zerlegt werden.

Eine Operation der Gruppe $\bar{\vartheta}$, die aus einer geraden Anzahl von Operationen der Basis (22) zusammengesetzt ist, ist offenbar nichts anderes wie eine projective Substitution der Gruppe ϑ, und umgekehrt ist jede Substitution von ϑ als Composition einer geraden Anzahl von Operationen der Reihe (22) darstellbar, denn wir haben

$$\Sigma_{\varkappa}\Sigma_0\Sigma_{\varkappa}'(\Sigma_{\varkappa}'\eta) = \Sigma_{\varkappa}\Sigma_0\eta = S_{\varkappa}\eta \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma).$$

Die Operationen von $\bar{\vartheta}$ zerfallen demnach in zwei Arten; die Operationen der **ersten Art** sind die aus einer geraden Anzahl der Operationen (22) componirten projectiven Substitutionen der Gruppe ϑ, die Operationen der **zweiten Art** bestehen aus einer ungeraden Anzahl von Operationen (22). Wir bezeichnen die letztere Art von Operationen typisch durch Σ, während für die erste Art die Bezeichnung S beibehalten wird.

Wir haben dann offenbar, wenn S irgend eine Operation erster Art bedeutet, in

$$\Sigma^{-1}S\Sigma$$

wieder eine Operation der ersten Art, d. h. es gilt der Satz:

Die Gruppe ϑ ist in der Gruppe $\bar{\vartheta}$ als ausgezeichnete Untergruppe enthalten.

Man sagt mit Herrn **Klein**, die Gruppe $\bar{\vartheta}$ sei aus der Gruppe ϑ durch **Erweiterung** mittelst der Spiegelung $\Sigma_0'\eta$ hervorgegangen, denn offenbar kann jede Operation von $\bar{\vartheta}$ in einer der beiden Formen

$$S\eta, \qquad S\Sigma_0'\eta$$

dargestellt werden, wo S eine Substitution von ϑ bedeutet.

Die Beziehungen der Operationen der erweiterten Gruppe $\bar{\vartheta}$ zu der Function

$$z = f(\eta)$$

lassen sich auf Grund der Ergebnisse der Nr. 319 (S. 225 ff.) sofort angeben.

Für eine Operation erster Art S ist

$$z = f(S\eta),$$

dagegen verwandelt sich z in seinen harmonischen Werth $'z$, wenn η eine Operation zweiter Art Σ erleidet, d. h. wir haben

$$'z = f(\Sigma\,'\eta).$$

Insbesondere können wir sagen: wenn η von einem Punkte η_0 des Bereiches R_0' ausgehend, die Seite $t_\varkappa$ überschreitend nach dem Punkte

$$\Sigma_\varkappa\,'\eta$$

des Bereiches $R_\varkappa$ geht, so bewegt sich z von dem Punkte

$$z_0 = f(\eta_0)$$

nach dem harmonischen Punkte

$$'z_0 = f(\Sigma_\varkappa\,'\eta_0)$$

hin, indem es die Peripherie l des Einheitskreises in einem zwischen den Stellen $a_\varkappa$, $a_{\varkappa+1}$ gelegenen Punkte überschreitet; dabei ist für $\varkappa = 0$

$$a_0 = a_{\sigma+1}$$

zu nehmen.

Wenn wir uns also die unendlich vielblättrige Riemann'sche Fläche T denken, die über der z-Ebene ausgebreitet die Verzweigung der Function η von z darstellt, und jedes Blatt dieser Fläche durch den Einheitskreis l in zwei Halbblätter zerlegen, so entsprechen diese Halbblätter den oben erwähnten Halbbereichen der Theilung der η-Ebene, und dadurch eindeutig den Operationen der erweiterten Gruppe $\bar{\vartheta}$. Die Art, wie die Halbblätter längs der einzelnen Theile des Schnittes l in einander übergehen, ist durch die Gruppe $\bar{\vartheta}$ vollkommen bestimmt; da wir den Bereich R_0' mit

$$\mathfrak{R}_0 = R_0''$$

zusammen als den Fundamentalbereich R_0 auffassen, sind diejenigen beiden Halbblätter, die längs des Schnitttheiles

$$l_0 = (a_1, a_{\sigma+1})$$

mit einander zusammenhängen, zu einem ganzen Blatte der Fläche T zu vereinigen.

335. Beziehungen zwischen der ursprünglichen Gruppe und der betrachteten Untergruppe.

Betrachten wir nun den durch Vereinigung der Bereiche

$$R_0', \mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \cdots \mathfrak{R}_\sigma$$

entstandenen Bereich $\mathfrak{R}^1$. Die zu den $\sigma_1 + 1$ freien Seiten von $\mathfrak{R}_1$ gehörigen Spiegelungen sind dann, wie man sofort übersieht

$$\Sigma_h \Sigma_\varkappa \Sigma_h{}' \eta \qquad (h, \varkappa = 0, 1, 2, \cdots \sigma;\ h \neq \varkappa);$$

wir bezeichnen dieselben z. B. in der Reihenfolge

$$(23) \qquad \begin{cases} \Sigma_1 \Sigma_0 \quad \Sigma_1, & \Sigma_1 \Sigma_\sigma \quad \Sigma_1, \cdots \Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_1, \\ \Sigma_2 \Sigma_1 \quad \Sigma_2, & \Sigma_2 \Sigma_0 \quad \Sigma_2, \cdots \Sigma_2 \Sigma_3 \Sigma_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Sigma_\sigma \Sigma_{\sigma-1} \Sigma_\sigma, & \Sigma_\sigma \Sigma_{\sigma-2} \Sigma_\sigma, \cdots \Sigma_\sigma \Sigma_0 \Sigma_\sigma, \\ \Sigma_0 \Sigma_\sigma \quad \Sigma_0, & \Sigma_0 \Sigma_{\sigma-1} \Sigma_0, \cdots \Sigma_0 \Sigma_1 \Sigma_0 \end{cases}$$

durch

$$\Sigma_0^1, \Sigma_1^1, \cdots \Sigma_{\sigma_1}^1$$

und bilden aus den Operationen

$$\Sigma_\varkappa^{1\,\prime} \eta \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots \sigma_1)$$

als Basis eine Gruppe $\overline{\vartheta}^1$.

Diese Gruppe ist dann offenbar eine Untergruppe der Gruppe $\overline{\vartheta}$. Wir können die Beziehung zwischen $\overline{\vartheta}$ und $\overline{\vartheta}^1$ sehr leicht angeben.

Da die Operationen (22) den Gleichungen (21) Genüge leisten, so lässt sich jede beliebige Operation $\overline{S}$ der Gruppe $\overline{\vartheta}$ auf eine Weise in der Form

$$(24) \qquad \overline{S} = \Sigma_{i_1} \Sigma_{i_2} \cdots \Sigma_{i_\nu}$$

darstellen, wo die

$$i_1, i_2, \cdots i_\nu$$

irgendwelche Zahlen der Reihe

$$0, 1, 2, \cdots \sigma$$

bedeuten und niemals zwei aufeinanderfolgende dieser Zahlen einander gleich sind. Wir nennen dann ν den Index oder das Gewicht der Operation (24) in Bezug auf die Gruppe $\overline{\vartheta}$ und setzen

$$\nu = \overline{\mathrm{Ind}}_0\, \overline{S}.$$

Ebenso kann jede Operation $\overline{S}^1$ von $\overline{\vartheta}^1$ nur auf eine Weise in der Form

$$\overline{S}^1 = \Sigma^1_{i_1} \Sigma^1_{i_2} \cdots \Sigma^1_{i_{\nu_1}}$$

dargestellt werden, wo die

$$i_1, i_2, \cdots i_{\nu_1}$$

Zahlen der Reihe

$$0, 1, 2, \cdots \sigma_1$$

bedeuten, von denen niemals zwei aufeinanderfolgende einander gleich sind, da die Operationen $\Sigma_\varkappa^{\ 1}$ auch die Relationen

$$\Sigma_\varkappa^{\ 1} \Sigma_\varkappa^{\ 1} = 1$$

erfüllen. Wir setzen dann

$$\nu_1 = \overline{\mathrm{Ind}}_1 \, \overline{S}^1$$

und nennen diese Zahl den Index oder das Gewicht der Operation $\overline{S}^1$ in Bezug auf die Gruppe $\overline{\vartheta}^1$.

Um nun eine beliebige Operation von $\overline{\vartheta}$ aus Operationen von $\overline{\vartheta}^1$ und gewissen einfachsten Operationen von $\overline{\vartheta}$ zusammenzusetzen, verfahren wir ähnlich wie in der Nr. 331 (S. 270) für die daselbst betrachteten Gruppen.

Die aus zwei Operationen der Basis (22) von $\overline{\vartheta}$ zusammengesetzte Operation

$$\Sigma_\alpha \Sigma_\beta, \qquad (\alpha \neq \beta),$$

lässt sich in die Form setzen

(25) $$\Sigma_\alpha \Sigma_\beta = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\alpha \cdot \Sigma_\alpha;$$

ebenso ist eine aus drei Operationen der Basis (22) componirte Operation in der Form

(26) $$\Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\alpha \cdot \Sigma_\alpha \Sigma_\gamma \Sigma_\alpha \cdot \Sigma_\alpha \qquad (\alpha \neq \beta, \ \beta \neq \gamma)$$

darstellbar, wenn γ von α verschieden ist.

Auf diese Weise lässt sich also jede Operation $\overline{S}$ von $\overline{\vartheta}$, die in der Form (24) gegeben ist, in der Gestalt

(27) $$\overline{S} = \overline{S}^1 \cdot \Sigma_\varkappa$$

darstellen, wo $\overline{S}^1$ eine Operation von $\overline{\vartheta}^1$ und $\Sigma_\varkappa$ entweder eine der Operationen der Basis (22) oder die identische Operation 1 bedeutet.

Aus den Gleichungen (25), (26) schliessen wir, dass bei der Darstellung (27) stets

(28) $$\overline{\mathrm{Ind}}_0 \, \overline{S} > \overline{\mathrm{Ind}}_1 \, \overline{S}^1$$

sein wird.

Wir können demzufolge die Beziehung zwischen den Gruppen $\bar{\vartheta}$ und $\bar{\vartheta}^1$ durch die Gleichung

$$\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}^1(1, \Sigma_0, \Sigma_1, \cdots \Sigma_\sigma)$$

darstellen, d. h. die Gruppe $\bar{\vartheta}^1$ ist eine Untergruppe mit dem endlichen Quotienten

$$1, \Sigma_0, \Sigma_1, \cdots \Sigma_\sigma$$

von $\bar{\vartheta}$.

Betrachten wir nun die in der Nr. 334 (S. 276) definirte Fuchs'sche Function

$$\zeta_1 = \varphi_1(\eta),$$

welche die eindeutig conforme Abbildung des Bereiches $\mathfrak{R}^1$ auf das Innere des Einheitskreises der ζ_1-Ebene vermittelt. Die Gruppe ϑ^1 projectiver Substitutionen, bei deren Anwendung die Function $\varphi_1(\eta)$ ungeändert bleibt, ist dann nichts Anderes wie die Gruppe derjenigen Operationen der Gruppe $\bar{\vartheta}^1$, deren Index eine gerade Zahl ist, ebenso wie ϑ aus den Operationen mit geradzahligem Index der Gruppe $\bar{\vartheta}$ besteht.

Also ist ϑ^1 eine ausgezeichnete Untergruppe mit endlichem Quotienten von $\bar{\vartheta}^1$ und folglich, wie wir behauptet hatten, auch eine Untergruppe mit endlichem Quotienten von ϑ.

Die Gruppe ϑ^1 ist überdies vom Geschlechte Null, d. h. jede bei ϑ^1 unveränderliche Fuchs'sche Function ist rational durch ζ_1 darstellbar; also erscheint z als rationale Function von ζ_1,

$$z = P_1(\zeta_1).$$

Wir haben nun die durch diese Gleichung definirte algebraische Function ζ_1 von z genauer zu charakterisiren.

336. **Bestimmung der zu der betrachteten Untergruppe gehörigen Riemann'schen Fläche.**

Die einzigen Verzweigungsstellen der Function ζ_1 von z sind offenbar die Punkte

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1},$$

die den Ecken von R_0' entsprechen. In der durch den Querschnitt l, der längs der Peripherie des Einheitskreises von a_1 über a_2 u. s. w. nach $a_{\sigma+1}$ hingeführt ist, zerschnittenen z-Ebene ist also ζ_1 eindeutig determinirt.

Gehen wir für einen z-Werth mit dem innerhalb des Fundamentalbereiches R_0 von ϑ gelegenen η-Werthe aus, und berechnen den entsprechenden Werth von

$$\varphi_1(\eta),$$

so erhalten wir einen wohlbestimmten Zweig $\zeta_1^{(0)}$ der Function ζ_1, der also innerhalb der durch $\bar{l}$ zerschnittenen z-Ebene eindeutig gegeben ist.

Wir vollziehen nun einen positiven geschlossenen Umlauf um den Punkt $a_\varkappa$, indem wir zunächst den zwischen $a_\varkappa$, $a_{\varkappa+1}$ gelegenen Theil des Schnittes $\bar{l}$ in der Richtung vom negativen nach dem positiven Ufer hin (vergl. die Fig. 31, S. 230) überschreitend nach dem zu dem Ausgangswerthe z harmonischen Werthe $'z$ gehen, dann den zwischen $a_\varkappa$ und $a_{\varkappa-1}$ gelegenen Theil von $\bar{l}$ in der Richtung vom positiven nach dem negativen Ufer hin überschreitend nach z zurückkehren. Die Variable η ist dann von dem innerhalb R_0 gelegenen Werthe η zu dem Werthe

$$\Sigma_\varkappa{}'\eta,$$

und von diesem Punkte weiter nach

$$\Sigma_\varkappa\Sigma_{\varkappa-1}\Sigma_\varkappa{}'(\Sigma_\varkappa{}'\eta) = \Sigma_\varkappa\Sigma_{\varkappa-1}\eta$$

gegangen. Demgemäss hat sich also

$$\zeta_1^{(0)} = \varphi_1(\eta)$$

in den Zweig

$$\zeta_1^{(\varkappa)} = \varphi_1(\Sigma_\varkappa\Sigma_{\varkappa-1}\eta)$$

verwandelt.

Ein abermaliger positiver Umlauf von z um $a_\varkappa$ verwandelt den Zweig $\zeta_1^{(\varkappa)}$ in

$$\varphi_1(\Sigma_\varkappa\Sigma_{\varkappa-1}\Sigma_\varkappa\Sigma_{\varkappa-1}\eta).$$

Nun ist aber

$$\Sigma_\varkappa\Sigma_{\varkappa-1}\Sigma_\varkappa\Sigma_{\varkappa-1} = \Sigma_\varkappa\Sigma_{\varkappa-1}\Sigma_\varkappa \cdot \Sigma_{\varkappa-1}\Sigma_{\varkappa-2}\Sigma_{\varkappa-1} \cdot \Sigma_{\varkappa-1}\Sigma_{\varkappa-2},$$

wir haben folglich, da die Substitution

$$\Sigma_\varkappa\Sigma_{\varkappa-1}\Sigma_\varkappa \cdot \Sigma_{\varkappa-1}\Sigma_{\varkappa-2}\Sigma_{\varkappa-1}$$

der Gruppe ϑ^1 angehört,

$$\varphi_1(\Sigma_\varkappa\Sigma_{\varkappa-1}\Sigma_\varkappa\Sigma_{\varkappa-1}\eta) = \varphi_1(\Sigma_{\varkappa-1}\Sigma_{\varkappa-2}\eta) = \zeta_1^{(\varkappa-1)}.$$

Wenn wir z den Umlauf um $a_\varkappa$ zum dritten Male vollziehen lassen, so verwandelt sich $\zeta_1^{(\varkappa-1)}$ in

$$\varphi_1(\Sigma_\varkappa\Sigma_{\varkappa-1}\Sigma_\varkappa \cdot \Sigma_{\varkappa-1}\Sigma_\varkappa\Sigma_{\varkappa-1}\eta) = \varphi_1(\eta)$$

d. h. wieder in den Ausgangszweig.

Dies gilt für alle Werthe

$$\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma + 1,$$

nur ist für $\varkappa = 1$ im oberen Index von ζ_1 zu nehmen

$$\varkappa - 1 = \sigma + 1,$$

und im untern Index der Σ

$$\varkappa - 1 = 0, \qquad \varkappa - 2 = \sigma;$$

ferner ist zu beachten, dass der zwischen a_1 und $a_{\sigma+1}$ gelegene Bogen l_0 des Einheitskreises der z-Ebene nicht als Querschnitt fungirt, dass vielmehr der Uebergang von einem Punkte z zu seinem harmonischen Werthe innerhalb der zerschnittenen z-Ebene so erfolgen muss, dass der Einheitskreis in einem Punkte von l_0 passirt wird.

Wir haben also die $\sigma + 2$ Zweige

$$\zeta_1^{(0)} = \varphi_1(\eta), \quad \zeta_1^{(\varkappa)} = \varphi_1(\Sigma_\varkappa \Sigma_{\varkappa-1} \eta), \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma + 1)$$

der algebraischen Function ζ_1 von z, und wenn wir dieselben kurz durch die als obere Indices fungirenden Zahlen bezeichnen, so gilt für den singulären Punkt $a_\varkappa$ das Verzweigungsschema

$$(0, \varkappa, \varkappa - 1) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma + 1).$$

In der That bleibt der Zweig $\zeta_1^{(i)}$ bei einem einfachen Umlaufe um $a_\varkappa$ ungeändert, wenn i von 0, $\varkappa$, $\varkappa - 1$ verschieden ist, denn es ist dann

$$\Sigma_{i-1}\Sigma_{i-2}\Sigma_\varkappa\Sigma_{\varkappa-1} = \Sigma_{i-1}\Sigma_{i-2}\Sigma_{i-1}\cdot\Sigma_{i-1}\Sigma_\varkappa\Sigma_{i-1}\cdot$$
$$\cdot\Sigma_{i-1}\Sigma_{\varkappa-1}\Sigma_{i-1}\cdot\Sigma_{i-1}\Sigma_{i-2}\Sigma_{i-1}\cdot\Sigma_{i-1}\Sigma_{i-2}$$

und folglich

$$\varphi_1(\Sigma_{i-1}\Sigma_{i-2}\Sigma_\varkappa\Sigma_{\varkappa-1}\eta) = \varphi_1(\Sigma_{i-1}\Sigma_{i-2}\eta).$$

Die Construction der die Verzweigung von ζ_1 darstellenden Riemann'schen Fläche gestaltet sich hiernach wie folgt:

Man lege durch die $(\sigma + 2)$-fach gedachte z-Ebene den alle $\sigma + 2$ Blätter (die wir entsprechend den durch dieselben repräsentirten Zweigen von ζ_1 durch

$$0, 1, 2, \cdots \sigma + 1$$

bezeichnen) durchdringenden Schnitt $\bar{l}$, und hefte längs des zwischen $a_{\varkappa-1}$ und $a_\varkappa$ gelegenen Stückes für

$$\varkappa = 2, 3, \cdots \sigma + 1$$

das rechte (negative) Ufer des Schnittes $\bar{l}$ im Blatte 0 an das linke (positive) Ufer im Blatte $\varkappa - 1$, das rechte Ufer im Blatte $\varkappa - 1$ an

das linke im Blatte $\sigma + 1$, das rechte Ufer im Blatte $\sigma + 1$ an das linke im Blatte 0, und wenn i eine von 0, $\varkappa - 1$, $\sigma + 1$ verschiedene der Zahlen

$$0, 1, 2, \cdots \sigma + 1$$

bedeutet, das rechte Ufer im Blatte i an das linke Ufer im selben Blatte, so dass also in den Blättern i das zwischen $a_{\varkappa-1}$ und $a_\varkappa$ gelegene Stück von $\bar{l}$ nicht als Verzweigungsschnitt fungirt.

In dieser Riemann'schen Fläche $\mathfrak{T}^1$ ist dann ζ_1 eine eindeutige Function des Ortes.

Um von der Natur der Fläche $\mathfrak{T}^1$ eine klare Vorstellung zu gewinnen, denken wir uns jedes Blatt derselben durch den Einheitskreis l in zwei Halbblätter zerlegt, die wir, jenachdem sie das Innere oder das Aeussere des Einheitskreises bilden, als das innere, beziehungsweise äussere Halbblatt des betreffenden Blattes von $\mathfrak{T}^1$ bezeichnen. Die so entstehenden $2\sigma + 4$ Halbblätter entsprechen gewissen Halbbereichen der durch die Gruppe $\bar{\vartheta}$ bestimmten Theilung des Einheitskreises der η-Ebene, die wir in folgender Weise erhalten.

Wir spiegeln den Bereich

$$\mathfrak{R}^1 = R_0' + \mathfrak{R}_0 + \mathfrak{R}_1 + \cdots + \mathfrak{R}_\sigma$$

in Bezug auf irgend eine seiner Seiten τ_0 und bezeichnen die so entstehenden Spiegelbilder von $\mathfrak{R}^1$, R_0' und $\mathfrak{R}_\varkappa$ beziehungsweise mit

$$\bar{\mathfrak{R}}^1, \bar{R}_0', \bar{\mathfrak{R}}_\varkappa \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots \sigma),$$

so dass also

$$\bar{\mathfrak{R}}^1 = \bar{R}_0' + \mathfrak{R}_0 + \bar{\mathfrak{R}}_1 + \cdots + \bar{\mathfrak{R}}_\sigma$$

ist. Der Bereich

$$\mathfrak{R}^1 + \bar{\mathfrak{R}}^1$$

ist dann der Fundamentalbereich der Fuchs'schen Gruppe ϑ^1, und wenn wir diejenigen Seiten desselben, die Spiegelbilder von einander in Bezug auf die Seite τ_0 von $\mathfrak{R}^1$ sind, einander zuordnen, so bilden die Substitutionen, durch welche zwei so zugeordnete Seiten in einander transformirt werden, mit ihren inversen eine Basis von ϑ^1.

Offenbar ist nun $(\mathfrak{R}^1 + \bar{\mathfrak{R}}^1)$ die eindeutig conforme Abbildung der Riemann'schen Fläche $\mathfrak{T}^1$, wenn wir uns diesen Bereich durch stetige Deformation und Biegung so umgewandelt denken, dass correspondirende Punkte je zweier einander zugeordneter Seiten zur Deckung kommen. Es entsprechen demnach dem innern, beziehungsweise äussern Halbblatte des Blattes 0 von $\mathfrak{T}^1$ die Halbbereiche

$$R_0' \text{ und } \mathfrak{R}_0',$$

dem innern beziehungsweise äussern Halbblatte des Blattes $(\sigma + 1)$ von $\mathfrak{T}^1$ die Halbbereiche

$$\overline{\mathfrak{R}}_0 \text{ und } \overline{R}_0',$$

während dem innern beziehungsweise äussern Halbblatte des Blattes i von $\mathfrak{T}^1$ die Halbbereiche

$$\mathfrak{R}_i \text{ und } \overline{\mathfrak{R}}_i \qquad (i = 1, 2, \cdots \sigma)$$

entsprechen.

Die auf die angegebene Weise aus dem Bereiche

$$\mathfrak{R}^1 + \overline{\mathfrak{R}}^1$$

gebildete geschlossene Fläche ist aber auch die eindeutig conforme Abbildung der ζ_1-Ebene. Den Punkten der Begrenzung von $\mathfrak{R}^1$ entsprechen die Punkte der Peripherie des Einheitskreises der ζ_1-Ebene; den Ecken von $\mathfrak{R}^1$ mögen in einer bestimmten Reihenfolge die Punkte

$$\zeta_1 = a_1^1,\ a_2^1,\ \cdots\ a_{\sigma_1+1}^1$$

entsprechen. Es sind dies dann diejenigen Werthe der algebraischen Function ζ_1 von z, die in den Verzweigungspunkten

$$z = a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_{\sigma+1}$$

zum Vorschein kommen. Der Eintheilung des Bereiches $(\mathfrak{R}^1 + \overline{\mathfrak{R}}^1)$, beziehungsweise der aus demselben gebildeten geschlossenen Fläche in die Halbbereiche

$$R_0',\ \overline{R}_0',\ \ \mathfrak{R}_x,\ \overline{\mathfrak{R}}_x \qquad (x = 0, 1, 2, \cdots \sigma),$$

entspricht eine Eintheilung der ζ_1-Ebene in Parzellen, die sich schlicht neben einander lagern und deren Begrenzung von jenen ζ_1 Punkten gebildet wird, für welche

$$|z| = 1$$

ist. Diese Parzellen sind nichts anderes wie die den einzelnen Halbblättern der Fläche $\mathfrak{T}^1$ entsprechenden Bereiche, dieselben geben also in ihrer Anordnung wieder eine getreue Darstellung der Gestalt von $\mathfrak{T}^1$. Hieraus können wir einige für das Folgende wichtige Schlüsse ziehen.

Denken wir uns z. B. z auf das Innere des Einheitskreises beschränkt; wenn dann z einen Punkt des Blattes 0 darstellt, so liegt der entsprechende η-Werth in dem Bereiche R_0'. Alle Punkte von R_0', auch die Punkte der Begrenzung, mit Ausnahme der Ecken,

liegen aber im Innern von $\mathfrak{R}^1$, also liegen die entsprechenden Werthe von ζ_1 (da ζ_1 die conforme Abbildung von $\mathfrak{R}^1$ auf das Innere des Einheitskreises vermittelt) innerhalb des Einheitskreises. D. h.:

Wenn z innerhalb oder auf dem positiven Ufer der Peripherie des Einheitskreises gelegen ist, und nicht mit einem der Verzweigungspunkte zusammenfällt, so sind die zugehörigen Werthe des dem Blatte 0 von $\mathfrak{T}^1$ entsprechenden Zweiges $\zeta_1^{(0)}$ von ζ_1 dem absoluten Betrage nach kleiner wie Eins.

Möge z. B. der Punkt $a_1^{\,1}$ dem Werthe $z = a_1$ entsprechen, und mögen die Punkte $a_1^{\,1}$, $a_2^{\,1}$, $\cdots$ $a_{\sigma_1+1}^1$ auf der Peripherie des Einheitskreises der ζ_1-Ebene so aufeinander folgen, wie die wachsenden Zahlen auf dem Zifferblatte einer Uhr. Dann sind die Punkte

$$(\alpha) \qquad a_1^{\,1},\ a_{\sigma+1}^1,\ a_{2\sigma+1}^1,\ \cdots\ a_{\sigma^2+1}^1$$

die Ecken der dem innern Halbblatte 0 entsprechenden Parzelle der ζ_1-Ebene, und die Begrenzung dieser Parzelle wird von Curven gebildet, die ganz im Innern des Einheitskreises verlaufen und nur die Punkte (α) mit der Peripherie dieses Kreises gemein haben. Von den $(\sigma + 1)$ übrigen Parzellen, in welche das Innere des Einheitskreises durch jene Curven getheilt wird, entspricht die eine dem äusseren Halbblatte 0, während die übrigen den äusseren Halbblättern $1, 2, \cdots \sigma$ entsprechen.

Wenn z ausserhalb des Einheitskreises im Blatte $\sigma + 1$ gelegen ist, so befindet sich η im Bereiche $\overline{R}_0'$. Alle Punkte dieses Bereiches, auch die auf der Begrenzung desselben gelegenen Punkte, mit Ausnahme der Ecken, liegen innerhalb des Bereiches $\mathfrak{R}^1$, der die Abbildung des ausserhalb des Einheitskreises gelegenen Theiles der ζ_1-Ebene darstellt. Also liegen die den Punkten des äusseren Halbblattes $\sigma + 1$ entsprechenden ζ_1-Werthe ganz ausserhalb des Einheitskreises und erfüllen ein zusammenhängendes Gebiet, welches von $(\sigma + 1)$ Curven begrenzt wird, die selbst ganz ausserhalb des Einheitskreises verlaufen und nur ihre Endpunkte, d. h. je zwei aufeinanderfolgende der Punkte (α) mit der Peripherie des Einheitskreises gemein haben. Die $\sigma + 1$ zwischen diesen Curven und dem Einheitskreise gelegenen Parzellen entsprechen beziehungsweise den inneren Halbblättern

$$1,\ 2,\ \cdots\ \sigma,\ \sigma + 1$$

der Fläche $\mathfrak{T}^1$.

Wir heben als das für die Folge wichtigste Resultat hervor:

Wenn z im Innern oder auf dem positiven Ufer des Einheitskreises selbst verbleibt und nicht mit einem der Verzweigungspunkte zusammenfällt, so sind die entsprechenden Werthe des einen Zweiges $\zeta_1^{(0)}$ der algebraischen Function ζ_1 dem absoluten Betrage nach kleiner wie Eins, während die entsprechenden Werthe der übrigen Zweige absolute Beträge besitzen, die grösser oder gleich Eins sind.

Wir nennen diesen Zweig $\zeta_1^{(0)}$ den Hauptzweig der algebraischen Function ζ_1 von z.

Drittes Kapitel.

337. Definition der gefundenen algebraischen Function bei gegebenen Werthen ihrer Verzweigungspunkte.

Wenn wir von der Art, wie wir die algebraische Function ζ_1 von z erhalten haben, absehen und uns nur die auf dem Einheitskreise der z-Ebene gelegenen Punkte

$$a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$$

gegeben denken, so können wir die in der vorigen Nummer (S. 283) beschriebene $(\sigma+2)$-blättrige Riemann'sche Fläche $\mathfrak{T}^1$ über der z-Ebene aufbauen, und dann auf Grund der Riemann'schen Existenztheoreme schliessen, dass es eine algebraische Function Z_1 von z geben muss, die auf dieser Fläche eine eindeutige Function des Ortes ist.

Die Riemann'sche Fläche $\mathfrak{T}^1$ ist eine einfach zusammenhängende, denn die Anzahl w der einfach zu zählenden Verzweigungspunkte ist

$$w = 2(\sigma+1),$$

indem jedes a_x ein doppelt zu zählender Verzweigungspunkt ist, die Anzahl n der Blätter ist

$$n = \sigma + 2,$$

man hat also für die Zahl $2p+1$, die die Ordnung des Zusammenhanges der Fläche bestimmt, nach der Riemann'schen Formel

$$w - 2n = 2p - 2,$$

den Werth Eins.

Wir können folglich die algebraische Function Z_1 von z so einrichten, dass sie nur an einer Stelle der Fläche $\mathfrak{T}^1$ von der ersten Ordnung unendlich wird, und behalten dann in Z_1 noch drei willkürliche Constanten, indem nämlich, wenn Z_1 eine specielle so beschaffene Function bedeutet, auch

$$\frac{\alpha Z_1+\beta}{\gamma Z_1+\delta}, \qquad (\alpha\delta-\beta\gamma=1)$$

für willkürliche complexe Werthe der α, β, γ die gleichen Eigenschaften besitzt, und umgekehrt jede algebraische Function von der angegebenen Beschaffenheit in dieser Form, d. h. als linear gebrochene Function von Z_1 dargestellt werden kann. Es ist dann z eine rationale Function von Z_1. Bezeichen wir nun durch

$$Z_1 = A(z)$$

die erwähnte specielle Function, dann ist der conjugirte complexe Werth

$$\overline{Z}_1 = \overline{A(z)}$$

eine monogene Function von $\bar{z}$, also auch von

$$'z = \frac{1}{\bar{z}}$$

und besitzt als Function von $'z$ aufgefasst die analogen Eigenschaften wie Z_1 als Function von z, indem ja die Verzweigungsstellen

$$a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1},$$

von denen die Natur der algebraischen Function $A(z)$ allein abhängt, beim Uebergange von z zu $'z$ dieselben bleiben. Aus demselben Grunde ist

$$A('z),$$

ebenfalls als Function von $'z$, eine in der Fläche $\mathfrak{T}^1$ eindeutige Function, die nur an einer Stelle von der ersten Ordnung unendlich wird; wir erkennen also, dass $\overline{Z}_1$ als linear gebrochene Function von $A('z)$ darstellbar sein muss.

Daraus folgt (vergl. die in der Nr. 320, S. 229, angewandte Schlussweise), dass es in der Z_1-Ebene einen Kreis K giebt, auf welchem alle Werthe der Function Z_1 liegen, die den Verzweigungspunkten

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$$

der Fläche $\mathfrak{T}^1$ entsprechen, und dass z auf der Peripherie des Einheitskreises verbleibt, wenn Z_1 die Peripherie von K durchläuft.

Da wir durch eine lineare Function den Kreis K auf den Einheitskreis abbilden können, so folgt, dass wir uns die Function Z_1 von vornherein so gewählt denken können, dass wenn

$$|Z_1| = 1$$

ist, auch z dem absoluten Betrage nach gleich Eins wird. Die so bestimmte Function Z_1 enthält noch drei reale willkürliche Constanten, indem der Ausdruck

$$\frac{\alpha Z_1 + \beta}{\gamma Z_1 + \delta}, \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

eine ebenso wie Z_1 beschaffene Function von z liefert, wenn die projective Substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

eine Verschiebung in Bezug auf den Einheitskreis darstellt.

Die vorhin behandelte Function

$$\zeta_1 = \varphi_1(\eta)$$

ist offenbar eine solche wie Z_1 beschaffene Function.

Für diese Function Z_1 von z gelten nun in Bezug auf ihre Zweige genau dieselben Gesetze wie die, welche wir für die Function ζ_1 gefunden hatten, wenn wir noch die Bedingung hinzufügen, dass einem bestimmten Werthe von z, der innerhalb des Einheitskreises liegt, ein Werth des Hauptzweiges der Function Z_1 entsprechen soll, der ebenfalls im Innern des Einheitskreises gelegen ist. Es ist also, wenn $Z_1^{(0)}$ den Hauptzweig,

$$Z_1^{(1)}, Z_1^{(2)}, \cdots Z_1^{(\sigma+1)}$$

die übrigen Zweige der Function Z_1 darstellen,

$$\text{für } |z| < 1, \quad |Z_1^{(0)}| < 1, \quad |Z_1^{(\varkappa)}| > 1 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma+1).$$

Wir wollen nun über die drei realen Constanten, von denen Z_1 noch abhängt, so disponiren, dass Z_1 mit z gleichzeitig verschwindet (dadurch sind zwei reale Constanten festgelegt), und dass einem gewissen realen innerhalb des Einheitskreises gelegenen Werthe b_1 von Z_1 ein ebenfalls realer und innerhalb des Einheitskreises gelegener Werth b von z entspricht. Die so vollständig fixirte Function von z wollen wir in Uebereinstimmung mit der bereits benutzten Bezeichnung ζ_1 nennen. Da für $|\zeta_1| = 1$ auch $|z| = 1$ ist, so entsprechen nach dem Riemann'schen Fortsetzungsprincipe harmonischen Werthen von ζ_1 auch harmonische Werthe von z, es ist folglich für $\zeta_1 = \infty$ auch z unendlich gross.

Denken wir uns nun die Gleichung, der ζ_1 als Function von z genügt, so besitzt dieselbe, da z rational durch ζ_1 ausdrückbar sein muss, in z lineare Coefficienten, und der Coefficient von $\zeta_1^{\sigma+2}$ ist, da z und ζ_1 gleichzeitig unendlich werden, eine Constante, die wir gleich Eins nehmen können. Da ferner ζ_1 und z auch gleichzeitig verschwinden, ist der Coefficient der nullten Potenz von ζ_1 mit z proportional, also etwa gleich

$$c_0 z,$$

und zwar ist, wie man ohne Schwierigkeit einsieht,

$$|c_0| = 1.$$

Nun haben wir aber

$$(-1)^{\sigma+2} c_0 z = \zeta_1^{(0)} \zeta_1^{(1)} \cdots \zeta_1^{(\sigma+1)},$$

es ist also, wenn z dem absoluten Betrage nach kleiner wie Eins ist,

(29) $$|\zeta_1^{(0)}| < |z|.$$

338. Wiederholte Anwendung des zur Bildung der algebraischen Function angegebenen Verfahrens.

Wir können nun dasselbe Verfahren, welches wir auf die Function

$$z = f(\eta)$$

angewandt haben, um zu der Function

$$\zeta_1 = \varphi_1(\eta)$$

zu gelangen, auch auf diese ebenso wie $f(\eta)$ beschaffene Fuchs'sche Function anwenden. D. h. mit anderen Worten, wir bilden die Spiegelbilder von $\mathfrak{R}^1$ in Bezug auf die sämmtlichen Seiten dieses Bereiches und vereinigen dieselben mit $\mathfrak{R}^1$ zu einem neuen Bereiche $\mathfrak{R}^2$, der von

$$\sigma_2 + 1 = \sigma_1(\sigma_1 + 1)$$

Kreisbogen begrenzt wird und dessen sämmtliche Winkel gleich Null sind; die conforme Abbildung dieses Bereiches $\mathfrak{R}^2$ auf das Innere des Einheitskreises einer ζ_2-Ebene wird durch eine Function

$$\zeta_2 = \varphi_2(\eta)$$

vermittelt, die zu einer symmetrischen Fuchs'schen Gruppe ϑ^2 gehört. Von der Gruppe ϑ^2 ist evident, dass sie ebenso aus ϑ^1 hervorgeht, wie ϑ^1 aus ϑ.

Bilden wir nämlich aus den zu den Seiten von $\mathfrak{R}^1$ gehörigen Spiegelungen

$$\Sigma_i^1 \Sigma_x^1 \Sigma_i^1{}' \eta \qquad (i, x = 0, 1, 2, \cdots \sigma_1, i \neq x),$$

die wir etwa in der dem Schema (23) (S. 279) entsprechenden Reihenfolge durch

$$\Sigma_0^2, \Sigma_1^2, \cdots \Sigma_{\sigma_2}^2$$

bezeichnen, als Basis einer Gruppe $\overline{\vartheta}^2$, so ist jede Operation $\overline{S}^2$ von $\overline{\vartheta}^2$ nur auf eine Weise in der Form

$$\overline{S}^2 = \Sigma^2_{i_1} \Sigma^2_{i_2} \cdots \Sigma^2_{i_{\nu_2}}$$

darstellbar, wo

$$i_1, i_2, \cdots i_{\nu_2} = 0, 1, 2, \cdots \sigma_2; \quad i_1 \neq i_2, i_2 \neq i_3, \cdots$$

ist. Wir setzen

$$\nu_2 = \overline{\mathrm{Ind}}_2 \, \overline{S}^2,$$

dann ist ϑ^2 diejenige ausgezeichnete Untergruppe von $\overline{\vartheta}^2$, die aus den Operationen mit geradzahligem Index, d. h. aus den in $\overline{\vartheta}^2$ enthaltenen projectiven Substitutionen von η gebildet wird.

Jede Operation von $\overline{\vartheta}^1$ ist nach den Ergebnissen der Nr. 335 (S. 280) in der Form

$$\overline{S}^1 = \overline{S}^2 \cdot \Sigma_\varkappa^1$$

darstellbar, wo $\overline{S}^2$ eine Operation von $\overline{\vartheta}^2$ und $\Sigma_\varkappa^1$ eine der Operationen der Basis von $\overline{\vartheta}^1$ oder die identische Operation 1 bedeutet, und wir haben

(30) $$\overline{\mathrm{Ind}}_2 \, \overline{S}^2 < \overline{\mathrm{Ind}}_1 \, \overline{S}^1.$$

Die Beziehung zwischen der Gruppe $\overline{\vartheta}^2$ und der ursprünglichen Gruppe $\overline{\vartheta}$ lässt sich hiernach durch die Gleichung

(31) $$\overline{\vartheta} = \overline{\vartheta}^2 (1, \Sigma_0^1, \Sigma_1^1, \cdots \Sigma^1_{\sigma_1}) (1, \Sigma_0, \Sigma_1, \cdots \Sigma_\sigma)$$

wiedergeben, d. h. jede Operation $\overline{S}$ von $\overline{\vartheta}$ kann in der Form

(32) $$\overline{S} = \overline{S}^2 \Sigma^1_{\varkappa_1} \Sigma_{\varkappa_0}$$

dargestellt werden, wo $\overline{S}^2$ eine Operation von $\overline{\vartheta}^2$, $\Sigma^1_{\varkappa_1}$ eine der Operationen

$$1, \Sigma_0^1, \Sigma_1^1, \cdots \Sigma^1_{\sigma_1}$$

und $\Sigma_{\varkappa_0}$ eine der Operationen

$$1, \Sigma_0, \Sigma_1, \cdots \Sigma_\sigma$$

bedeutet. Bei der Darstellung (32) ist dann nach (30) und (28) (Nr. 335, S. 280)

$$\overline{\mathrm{Ind}}_2 \, \overline{S}^2 \leqq \overline{\mathrm{Ind}}_0 \, \overline{S} - 2,$$

d. h. also, Operationen von $\overline{\vartheta}$, deren Index in Bezug auf $\overline{\vartheta}$ nicht grösser ist wie 2, müssen nothwendig in dem Quotienten

$$Q_2 = (1, \Sigma_0^1, \Sigma_1^1, \cdots \Sigma_{\sigma_1}^1)(1, \Sigma_0, \Sigma_1, \cdots \Sigma_\sigma)$$

der Gruppen $\bar{\vartheta}$ und $\bar{\vartheta}^2$ enthalten sein.

Durch die Function ζ_2 ist ζ_1 und folglich auch z rational darstellbar; die algebraische Function ζ_2 von ζ_1 ist eine eindeutige Function des Ortes in einer über der ζ_1-Ebene ausgebreiteten $(\sigma_1 + 2)$-blättrigen Riemann'schen Fläche $\mathfrak{T}^2$, die mittelst der Punkte

$$a_1^1, a_2^1, \cdots a_{\sigma_1+1}^1$$

genau ebenso gebildet ist, wie $\mathfrak{T}^1$ mittelst der Punkte

$$a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}.$$

Bezeichnen wir wieder mit $\zeta_2^{(0)}$ den Hauptzweig der Function ζ_2 von ζ_1, so ist, wenn $|\zeta_1|$ kleiner als Eins ist, nach (29) auch

$$|\zeta_2^{(0)}| < |\zeta_1|,$$

sofern wir die nur bis auf drei reale Constanten bestimmte Function ζ_2 so einrichten, dass sie mit ζ_1 gleichzeitig verschwindet.

So fahren wir nun fort, d. h. wir bilden aus

$$\zeta_2 = \varphi_2(\eta)$$

eine Function

$$\zeta_3 = \varphi_3(\eta)$$

in ähnlicher Weise wie ζ_2 aus ζ_1 und ζ_1 aus z gebildet worden war, aus dieser eine Function

$$\zeta_4 = \varphi_4(\eta),$$

u. s. w., allgemein sei

$$\zeta_\lambda = \varphi_\lambda(\eta)$$

die zu der symmetrischen Fuchs'schen Gruppe ϑ^λ gehörige Fuchs'sche Function, welche die eindeutig conforme Abbildung des Bereiches $\mathfrak{R}^\lambda$ auf das Innere des Einheitskreises der ζ_λ-Ebene vermittelt. $\mathfrak{R}^\lambda$ geht aus $\mathfrak{R}^{(\lambda-1)}$ durch Vereinigung dieses Bereiches mit seinen Spiegelbildern in Bezug auf sämmtliche Seiten desselben hervor.

Die Spiegelungen in Bezug auf die Seiten von $\mathfrak{R}^\lambda$, deren Anzahl gleich

$$\sigma_\lambda + 1 = \sigma_{\lambda-1}(\sigma_{\lambda-1} + 1)$$

ist, sind die in einer bestimmten Reihenfolge zu nehmenden

$$\Sigma_i^{\lambda-1} \Sigma_\varkappa^{\lambda-1} \Sigma_i^{\lambda-1}{}' \eta \qquad (i, \varkappa = 0, 1, 2, \cdots \sigma_{\lambda-1};\ i \neq \varkappa),$$

wir bezeichnen sie mit

$$\Sigma_i^{\lambda\,\prime}\eta \qquad (i=0,1,\cdots\sigma_\lambda).$$

Die aus denselben als Basis gebildete Gruppe $\overline{\vartheta}^\lambda$ enthält ϑ^λ als ausgezeichnete Untergruppe, indem, wenn wir irgend eine Substitution $\overline{S}^\lambda$ von $\overline{\vartheta}^\lambda$ in der Form

$$\overline{S}^\lambda = \Sigma_{i_1}^\lambda \Sigma_{i_2}^\lambda \cdots \Sigma_{i_{\nu_\lambda}}^\lambda$$

darstellen, wo

$$i_1, i_2, \cdots i_{\nu_\lambda} = 0, 1, 2, \cdots \sigma_\lambda; \qquad i_1 \neq i_2, i_2 \neq i_3, \cdots$$

ist, und

$$\nu_\lambda = \overline{\mathrm{Ind}}_\lambda\, \overline{S}^\lambda$$

setzen, in ϑ^λ diejenigen Operationen von $\overline{\vartheta}^\lambda$ enthalten sind, deren Index ν_λ eine gerade Zahl ist.

Die Beziehung zwischen $\overline{\vartheta}^\lambda$ und $\overline{\vartheta}$ wird, wie man sofort übersieht, durch die Gleichung

$$\overline{\vartheta} = \overline{\vartheta}^\lambda \cdot Q_\lambda \tag{33}$$

dargestellt, wo Q_λ durch das symbolische Product

$$Q_\lambda = \left(1, \Sigma_0^{\lambda-1}, \Sigma_1^{\lambda-1}, \cdots \Sigma_{\sigma_{\lambda-1}}^{\lambda-1}\right)\left(1, \Sigma_0^{\lambda-2}, \Sigma_1^{\lambda-2}, \cdots \Sigma_{\sigma_{\lambda-2}}^{\lambda-2}\right)\cdots$$
$$\cdots(1, \Sigma_0, \Sigma_1, \cdots \Sigma_\sigma)$$

gegeben ist. D. h. bedeutet $\overline{S}$ irgend eine Operation von $\overline{\vartheta}$, so ist $\overline{S}$ in der Form

$$\overline{S} = \overline{S}^\lambda T_\varkappa \tag{34}$$

darstellbar, wo $\overline{S}^\lambda$ eine Operation von $\overline{\vartheta}^\lambda$ und $T_\varkappa$ eine Operation von Q_λ bedeutet.

Aus den Gleichungen (28) (Nr. 335, S. 280), (31) und den analogen Gleichungen für

$$\lambda = 2, 3, \cdots$$

folgt, dass bei der Darstellung (34) stets

$$\overline{\mathrm{Ind}}_0\, \overline{S} > \overline{\mathrm{Ind}}_\lambda\, \overline{S}^\lambda + \lambda - 1 \tag{35}$$

sein muss, wenn $\overline{S}^\lambda$ eine von 1 verschiedene Operation der Gruppe $\overline{\vartheta}_\lambda$ ist. Wir haben also den Satz:

Alle Operationen der Gruppe $\overline{\vartheta}$, deren Index in Bezug auf diese Gruppe nicht grösser ist wie λ, sind unter den Operationen von Q_λ enthalten.

Die Anzahl der Operationen von Q_λ ist offenbar gleich

$$N_\lambda = (\sigma_{\lambda-1} + 2) N_{\lambda-1} = \prod_{\varkappa=0}^{\lambda-1} (\sigma_\varkappa + 2) \qquad (\sigma_0 = \sigma)$$

und liefert zugleich den Grad der algebraischen Gleichung mit in z linearen Coefficienten, der ζ_λ als Function von z Genüge leistet. Bedeutet $\zeta_\lambda^{(0)}$ den Hauptzweig der algebraischen Function ζ_λ von $\zeta_{\lambda-1}$, so ist ähnlich wie für $\lambda = 1$, wenn $\zeta_{\lambda-1}$ dem absoluten Betrage nach kleiner wie Eins ist,

$$|\zeta_\lambda^{(0)}| < |\zeta_{\lambda-1}|.$$

339. Grenzfunction des gefundenen Algorithmus algebraischer Functionen bei Betrachtung der Hauptzweige.

Unter dem Hauptzweige der algebraischen Function ζ_λ von z verstehen wir Folgendes. Wir nehmen zunächst ζ_λ als Function von $\zeta_{\lambda-1}$ und fixiren den Hauptzweig dieser Function; dann setzen wir hierin für $\zeta_{\lambda-1}$ den Hauptzweig $\zeta_{\lambda-1}^{(0)}$ der Function $\zeta_{\lambda-1}$ von $\zeta_{\lambda-2}$, hierin für $\zeta_{\lambda-2}$ den Hauptzweig $\zeta_{\lambda-2}^{(0)}$ der Function $\zeta_{\lambda-2}$ von $\zeta_{\lambda-3}$ u. s. w. ein. Den so bestimmten Zweig der Function ζ_λ von z bezeichnen wir durch $\overset{0}{\zeta}_\lambda$ und nennen ihn den Hauptzweig.

Wenn wir dann z auf das Innere des Einheitskreises beschränken, so befindet sich zufolge der Ungleichung

$$|\zeta_1^{(0)}| < |z|$$

auch $\zeta_1^{(0)}$ innerhalb des Einheitskreises, also gilt die Ungleichung

$$|\overset{0}{\zeta}_2| < |\zeta_1^{(0)}|,$$

und ebenso ist allgemein

$$(\alpha) \qquad |\overset{0}{\zeta}_\lambda| < |\overset{0}{\zeta}_{\lambda-1}| < \cdots < |z|,$$

wenn z dem absoluten Betrage nach kleiner ist wie Eins.

Hieraus folgt, dass die Functionenfolge

$$|z|, \quad |\zeta_1^{(0)}|, \quad |\overset{0}{\zeta}_2|, \cdots$$

sich einer bestimmten endlichen Grenzfunction

$$\lim_\lambda |\overset{0}{\zeta}_\lambda| = \mathsf{H}$$

nähert, sofern

$$|z| < 1$$

bleibt. Es ist nun auch sofort möglich, die Beziehung dieser Grenzfunction zu der Function η von z anzugeben.

Die Operationen von Q_λ entsprechen eindeutig den verschiedenen Halbbereichen (vgl. Nr. 334, S. 277) der der Gruppe $\bar{\vartheta}$ entsprechender Theilung des Einheitskreises der η-Ebene, welche zu dem Bereiche $\mathfrak{R}^\lambda$ vereinigt worden sind, indem nämlich diese Halbbereiche aus R_0' durch Anwendung der Operationen von Q_λ hervorgehen.

Wir wollen uns η so eingerichtet denken, dass der Punkt $\eta = 0$ im Innern des Bereiches R_0' liegt, und dass für $\eta = 0$ die Function $z = f(\eta)$ verschwindet; überdies setzen wir auch gleich fest, dass der reale Werth $z = b$ für einen ebenfalls realen und innerhalb R_0' gelegenen Werth B von η zum Vorschein kommen soll. Diesen Forderungen können wir stets Genüge leisten, da wir η durch irgend eine linear gebrochene Function

$$\frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

ersetzen können, worin die Substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

eine Verschiebung in Bezug auf den Einheitskreis darstellt.

Denken wir uns dann um den Punkt $\eta = 0$ als Mittelpunkt einen Kreis beschrieben, der ganz innerhalb des Bereiches $\mathfrak{R}^\lambda$ verläuft, und sei ϱ_λ der Radius des grössten Kreises, der diese Beschaffenheit besitzt. Dann ist also, wenn η auf der Begrenzung von $\mathfrak{R}^\lambda$ verbleibt,

$$\varrho_\lambda < |\eta| \leq 1,$$

und da die Function ζ_λ für die Punkte der Begrenzung von $\mathfrak{R}^\lambda$ dem absoluten Betrage nach gleich Eins wird, so haben wir für diese Werthe von η

(36) $$|\eta| \leq |\zeta_\lambda| < \frac{|\eta|}{\varrho_\lambda},$$

und somit auch

(36 a) $$\log|\eta| \leq \log|\zeta_\lambda| < \log\frac{|\eta|}{\varrho_\lambda}.$$

Setzen wir nun

$$\eta = p + qi,$$

so ist der Logarithmus des absoluten Betrages von ζ_λ eine Function der beiden realen Variabeln p, q, die der partiellen Differentialgleichung

(37) $$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} = 0$$

Genüge leistet und innerhalb des Bereiches $\mathfrak{R}^\lambda$ mit Ausschluss der Stelle $\eta = 0$ eindeutig, endlich und stetig ist. Die Functionen

$$(38) \qquad \log|\eta| - \log|\zeta_\lambda|, \qquad \log|\zeta_\lambda| - \log\left|\frac{\eta}{\varrho_\lambda}\right|$$

genügen folglich derselben partiellen Differentialgleichung und sind, da für $\eta = 0$ sowohl z als auch alle Functionen

$$\zeta_1, \zeta_2, \cdots$$

verschwinden, innerhalb des ganzen Bereiches $\mathfrak{R}^\lambda$ eindeutig, endlich und stetig. Zufolge der Ungleichung (36a) ist keine der beiden Functionen (38) auf der Begrenzung von $\mathfrak{R}^\lambda$ positiv, nach einem bekannten Satze können folglich die Functionen (38) auch im Innern von $\mathfrak{R}^\lambda$ niemals positiv sein. D. h.:

Die Ungleichung (36a) und somit auch die Ungleichung (36) gilt für alle Werthe von η, die im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}^\lambda$ liegen.

Denken wir uns die Operationen der Gruppe $\bar{\vartheta}$ nach der Grösse ihrer Indices oder Gewichte angeordnet und jedem der Halbbereiche, die aus R_0' durch Anwendung der Operationen von $\bar{\vartheta}$ hervorgehen, den Index der betreffenden Operation als sein Gewicht beigelegt. Wenn dann ϱ irgend eine positive Zahl bedeutet, die kleiner ist als Eins, so ist es offenbar stets möglich, eine positive ganze Zahl m so anzugeben, dass der Bereich, der durch Vereinigung aller Halbbereiche von den Gewichten

$$0, 1, 2, \cdots m$$

entsteht, den mit dem Radius ϱ um den Punkt $\eta = 0$ als Mittelpunkt beschriebenen Kreis ganz in sich enthält.

Bedeutet nun ϱ irgend eine positive Zahl, die um ein Angebbares kleiner ist wie Eins, so bestimmen wir die zu diesem ϱ gehörige ganze Zahl m. Nach dem in der Nr. 338 (S. 294) bewiesenen Satze enthält dann der zur Gruppe $\bar{\vartheta}^m$ gehörige Quotient Q_m alle Operationen von ϑ, deren Indices nicht grösser sind wie m, und folglich enthält der Bereich $\mathfrak{R}^m$ alle Halbbereiche der ursprünglichen Theilung, deren Gewichte die Zahl m nicht übertreffen.

Wir haben demnach zufolge der Ungleichung (36) für Werthe von η, die innerhalb $\mathfrak{R}^m$ liegen,

$$|\eta| \leqq |\zeta_m| < \frac{|\eta|}{\varrho}$$

und a potiori für jedes ganzzahlige positive τ

$$|\eta| \leqq |\zeta_{m+\tau}| < \left|\frac{\eta}{\varrho}\right|.$$

Lassen wir nun ϱ gegen Eins convergiren, so folgt hieraus

$$\lim_{\lambda} |\zeta_\lambda| = |\eta|,$$

d. h. der Grenzwerth H, dem die Functionenfolge

$$|z|,\ |\zeta_1^{(0)}|,\ |\overset{0}{\zeta}_2|,\ |\overset{0}{\zeta}_3|,\ \cdots$$

zustrebt, ist nichts anderes wie der absolute Betrag des innerhalb R_n' gelegenen Werthes η, der dem zum Ausgangspunkte genommenen z-Werthe entspricht.

340. Beweis für die Existenz der Grenzfunction.

Betrachten wir nun die der partiellen Differentialgleichung (37) genügende Function

$$U_\lambda = \log \left|\frac{\zeta_\lambda}{\eta}\right|$$

der beiden realen Variabeln p, q, so ist nach (36a), wenn η innerhalb $\mathfrak{R}^\lambda$ verbleibt,

$$(39) \qquad 0 < U_\lambda < \log \frac{1}{\varrho_\lambda},$$

und ferner

$$\lim_{\lambda} \varrho_\lambda = 1.$$

Die Ungleichung (39) besteht also jedenfalls, wenn

$$|\eta| < \bar{\varrho}_\lambda < \varrho_\lambda$$

ist, wo $\bar{\varrho}_\lambda$ sich von ϱ_λ um ein Angebbares unterscheidet. Hieraus können wir nun den Schluss ziehen, dass nicht nur die absoluten Beträge der ζ_λ dem Grenzwerthe $|\eta|$ zustreben, sondern dass die Grössen ζ_λ selbst sich der Grenze η nähern.

Hat man nämlich eine innerhalb eines Kreises mit dem Mittelpunkte $p = 0$, $q = 0$ und dem Radius ϱ eindeutige, endliche und stetige Function $u(p, q)$, die der partiellen Differentialgleichung (37) Genüge leistet, so liefert (vergl. Nr. 212, Bd. II, 1, S. 323) der Ausdruck

$$v(p, q) = \int_{(\alpha,\beta)}^{(p,q)} \left(\frac{\partial u}{\partial p}\, dq - \frac{\partial u}{\partial q}\, dp\right),$$

wo (α, β) irgend ein dem Innern jenes Kreises angehöriges Werthepaar bedeutet und die Integration längs eines beliebigen ebenfalls innerhalb des gedachten Kreises verlaufenden Weges zu erstrecken ist, den Coefficienten von i in einer monogenen Function der complexen Variabeln η

$$u(p, q) + iv(p, q) = f(\eta),$$

deren realer Theil gleich $u(p, q)$, und die für

$$|\eta| < \varrho$$

eindeutig und allenthalben regulär ist. Also wird der Ausdruck

$$V_\lambda = \operatorname{Arg} \frac{\zeta_\lambda}{\eta},$$

der in der monogenèn Function von η

$$\log \frac{\zeta_\lambda}{\eta}$$

den Coefficienten von i bildet, in der Form

$$V_\lambda = \int_{(\alpha_\lambda \beta_\lambda)}^{(p,q)} \left(\frac{\partial U_\lambda}{\partial p} dq - \frac{\partial U_\lambda}{\partial q} dp \right)$$

darstellbar sein müssen, wo $(\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$ ein Werthepaar bedeutet, für welches V_λ gleich Null wird.

Nun besitzt aber zufolge der für die Function ζ_1 von z und damit auch für die Functionen ζ_2 von ζ_1 u. s. w. getroffenen Festsetzung (Nr. 337, S. 290) und zufolge der für η (Nr. 339, S. 296) gemachten Annahme, für den realen Werth $\eta = B$, die Function z von η den realen Werth b und die Function ζ_λ einen ebenfalls realen Werth. Wir können folglich für jeden Werth des Index λ den Ausdruck V_λ durch die Formel

$$V_\lambda = \int_{(B,0)}^{(p,q)} \left(\frac{\partial U_\lambda}{\partial p} dq - \frac{\partial U_\lambda}{\partial q} dp \right)$$

definiren.

Es kommt nun darauf an zu zeigen, dass die beiden Grenzwerthe

(40) $$\lim_\lambda \frac{\partial U_\lambda}{\partial q} = \lim_\lambda \frac{\partial U_\lambda}{\partial p} = 0$$

sind, denn dann folgt aus der eben gegebenen Darstellung, dass auch

$$\lim_\lambda V_\lambda = 0$$

sein muss, und hieraus ergiebt sich mit Rücksicht auf

$$\lim_\lambda U_\lambda = 0$$

ohne Weiteres, dass in der That

(41) $$\lim_\lambda \zeta_\lambda = \eta$$

ist.

Wir wissen, dass U_λ der Ungleichung (39) genügt, wenn

$$|\eta| < \bar{\varrho}_\lambda < \varrho_\lambda$$

ist. Weiss man allgemein von einer der partiellen Differentialgleichung (37) genügenden Function $u(p, q)$, dass dieselbe innerhalb des Kreises

(42) $$p^2 + q^2 = \varrho^2$$

eindeutig, endlich und stetig ist und dem absoluten Betrage nach stets kleiner bleibt wie eine bestimmte Grösse M, so kann man auf folgende Weise für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial p}, \quad \frac{\partial u}{\partial q}$$

dieser Function eine obere Grenze angeben.

Wir denken uns $u(p, q)$ innerhalb des Kreises (42) durch das Poisson'sche Integral (vergl. Nr. 212, Bd. II, 1, S. 324) dargestellt:

$$u(p, q) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\varrho^2 - (p^2 + q^2)}{(p - \bar{p})^2 + (q - \bar{q})^2}\, u(\bar{p}, \bar{q})\, ds,$$

wo $(\bar{p}, \bar{q})$ einen auf der Peripherie des Kreises (42) veränderlichen Punkt,

$$ds = \sqrt{\bar{p}^2 + \bar{q}^2}\ \mathrm{arctg}\, \frac{\bar{q}}{\bar{p}}$$

das Bogenelement des Kreises in diesem Punkte bedeutet, und wo die Integration über die ganze Kreisperipherie zu erstrecken ist. Differentiiren wir dann z. B. nach p unter dem Integralzeichen, was jedenfalls erlaubt ist, wenn

(43) $$p^2 + q^2 < \bar{\varrho}^2 < \varrho^2$$

ist, wo $\bar{\varrho}$ eine positive Grösse bedeutet, die um ein Angebbares kleiner ist wie ϱ, so erhalten wir

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\varrho^2 - (p^2 + q^2)}{(p - \bar{p})^2 + (q - \bar{q})^2}\left\{\frac{-2p}{\varrho^2 - (p^2 + q^2)} + \frac{-2(p - \bar{p})}{(p - \bar{p})^2 + (q - \bar{q})^2}\right\} u(\bar{p}, \bar{q})\, ds.$$

Nun ist zufolge der Ungleichung (43)

$$\varrho^2 - (p^2 + q^2) > \varrho^2 - \bar{\varrho}^2 > (\varrho - \bar{\varrho})^2,$$

und ebenso auch

$$(p - \bar{p})^2 + (q - q)^2 > (\varrho - \bar{\varrho})^2,$$

ferner ist offenbar

$$|-2p - 2(p - \bar{p})| < 6\varrho;$$

wir finden demnach, da

$$|u(\bar{p}, \bar{q})| < M$$

sein sollte, die Ungleichung

$$\left|\frac{\partial u}{\partial p}\right| < \frac{1}{\varrho}\,\frac{6M}{\left(1-\frac{\bar{\varrho}}{\varrho}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\frac{\varrho^2-(p^2+q^2)}{(p-\bar{p})^2+(q-\bar{q})^2}\,ds,$$

und da der zweite Factor auf der rechten Seite offenbar den Werth Eins hat,

$$\left|\frac{\partial u}{\partial p}\right| < \frac{1}{\varrho}\,\frac{6M}{\left(1-\frac{\bar{\varrho}}{\varrho}\right)^2}.$$

Derselben Ungleichung genügt, wie man sofort übersieht, auch

$$\left|\frac{\partial u}{\partial q}\right|.$$

Wir haben demnach für die partiellen Ableitungen der Function U_λ die Ungleichungen

$$\left|\frac{\partial U_\lambda}{\partial p}\right| < \frac{1}{\varrho_\lambda}\,\frac{6\log\frac{1}{\varrho_\lambda}}{\left(1-\frac{\bar{\varrho}_\lambda}{\varrho_\lambda}\right)^2} > \left|\frac{\partial U_\lambda}{\partial q}\right|,$$

und folglich ist, da ϱ_λ mit wachsendem λ dem Werthe Eins zustrebt,

$$\lim_\lambda \frac{\partial U_\lambda}{\partial p} = \lim_\lambda \frac{\partial U_\lambda}{\partial q} = 0,$$

was zu beweisen war.

Wir haben also den wichtigen Satz:

Gehen wir von der zu der symmetrischen Fuchs'schen Gruppe ϑ gehörigen Fuchs'schen Function z von η zu der transformirten Fuchs'schen Function ζ_1 über, dann durch Wiederholung derselben Transformation von ζ_1 zu ζ_2 und fahren so bis in's Unbegrenzte fort; so nähern sich die auf diese Weise gebildeten Functionen einer wohlbestimmten Grenzfunction, und diese Grenzfunction ist nichts anderes wie die unabhängige Variable η.

Viertes Kapitel.

341. Definition der innerhalb und ausserhalb des Einheitskreises existirenden Grenzfunction.

Wir waren von der Function z von η ausgegangen, die durch eine bestimmte Gruppe ϑ definirt war, und die also die bestimmten auf der Peripherie des Einheitskreises gelegenen Werthe

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$$

ausliess. Denken wir uns nun, es seien diese $\sigma + 1$ Punkte $a_\varkappa$ irgendwie auf der Peripherie des Einheitskreises der z-Ebene in dieser Aufeinanderfolge gegeben, dann können wir mit Hülfe der eben dargelegten Methode die Existenz einer Function η der unabhängigen Variabeln z nachweisen, deren Umkehrung eine Fuchs'sche Function liefert, die nur innerhalb des Einheitskreises der η-Ebene existirt und die beliebig vorgeschriebenen auf dem Einheitskreise gelegenen Punkte $a_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma + 1$) auslässt.

In der That können wir, wie bereits in der Nr. 337 (S. 288) hervorgehoben wurde, aus z die algebraische Function ζ_1 von z herstellen, wenn nur die Lage der Punkte $a_\varkappa$ auf dem Einheitskreise gegeben ist. Ebenso kann der ganze Algorithmus der Functionen

$$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \cdots$$

in völlig bestimmter Weise hergestellt und auch immer der Hauptzweig $\overset{0}{\zeta}_\lambda$ einer jeden der successive auftretenden Functionen ζ_λ ausgesondert werden.

Für die so definirten Hauptzweige besteht dann die Ungleichung (α) der Nr. 339 (S. 295), aus welcher für $|z| < 1$ die Existenz der Grenzfunction

$$\lim_{\lambda} |\overset{0}{\zeta}_\lambda| = \mathsf{H}$$

folgt. Genau so wie in der Nr. 340 (S. 298) zeigt man nun, dass nicht nur die absoluten Beträge der $\overset{0}{\zeta}_\lambda$, sondern dass auch diese Grössen

selbst sich einer bestimmten endlichen Grenzfunction nähern; wir bezeichnen diese Grenzfunction mit

$$\lim_{\lambda} \overset{0}{\zeta}_{\lambda} = \overset{0}{\eta}; \tag{1}$$

dieselbe ist dann nur für $|z| < 1$ definirt.

Wenn wir, statt das Innere des Einheitskreises zu betrachten, das Aeussere dieses Kreises der Untersuchung zu Grunde legen wollten, so hätten wir für die Function ζ_1 von z nicht $\zeta_1^{(0)}$, sondern $\zeta_1^{(\sigma+1)}$ als den Hauptzweig zu definiren. Als Hauptzweig der Function ζ_λ von z wäre dann derjenige Zweig $\overset{\sigma+1}{\zeta_\lambda}$ anzusehen, der aus dem Zweige

$$\zeta_\lambda^{(\sigma_{\lambda-1}+1)}$$

der algebraischen Function ζ_λ von $\zeta_{\lambda-1}$ entsteht, wenn wir an die Stelle von $\zeta_{\lambda-1}$ setzen

$$\zeta_{\lambda-1}^{(\sigma_{\lambda-2}+1)},$$

hierin wieder an die Stelle von $\zeta_{\lambda-2}$ den Zweig

$$\zeta_{\lambda-2}^{(\sigma_{\lambda-3}+1)}$$

u. s. w. Nach den Ergebnissen der Nr. 336 (S. 284) besteht dann für diese Zweige $\overset{\sigma+1}{\zeta_\lambda}$ die fortlaufende Ungleichung

$$|\overset{\sigma+1}{\zeta_\lambda}| > |\overset{\sigma+1}{\zeta_{\lambda-1}}| > \cdots > |\zeta_1^{(\sigma+1)}| > |z| \tag{β}$$

für Werthe von z, die dem absoluten Betrage nach grösser sind wie Eins, und aus (β) folgt nun die Existenz einer bestimmten endlichen Grenzfunction

$$\lim_{\lambda} |\overset{\sigma+1}{\zeta_\lambda}| = \bar{H},$$

die wieder nach dem Verfahren der Nr. 340 (S. 298) auf die Existenz einer Grenzfunction

$$\lim_{\lambda} \overset{\sigma+1}{\zeta_\lambda} = \overset{\sigma+1}{\eta} \tag{2}$$

zu schliessen gestattet, die für $|z| > 1$ definirt ist.

Wir werden uns auf die Untersuchung der durch die Gleichung (1) definirten Function $\overset{0}{\eta}$ beschränken, da für die Function $\overset{\sigma+1}{\eta}$ im Wesentlichen dieselben Betrachtungen massgebend sind.

Die Function $\overset{0}{\eta}$ ist durch den Algorithmus von algebraischen Functionen

$$\zeta_1, \zeta_2, \cdots$$

der unabhängigen Variabeln z definirt, für Werthe von z, deren absoluter Betrag kleiner ist wie Eins. Es handelt sich darum, diese Function nach dem ausserhalb des Einheitskreises der z-Ebene gelegenen Gebiete hin fortzusetzen und die Eigenschaften der auf diese Weise entstehenden monogenen Function η von z zu erforschen.

342. Einführung der ω-Operationen und Betrachtung der aus denselben gebildeten Gruppen.

Indem wir den längs der Peripherie l des Einheitskreises der z-Ebene gelegten, die Punkte $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$ verbindenden Schnitt $\bar{l}$ in's Auge fassen, der durch das zwischen a_1 und $a_{\sigma+1}$ befindliche Stück l_0 der Peripherie zu l ergänzt wird, definiren wir einen von einem beliebigen Punkte z ausgehenden einfachen positiven Umlauf um den Punkt $a_\varkappa$ als eine auf z auszuübende Operation $\varpi_\varkappa$, wenn dieser Umlauf so ausgeführt wird, dass wir zuerst das zwischen $a_\varkappa, a_{\varkappa+1}$ gelegene Stück von $\bar{l}$ in der Richtung vom negativen nach dem positiven Ufer hin und dann das zwischen $a_\varkappa, a_{\varkappa-1}$ gelegene Stück von l in der Richtung vom positiven nach dem negativen Ufer hin überschreiten. Die Operation ϖ_1 ist dann einfach ein Umlauf um a_1, wobei dieser Punkt zur Linken bleibt, die Operation $\varpi_{\sigma+1}$ ist durch die Gleichung

$$(3) \qquad \varpi_{\sigma+1} = \varpi_1^{-1} \varpi_2^{-1} \cdots \varpi_\sigma^{-1}$$

definirt, wo $\varpi_\varkappa^{-1}$ dem im entgegengesetzten Sinne vollzogenen Umlaufe $\varpi_\varkappa$ entspricht, und wo allgemein durch das Symbol $\varpi_\alpha \varpi_\beta$ ein Umlauf bezeichnet wird, der demjenigen äquivalent ist, den wir erhalten, wenn wir erst ϖ_α und dann ϖ_β ausführen.

Aus den Operationen

$$\varpi_1, \varpi_2, \cdots \varpi_{\sigma+1}$$

als Basis bilden wir eine Gruppe $\mathfrak{O}$, diese Gruppe ist dann mit der aus $\sigma + 1$ parabolischen projectiven Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_\sigma, A_{\sigma+1},$$

wo

$$A_{\sigma+1} = A_1^{-1} A_2^{-1} \cdots A_\sigma^{-1}$$

ist, gebildeten Gruppe ϑ holoedrisch isomorph.

Wir erweitern nun die Gruppe $\mathfrak{O}$, indem wir eine Operation ω_0 hinzunehmen, die wir als den Uebergang von einem Punkte z nach seinem harmonischen Werthe $'z$ definiren, wobei der Uebergang auf

einem Wege zu vollziehen ist, der die Peripherie des Einheitskreises in einem zwischen $a_{\sigma+1}$, a_1 gelegenen Punkte überschreitet. Für diese Operation ist offenbar

(4) $$\omega_0^2 = 1,$$

und ω_0 ist überdies so beschaffen, dass die Transformation einer beliebigen Operation $\mathfrak{d}$ der Gruppe $\mathfrak{D}$ mit ω_0, d. h.

$$\omega_0 \mathfrak{d} \omega_0$$

wieder eine Operation von $\mathfrak{D}$ liefert. Betrachten wir dann die Operationen

$$\mathfrak{d}, \ \mathfrak{d}\omega_0,$$

wo $\mathfrak{d}$ alle Operationen von $\mathfrak{D}$ durchläuft, so bilden dieselben wiederum eine Gruppe $\mathfrak{Q}$, in welcher $\mathfrak{D}$ als ausgezeichnete Untergruppe enthalten ist.

Für die Gruppe $\mathfrak{Q}$ können wir auf folgende Weise eine Basis herstellen.

Wir gehen z. B. von einem innerhalb des Einheitskreises der z-Ebene gelegenen Punkte z aus und beschreiben einen Weg, der den Schnitt $\bar{l}$ in einem zwischen $a_\varkappa$, $a_{\varkappa+1}$ gelegenen Punkte überschreitet und in dem zu z harmonischen Werthe $'z$ endigt. Diesen Uebergang bezeichnen wir als eine auf z ausgeübte Operation $\omega_\varkappa$. Für dieselbe besteht dann offenbar die Gleichung

(5) $$\omega_\varkappa^2 = 1 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma).$$

Wenn wir dann von dem Punkte $\omega_\varkappa z$ aus auf einem Wege, der den Schnitt $\bar{l}$ in einem zwischen a_i, a_{i+1} gelegenen Punkte überschreitet, zu dem Ausgangspunkte zurückkehren, so wird dies der auf $\omega_\varkappa z$ anzuwendenden Operation

$$\omega_\varkappa \omega_i \omega_\varkappa,$$

also für $i = \varkappa$ wie es sein muss, der Operation

$$\omega_\varkappa^3 = \omega_\varkappa$$

entsprechen.

Lassen wir nun z von irgend einem beliebigen Punkte aus den Umlauf

$$\mathfrak{d}_\varkappa = \varpi_\varkappa \varpi_{\varkappa-1} \cdots \varpi_1$$

vollziehen, der die Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\varkappa$ einfach im positiven Sinne umschliesst, so können wir uns diesen Weg so ausgeführt denken, dass z zuerst nach seinem harmonischen Werthe geht und dann wieder in seine Ausgangslage zurückkehrt. Liegt z innerhalb des Einheits-

kreises, so ist also zunächst auf z die Operation ω_x und dann auf $\omega_x z$ die Operation

$$\omega_x \omega_0 \omega_x,$$

die dem Uebergange längs eines den Schnitt l zwischen $a_{\sigma+1}$, a_1 überschreitenden Weges entspricht, auszuüben, so dass mit Rücksicht auf (5)

$$\mathfrak{o}_x = \omega_x \omega_0 \omega_x \omega_x = \omega_x \omega_0$$

gefunden wird. Liegt z ausserhalb des Einheitskreises, so ist zuerst die Operation ω_0 und dann auf den innerhalb des Einheitskreises gelegenen Punkt $\omega_0 z$ die Operation ω_x anzuwenden, so dass sich auch wieder

$$\mathfrak{o}_x = \omega_x \omega_0$$

ergiebt.

Da aber die Operationen $\mathfrak{o}_x$ und deren inverse offenbar eine Basis der Gruppe $\mathfrak{O}$ ausmachen, so folgt hieraus, dass die Operationen

(6) $$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots \omega_\sigma$$

eine Basis der Gruppe Ω bilden. Ebenso wie $\mathfrak{O}$ der Gruppe ϑ, ist demnach Ω der Gruppe $\bar{\vartheta}$ holoedrisch isomorph, und wir können jetzt, indem wir die Index- oder Gewichtsbezeichnung für die Operationen der Gruppe Ω in ähnlicher Weise einführen wie in der Nr. 335 (S. 279) für die Gruppe $\bar{\vartheta}$, sagen:

Diejenigen Operationen von Ω, deren Gewicht bei Zugrundelegung der Basis (6) eine gerade Zahl ist, bilden die Gruppe $\mathfrak{O}$, wir bezeichnen sie typisch mit $\mathfrak{o}$ und nennen sie Operationen erster Art; dagegen bezeichnen wir die Operationen von Ω, deren Gewicht eine ungerade Zahl ist, mit ω und nennen dieselben Operationen zweiter Art.

Es ist dann stets

$$\omega z = 'z, \qquad \mathfrak{o} z = z,$$

sofern z als complexer Zahlwerth betrachtet wird, dagegen ist der Punkt $\mathfrak{o} z$ als von dem Punkte z verschieden anzusehen. Wir veranschaulichen dies am besten, indem wir uns über der mit dem Schnitte $\bar{l}$ versehenen z-Ebene unendlich viele mit dieser Ebene congruente Blätter ausgebreitet denken, diese eindeutig den Operationen $\mathfrak{o}$ der Gruppe $\mathfrak{O}$ zuordnen und, der Bedeutung dieser Operationen als Umläufen entsprechend, längs der beiden Ufer der Theile von $\bar{l}$ aneinander heften.

Die von diesen Blättern gebildete Fläche ist dann ihrer Structur nach mit der in der Nr. 334 (S. 278) definirten Fläche T identisch; wir wollen dieselbe demgemäss auch hier mit T bezeichnen und

uns jedes Blatt von T durch den Einheitskreis in zwei Halbblätter zerlegt denken, ein inneres und ein äusseres. Diese Halbblätter entsprechen dann eindeutig den Operationen der Gruppe Ω.

Zufolge der in der Nr. 336 (S. 283) festgelegten Gestalt der Riemann'schen Fläche $\mathfrak{T}^1$, welche die Verzweigung der algebraischen Function ζ_1 von z versinnlicht, gehen die verschiedenen Zweige von ζ_1 aus dem Hauptzweige $\zeta_1^{(0)}$ in folgender Weise durch die Operationen von Ω hervor.

Bezeichnen wir $\zeta_1^{(0)}$ als Function von z durch

$$\zeta_1^{(0)} = f_1(z),$$

so ist

$$\zeta_1^{(\varkappa)} = f_1(\omega_\varkappa \omega_{\varkappa-1} z) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma+1;\ \omega_{\sigma+1} = \omega_0);$$

wenn ferner z einen im Innern des Einheitskreises gelegenen Werth bedeutet, so haben wir

$$f_1(\omega_0 z) = f_1('z) = '\zeta_1^{(\sigma+1)},$$

$$f_1(\omega_\varkappa z) = '\zeta_1^{(\varkappa)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma),$$

und demgemäss

(7) $$|f_1(z)| < 1, \qquad |f_1(\omega_\varkappa z)| < 1 \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots \sigma).$$

Ferner ist offenbar für $\varkappa \neq \lambda$

$$f_1(\omega_\varkappa \omega_\lambda \omega_\varkappa z) = f_1(\omega_\varkappa \omega_\lambda \cdot \omega_\varkappa \cdot \omega_\lambda \omega_\varkappa \cdot \omega_\varkappa \omega_\lambda \omega_\varkappa \cdot \omega_\varkappa z)$$

und folglich

(8) $$f_1(\omega_\varkappa \omega_\lambda \omega_\varkappa z) = (f_1(z)).$$

Bezeichnen wir also die Operationen

$$\omega_\varkappa \omega_\lambda \omega_\varkappa \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots \sigma;\ \lambda \neq \varkappa)$$

in der durch das Schema (23) der Nr. 335 (S. 279) fixirten Reihenfolge durch

(9) $$\omega_0^1,\ \omega_1^1,\ \cdots\ \omega_{\sigma_1}^1$$

und die aus diesen Operationen als Basis gebildete Gruppe mit Ω^1, so verwandelt sich $\zeta_1^{(0)}$ durch Anwendung einer Operation zweiter Art von Ω^1 in seinen harmonischen Werth und bleibt bei Anwendung einer in Ω^1 enthaltenen Operation erster Art ungeändert.

Die Beziehung zwischen den Gruppen Ω und Ω^1 ist dann genau dieselbe wie die, welche zwischen den oben betrachteten Gruppen ϑ und ϑ^1 besteht; wir haben also insbesondere

$$\Omega = \Omega^1(1,\ \omega_0,\ \omega_1,\ \cdots\ \omega_\sigma).$$

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{O}^1$ die aus den Operationen erster Art von Ω^1 gebildete ausgezeichnete Untergruppe von Ω^1, so bleibt der Zweig

$$\zeta_1^{(0)} = f_1(z)$$

bei den Operationen von $\mathfrak{O}^1$ ungeändert, während der Zweig

$$\zeta_1^{(\varkappa)} = f_1(\omega_\varkappa \omega_{\varkappa-1} z)$$

bei den Operationen der Gruppe

$$(10) \qquad \omega_{\varkappa-1}\omega_\varkappa \mathfrak{O}^1 \omega_\varkappa \omega_{\varkappa-1},$$

die aus $\mathfrak{O}^1$ durch Transformation mit der Operation $\omega_\varkappa\omega_{\varkappa-1}$ hervorgeht, ungeändert bleibt.

343. Untersuchung und neue Definition der betrachteten algebraischen Function.

Betrachten wir nun die algebraische Gleichung $(\sigma+2)$-ten Grades, der ζ_1 als Function von z Genüge leistet, so hat dieselbe nach den Ergebnissen der Nr. 337 (S. 290) die Form

$$(11) \qquad \Phi_1(\zeta_1, z) = \zeta_1^{\sigma+2} + (c^1_{\sigma+1} z + \partial^1_{\sigma+1})\zeta_1^{\sigma+1} + \cdots + (c_1^1 z + \partial_1^1)\zeta_1 + c_0^1 z = 0;$$

ihre Discriminante in Bezug auf ζ_1 lautet

$$\Delta_1(z) = \prod_{\varkappa=0}^{\sigma+1} \Phi_1'(\zeta_1^{(\varkappa)}, z),$$

wo Φ_1' die erste partielle Ableitung von Φ_1 nach ζ_1 bedeutet, $\Delta_1(z)$ ist also eine ganze rationale Function vom Grade $2(\sigma+1)$ in z.

Da sich (Nr. 336, S. 283) im Punkte $z = a_\varkappa$ die

$$\zeta_1^{(0)}, \ \zeta_1^{(\varkappa-1)}, \ \zeta_1^{(\varkappa)}$$

ineinander verzweigen und (vergl. Nr. 336, S. 286) daselbst den gemeinsamen Werth

$$a^1_{(\varkappa-1)\sigma+1}$$

annehmen, so bestehen die Gleichungen

$$\Phi_1(a^1_{(\varkappa-1)\sigma+1}, a_\varkappa) = 0, \ \Phi_1'(a^1_{(\varkappa-1)\sigma+1}, a_\varkappa) = 0, \ \Phi_1''(a^1_{(\varkappa-1)\sigma+1}, a_\varkappa) = 0,$$

wo Φ_1'' die zweite partielle Ableitung von Φ_1 nach ζ_1 bedeutet, und $\Delta_1(z)$ enthält demgemäss den Factor $(z - a_\varkappa)$ zur zweiten Potenz. Wir haben also

$$(12) \qquad \Delta_1(z) = c \prod_{\varkappa=1}^{\sigma+1} (z - a_\varkappa)^2,$$

wo c eine von z unabhängige Grösse bedeutet.

Da die Discriminante einer algebraischen Gleichung in ζ_1 zufolge der ihr innewohnenden Invarianteneigenschaft bei linearer Transformation dieser Variabeln, abgesehen von einer Potenz der Transformationsdeterminante, ungeändert bleibt, so ist für jede der in der Nr. 337 (S. 288) definirten algebraischen Functionen Z_1 von z die zugehörige Discriminante, abgesehen von einem constanten Factor, mit $\Delta_1(z)$ identisch, so dass also die Form (12) der Discriminante für die ganze Classe der algebraischen Functionen Z_1 charakteristisch ist.

Die Discriminante $\Delta(z)$ der allgemeinen algebraischen Function Z_1 ist eine homogene Function $2(\sigma+1)$-ten Grades der Coefficienten

$$C_\varkappa z + D_\varkappa \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots \sigma+2)$$

der Gleichung, welcher Z_1 als Function von z Genüge leistet. Wenn wir also $\Delta(z)$ nach Potenzen von z ordnen, so erscheint diese Discriminante als ganze Function $2(\sigma+1)$-ten Grades von z, deren Coefficienten homogen in den $2(\sigma+3)$ Grössen

$$C_\varkappa,\ D_\varkappa \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots \sigma+2)$$

sind. Die Gleichung (12) liefert also, indem wir auf beiden Seiten derselben die Coefficienten gleich hoher Potenzen von z miteinander vergleichen, $2\sigma+3$ Gleichungen, aus denen die Grössen $C_\varkappa$, $D_\varkappa$ als Functionen der

$$a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_{\sigma+1}$$

und dreier willkürlicher Parameter bestimmt werden können. Unter den Lösungssystemen dieser Gleichungen giebt es dann eines und nur eines, für welches die Gleichung

$$\sum_{\varkappa=0}^{\sigma+2} (C_\varkappa z + D_\varkappa) Z_1^\varkappa = 0$$

eine Function Z_1 von z definirt, welche die durch die Gestalt der Riemann'schen Fläche $\mathfrak{T}^1$ festgelegte Art der Verzweigung besitzt. Wir gewinnen auf diese Weise eine rein algebraische Bestimmung für die bisher nur auf Grund der Riemann'schen Existenztheoreme definirte Function Z_1 von z.

In der Umgebung von $z = a_\varkappa$ besitzen die Zweige

$$\zeta_1^{(0)},\ \zeta_1^{(\varkappa-1)},\ \zeta_1^{(\varkappa)}$$

die gemeinsame Entwickelung

(13) $$a^1_{(\varkappa-1)\sigma+1} + \alpha_1^{(\varkappa)}(z-a_\varkappa)^{\frac{1}{3}} + \alpha_2^{(\varkappa)}(z-a_\varkappa)^{\frac{2}{3}} + \cdots,$$

während die übrigen Zweige der algebraischen Function ζ_1 von z nach positiven ganzen Potenzen von $z - a_\varkappa$ entwickelbar sind.

Wir wollen uns nun die Abbildung der Riemann'schen Fläche $\mathfrak{T}^1$ auf die Ebene der complexen Variabeln ζ_1 construirt denken. Nach den Ergebnissen der Nr. 336 (S. 285) haben wir dann die ζ_1-Ebene durch die der Peripherie des Einheitskreises der z-Ebene entsprechenden Curvenzüge in $2(\sigma + 1)$ Parzellen zerlegt, die den Halbblättern der Fläche $\mathfrak{T}^1$ entsprechen und zur einen Hälfte innerhalb, zur anderen Hälfte ausserhalb des Einheitskreises der ζ_1-Ebene liegen. Wir bezeichnen den dem inneren Halbblatte 0 von $\mathfrak{T}^1$ entsprechenden Bereich von ζ_1 mit $\gamma_1^{(0)}$; derselbe ist dann von $(\sigma + 1)$ ganz innerhalb des Einheitskreises verlaufenden Curven begrenzt, die die Peripherie des Einheitskreises in den Punkten

$$a^1_1,\ a^1_{\sigma+1},\ a^1_{2\sigma+1},\ \cdots a^1_{\sigma^2+1}$$

treffen, und zwar schliessen in jedem dieser Punkte die daselbst zusammenstossenden Curvenbogen der Begrenzung von $\gamma_1^{(0)}$ untereinander und mit der Peripherie des Einheitskreises den Winkel $\frac{\pi}{3}$ ein, da sich die entsprechenden Curvenstücke der z-Ebene in $a_\varkappa$ unter dem Winkel π schneiden, und für die sich in $a_\varkappa$ verzweigenden Zweige von ζ_1 in der Umgebung von $z = a_\varkappa$ die Entwickelung (13) gültig ist.

Durch Anwendung der Operationen

$$\omega_0,\ \omega_1,\ \cdots \omega_\sigma$$

auf z verwandelt sich der Bereich $\gamma_1^{(0)}$ in die den äusseren Halbblättern

$$0,\ 1,\ \cdots \sigma$$

von $\mathfrak{T}^1$ entsprechenden Bereiche der ζ_1-Ebene, die wir mit

$$\gamma_1^{(0,0)},\ \gamma_1^{(0,1)},\ \cdots \gamma_1^{(0,\sigma)}$$

bezeichnen und die mit $\gamma_1^{(0)}$ zusammengenommen das ganze Innere des Einheitskreises schlicht und lückenlos erfüllen. Die Spiegelbilder der $\sigma + 2$ Bereiche

(14) $$\gamma_1^{(0)},\ \gamma_1^{(0,\varkappa)} \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots \sigma)$$

in Bezug auf den Einheitskreis der ζ_1-Ebene entsprechen dann dem äusseren und inneren Halbblatte $\sigma + 1$ und den inneren Halbblättern $0, 1, \cdots \sigma$; diese bleiben für uns ausser Betracht.

Fassen wir die Gesammtheit der einem der Bereiche (14) angehörenden ζ_1-Werthe ins Auge, so können wir diese Gesammtheit einen **Halbzweig** der Function ζ_1 von z nennen; wir behalten für den dem Bereiche $\gamma_1^{(0)}$ entsprechenden Halbzweig die Bezeichnung $\zeta_1^{(0)}$ bei, während die den Bereichen $\gamma_1^{(0,\varkappa)}$ entsprechenden Halbzweige mit $\zeta_1^{(0,\varkappa)}$ bezeichnet werden sollen. Der Halbzweig $\zeta_1^{(0)}$ besitzt (Nr. 342, S. 307) die Eigenschaft, bei Anwendung einer Operation erster Art der Gruppe Ω^1 auf z ungeändert zu bleiben und bei Anwendung einer Operation zweiter Art dieser Gruppe in seinen harmonischen Werth überzugehen. Die analoge Eigenschaft kommt dann dem Halbzweige $\zeta_1^{(0,\varkappa)}$ in Bezug auf die Operationen der Gruppe

$$\Omega_\varkappa^{\ 1} = \omega_\varkappa \Omega^1 \omega_\varkappa$$

zu.

Wir bezeichnen die Gesammtheit der den Gruppen

$$\Omega^1, \ \Omega_0^{\ 1}, \ \Omega_1^{\ 1}, \cdots \Omega_\sigma^{\ 1}$$

gemeinsam angehörenden Operationen mit T^1, dann ist (vergl. Nr. 331, S. 266) T^1 eine ausgezeichnete Untergruppe mit endlichem Quotienten von Ω^1 und enthält offenbar die Gesammtheit aller Operationen, die den Gruppen

$$\mathfrak{D}^1, \ \omega_{\varkappa-1}\omega_\varkappa \mathfrak{D}^1 \omega_\varkappa \omega_{\varkappa-1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma+1)$$

gleichzeitig angehören, als ausgezeichnete Untergruppe T^1 in sich.

Bilden wir eine zu der Gleichung (11) gehörige empfindliche Function V^1, so können wir diese Function so einrichten, dass sie bei den in T^1 enthaltenen Operationen zweiter Art in ihren harmonischen Werth übergeht, während sie bei den Operationen erster Art von T^1 ungeändert bleibt. Da dann jeder Zweig der algebraischen Function ζ_1 von z rational durch V^1 und z darstellbar ist, so haben wir, wenn z einen innerhalb des Einheitskreises gelegenen Werth bezeichnet,

$$\zeta_1^{(0)} = R_1^{(0)}(V^1, z)$$

$$\zeta_1^{(0,\varkappa)} = R_1^{(0,\varkappa)}('V^1, 'z) \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots \sigma),$$

wo $R_1^{(0)}$, $R_1^{(0,\varkappa)}$ rationale Functionen andeuten.

344. Der Algorithmus algebraischer Functionen, und independente Definition dieser Functionen.

Da der Hauptzweig $\zeta_1^{(0)}$ der algebraischen Function ζ_1 durch die Operationen (9) der Nr. 342 (S. 307), die ja eine Basis der Gruppe Ω^1 bilden, in seinen harmonischen Werth verwandelt wird, so kommt diesen Operationen in Bezug auf die ζ_1-Ebene, die wir uns durch einen die Punkte

$$a_1^1, a_2^1, \cdots a_{\sigma_1+1}^1$$

verbindenden, längs der Peripherie des Einheitskreises gelegten Schnitt zerschnitten denken, eine ähnliche Bedeutung zu, wie den Operationen (6) der Nr. 342 (S. 306) in Bezug auf die z-Ebene. Wir können demnach aus den soeben für ζ_1 abgeleiteten Resultaten sofort die analogen für ζ_λ gültigen Ergebnisse erschliessen, wenn wir beachten, dass ζ_λ aus $\zeta_{\lambda-1}$ auf analoge Weise gebildet ist, wie ζ_1 aus z.

Als Function von $\zeta_{\lambda-1}$ genügt ζ_λ einer algebraischen Gleichung von der Form

$$\overline{\Phi}_\lambda(\zeta_\lambda, \zeta_{\lambda-1}) = \sum_{\varkappa=0}^{\sigma_{\lambda-1}+2} (\bar{c}_\varkappa^\lambda \zeta_{\lambda-1} + \bar{\bar{c}}_\varkappa^\lambda) \zeta_\lambda^\varkappa = 0, \tag{15}$$

woselbst

$$\bar{c}^\lambda_{\sigma_{\lambda-1}+2} = 0, \quad \bar{\bar{c}}^\lambda_{\sigma_{\lambda-1}+2} = 1, \quad \bar{\bar{c}}_0^\lambda = 0, \quad |\bar{c}_0^\lambda| = 1$$

ist, und deren Discriminante in Bezug auf ζ_λ, abgesehen von einem constanten Factor, durch das Quadrat des Ausdruckes

$$(\zeta_{\lambda-1} - a_1^{\lambda-1})(\zeta_{\lambda-1} - a_2^{\lambda-1}) \cdots (\zeta_{\lambda-1} - a_{\sigma_{\lambda-1}+1}^{\lambda-1})$$

gegeben wird. Die

$$a_1^{\lambda-1}, a_2^{\lambda-1}, \cdots a_{\sigma_{\lambda-1}+1}^{\lambda-1} \tag{16}$$

sind dabei nichts anderes wie die Werthe, welche $\zeta_{\lambda-1}$ in den Punkten

$$a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$$

der z-Ebene annimmt; diese Werthe (16) liegen also auf der Peripherie des Einheitskreises der $\zeta_{\lambda-1}$-Ebene, und wir wollen uns dieselben stets so geordnet denken, dass dem

$$\zeta_{\lambda-1} = a_1^{\lambda-1}$$

der Werth $z = a_1$ entspricht, und dass die Punkte (16) auf der Peripherie des Einheitskreises so aufeinander folgen, wie die wachsenden

Zahlen auf dem Zifferblatte einer Uhr (vgl. Nr. 336, S. 286). Die Art der Verzweigung der Function ζ_λ von $\zeta_{\lambda-1}$ wird durch eine Riemann'sche Fläche $\mathfrak{T}^\lambda$ gegeben, die über der $\zeta_{\lambda-1}$-Ebene mit den Punkten (16) als Verzweigungsstellen in analoger Weise aufgebaut ist, wie $\mathfrak{T}^1$ über der z-Ebene mit den Verzweigungsstellen

$$a_1,\ a_2,\ \cdots a_{\sigma+1}.$$

Die Gleichung, der ζ_λ als Function von z Genüge leistet, hat die Form

$$\Phi_\lambda(\zeta_\lambda,\ z) = \sum_{\varkappa=0}^{N_\lambda} (c_\varkappa^\lambda z + \hat{c}_\varkappa^\lambda)\,\zeta_\lambda^\varkappa = 0, \tag{17}$$

wo (vergl. Nr. 338, S. 295)

$$N_\lambda = (\sigma+2)\prod_{\varkappa=1}^{\lambda-1}(\sigma_\varkappa + 2)$$

ist. Die Verzweigungspunkte dieser Gleichung sind

$$z = a_1,\ a_2,\ \cdots a_{\sigma+1},$$

und zwar fallen in jedem dieser Punkte genau $2\delta_\lambda$ einfache Verzweigungspunkte zusammen, wenn

$$\delta_\lambda = \sum_{i=0}^{\lambda-1}\prod_{\varkappa=0}^{i}(\sigma_\varkappa^2 - 1) + 1 = \frac{N_\lambda - 1}{\sigma + 1}$$

gesetzt wird. Die Discriminante von (17) in Bezug auf ζ_λ ist eine ganze rationale Function vom Grade $2(N_\lambda - 1)$ in z, sie hat demnach die Form

$$\Delta_\lambda(z) = c_\lambda \prod_{\varkappa=1}^{\sigma+1}(z - a_\varkappa)^{2\delta_\lambda}, \tag{18}$$

wo c_λ eine von z unabhängige Grösse bedeutet. Die Verzweigung der algebraischen Function ζ_λ von z wird durch eine über der z-Ebene auszubreitende Riemann'sche Fläche $\mathfrak{S}^\lambda$ bestimmt, die durch Superposition der Flächen

$$\mathfrak{T}^1,\ \mathfrak{T}^2,\ \cdots \mathfrak{T}^\lambda$$

entstanden und ohne Mühe herzustellen ist.

Denken wir uns die Discriminante Δ_λ der Gleichung (17) gebildet und nach Potenzen von z geordnet, so sind die Coefficienten der einzelnen z-Potenzen ganze rationale homogene Functionen $(2N_\lambda - 2)^{\text{ten}}$ Grades der $2(N_\lambda + 1)$ Grössen

$$c_\varkappa^\lambda,\ \hat{c}_\varkappa^\lambda \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots N_\lambda). \tag{19}$$

Wenn wir dann in der Gleichung (18) auf beiden Seiten die Coefficienten gleich hoher Potenzen von z miteinander vergleichen, so erhalten wir $2N_\lambda - 1$ Gleichungen, aus denen wir die Grössen (19) als Functionen der $a_1, a_2, \ldots a_{\sigma+1}$ und noch dreier willkürlicher Parameter berechnen können. Unter den Lösungssystemen dieser Gleichungen giebt es dann eines und nur eines, für welches die Gleichung (17) eine algebraische Function von z definirt, die sich in der durch die Riemann'sche Fläche $\mathfrak{S}^\lambda$ bestimmten Weise verzweigt. Diese Function enthält also noch drei willkürliche Constanten. Bei der von uns zu benützenden Function ζ_λ ist über diese drei Constanten in geeigneter Weise verfügt (vergl. Nr. 337, S. 290, Nr. 340, S. 299).

Betrachten wir den Hauptzweig $\overset{0}{\zeta}_\lambda$ der Function ζ_λ von z (vergl. Nr. 339, S. 295), und seien

$$h_1^\lambda,\ h_2^\lambda,\ \cdots h_{\sigma+1}^\lambda$$

die Werthe, die dieser Zweig in den Punkten $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$ der z-Ebene annimmt, dann gilt in der Umgebung des Punktes $z = a_\varkappa$ für $\overset{0}{\zeta}_\lambda$ eine Entwickelung von der Form

$$(20) \qquad h_\varkappa^{(\lambda)} + \alpha_1^{(\varkappa)} (z - a_\varkappa)^{\frac{1}{s^\lambda}} + \alpha_2^{(\varkappa)} (z - a_\varkappa)^{\frac{2}{s^\lambda}} + \cdots,$$

wo $\alpha_1^{(\varkappa)}$ jedenfalls von Null verschieden ist. Denken wir uns nun die Riemann'sche Fläche $\mathfrak{S}^\lambda$, welche die Verzweigung der algebraischen Function ζ_λ versinnlicht, auf die ζ_λ-Ebene abgebildet, so erhalten wir, entsprechend den einzelnen Halbblättern dieser Fläche, einfach zusammenhängende Gebiete, die durch die der Peripherie des Einheitskreises der z-Ebene entsprechenden Curvenzüge von einander getrennt werden und die ζ_λ-Ebene schlicht und lückenlos erfüllen. Das Gebiet $\gamma_\lambda^{(0)}$, welches die Abbildung des innerhalb des Einheitskreises befindlichen Theiles des dem Zweige $\overset{0}{\zeta}_\lambda$ entsprechenden Blattes 0 der Fläche $\mathfrak{S}^\lambda$ liefert, ist zu Folge der für die Function ζ_λ getroffenen Festsetzungen (vergl. Nr. 339, S. 295) ganz innerhalb des Einheitskreises der ζ_λ-Ebene gelegen, nur seine Ecken $h_1^\lambda, h_2^\lambda, \cdots h_{\sigma+1}^\lambda$ befinden sich auf der Peripherie dieses Kreises, während seine Seiten krumme Linien sind, die sich zufolge der in der Umgebung des Punktes $z = a_\varkappa$ gültigen Entwickelung (20) in den Eckpunkten unter dem Winkel

$$\frac{\pi}{s^\lambda}$$

schneiden und in eben diesen Eckpunkten mit der Peripherie des Einheitskreises den Winkel

$$(21)\qquad \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3^2}+\cdots+\frac{\pi}{3^\lambda}=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{3^\lambda}\right)$$

einschliessen.

345. Untersuchung der algebraischen Functionen mit Hülfe der Gruppen von ω-Operationen.

Die Beziehungen der Operationen unserer Gruppe Ω zu der Function ζ_λ gestalten sich nunmehr zu Folge des zwischen den Gruppen Ω und $\bar{\vartheta}$ bestehenden holoedrischen Isomorphismus und mit Rücksicht auf die Ergebnisse der Nr. 338 (S. 293) wie folgt.

Betrachten wir die Operationen

$$\omega_i^{\lambda-1}\omega_\varkappa^{\lambda-1}\omega_i^{\lambda-1}\qquad (i,\varkappa=0,1,2,\cdots\sigma_{\lambda-1};\ i\neq\varkappa),$$

wo die $\omega_i^{\lambda-1}$ aus den $\omega_i^{\lambda-2}$ in ähnlicher Weise gebildet sind, wie diese aus den $\omega_i^{\lambda-3}$ u. s. w., endlich die ω_i^2 aus den ω_i^1 in ähnlicher Weise, wie diese letzteren aus den ω_i (Nr. 342, S. 307) und setzen den Hauptzweig $\overset{0}{\zeta}_\lambda$ als Function von z aufgefasst gleich

$$\overset{0}{\zeta}_\lambda=f_\lambda(z),$$

so ist, wenn wir uns z. B. z als einen im Innern des Einheitskreises gelegenen Werth denken,

$$f_\lambda(\omega_i^{\lambda-1}\omega_\varkappa^{\lambda-1}\omega_i^{\lambda-1}z)='(f_\lambda(z)),$$

und zwar geht $\overset{0}{\zeta}_\lambda$, wenn auf z die Operation

$$\omega_i^{\lambda-1}\omega_\varkappa^{\lambda-1}\omega_i^{\lambda-1}$$

angewandt wird, auf einem Wege, der die Peripherie des Einheitskreises zwischen zwei bestimmten der Punkte

$$a_1^\lambda,\ a_2^\lambda,\ \cdots\ a_{\sigma_\lambda+1}^\lambda,$$

etwa a_ϱ^λ und $a_{\varrho+1}^\lambda$ überschreitet, nach seinem harmonischen Werthe $'\overset{0}{\zeta}_\lambda$. Dem entsprechend setzen wir

$$\omega_i^{\lambda-1}\omega_\varkappa^{\lambda-1}\omega_i^{\lambda-1}=\omega_\varrho^\lambda$$

und bemerken, dass die Zahl ϱ durch das Zahlenpaar i, $\varkappa$ eindeutig bestimmt ist, und dass verschiedenen Zahlenpaaren i, $\varkappa$ auch stets verschiedene Zahlen ϱ entsprechen.

Bilden wir dann aus den Operationen

$$\omega_\varrho^\lambda \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \cdots \sigma_\lambda),$$

die offenbar der Gleichung

$$\omega_\varrho^\lambda \omega_\varrho^\lambda = 1$$

genügen, als Basis eine Gruppe Ω^λ, so ist diese mit der in der Nr. 338 (S. 294) definirten Gruppe ϑ^λ holoedrisch isomorph, und die Gleichung

$$\Omega = \Omega^\lambda \cdot P_\lambda \tag{22}$$

drückt demnach die Beziehung zwischen den Gruppen Ω und Ω^λ aus, wenn wir (vergl. a. a. O.) unter P_λ das symbolische Product

$$P_\lambda = \left(1, \omega_0^{\lambda-1}, \cdots \omega_{\sigma_{\lambda-1}}^{\lambda-1}\right)\left(1, \omega_0^{\lambda-2}, \cdots \omega_{\sigma_{\lambda-2}}^{\lambda-2}\right)\cdots\left(1, \omega_0, \omega_1, \cdots \omega_\sigma\right) \tag{23}$$

verstehen. Irgend eine Operation ω von Ω ist demnach in der Form

$$\omega = \omega^\lambda \cdot \tau$$

darstellbar, wo ω^λ eine Operation von Ω^λ und τ eine in P_λ enthaltene Operation bedeutet.

Uebertragen wir die in der Nr. 338 (S. 294) für die daselbst betrachteten Substitutionen Σ eingeführte Indexbezeichnung auf die Operationen ω, so haben wir (vergl. (35), a. a. O.), falls ω^λ nicht die identische Operation ist, die Ungleichung

$$\overline{\mathrm{Ind}}_0\, \omega > \overline{\mathrm{Ind}}_\lambda\, \omega^\lambda + \lambda - 1,$$

so dass also alle Operationen ω von Ω, für welche

$$\overline{\mathrm{Ind}}_0\, \omega \leq \lambda - 1$$

ist, nothwendig in P_λ enthalten sein müssen.

Die Gruppe Ω^λ hat dann offenbar die Eigenschaft, dass die Function

$$\overset{0}{\zeta}_\lambda = f_\lambda(z)$$

durch die in Ω^λ enthaltenen Operationen erster Art ungeändert bleibt und durch die Operationen zweiter Art von Ω^λ in ihren harmonischen Werth übergeführt wird, dagegen verwandeln die Operationen von P_λ den Hauptzweig $\overset{0}{\zeta}_\lambda$ in andere Zweige der Function ζ_λ von z.

Bezeichnen wir wieder ähnlich wie für $\lambda = 1$ den durch die Gesammtheit der Punkte des Bereiches $\gamma_\lambda^{(0)}$ dargestellten Halbzweig der Function ζ_λ mit $\zeta_\lambda^{(0)}$ und setzen, wenn

$$u = \omega_{\varkappa_1}\omega_{\varkappa_2}\cdots\omega_{\varkappa_\mu}, \qquad \mu = \overline{\mathrm{Ind}}_0\, u,$$

irgend eine Operation von P_λ bedeutet, den durch Anwendung dieser Operation auf z aus $\zeta_\lambda^{(0)}$ entstehenden Halbzweig gleich

$$\zeta_\lambda^{(0,\varkappa_1,\varkappa_2,\cdots\varkappa_\mu)},$$

so erfüllen die Werthe dieser N_λ Halbzweige die Bereiche

$$\gamma_\lambda^{(0,\varkappa_1,\varkappa_2,\cdots\varkappa_\mu)},$$

die das Innere des Einheitskreises der ζ_λ-Ebene schlicht und lückenlos bedecken. Für $u = 1$ ist natürlich

$$\gamma_\lambda^{(0,\varkappa_1,\varkappa_2,\cdots\varkappa_\mu)} = \gamma_\lambda^{(0)}.$$

Der Halbzweig

$$\zeta_\lambda^{(0,\varkappa_1,\varkappa_2,\cdots\varkappa_\mu)}$$

gehört dann ebenso zu der Gruppe

$$u^{-1}\Omega^\lambda u = \Omega^\lambda_{(\varkappa_1,\varkappa_2,\cdots\varkappa_\mu)},$$

wie $\zeta_\lambda^{(0)}$ zu Ω^λ gehört.

Wir heben noch hervor, dass aus einem innerhalb des Einheitskreises gelegenen Werthe $\zeta_\lambda^{(0)}$ durch Anwendung der Operationen von P_λ stets Werthe hervorgehen, die ebenfalls im Innern des Einheitskreises gelegen sind. Der Uebergang vom Innern nach dem Aeussern dieses Kreises wird nur durch Operationen von Ω^λ vermittelt.

Es werde nun ähnlich wie für $\lambda = 1$ die Gesammtheit aller derjenigen Operationen betrachtet, die den N_λ Gruppen

$$\Omega^\lambda,\ \Omega^\lambda_{(\varkappa_1,\varkappa_2,\cdots\varkappa_\mu)}$$

gemeinsam angehören; diese Gesammtheit bildet eine ausgezeichnete Untergruppe mit endlichem Quotienten von Ω, die wir mit T^λ bezeichnen, und in welcher offenbar die Gesammtheit derjenigen Operationen erster Art, bei deren Anwendung die sämmtlichen Zweige der Function ζ_λ ungeändert bleiben, als ausgezeichnete Untergruppe T^λ enthalten ist. Bilden wir dann eine zu der Gleichung (17) gehörige empfindliche Function V^λ, so kann diese so eingerichtet werden, dass sie bei Anwendung der Operationen zweiter Art von T^λ in ihren harmonischen Werth übergeht, während sie bei Anwendung der in T^λ enthaltenen Operationen erster Art ungeändert bleibt. Jeder Zweig der algebraischen Function ζ_λ von z ist dann rational durch V^λ und z darstellbar; wir haben also, wenn z einen innerhalb des Einheitskreises gelegenen Werth bedeutet:

$$\zeta_\lambda^{(0)} = R_\lambda^{(0)}(V^\lambda, z),$$

und

(24) $$\zeta_\lambda^{(0, \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_\mu)} = R_\lambda^{(0, \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_\mu)}(V^\lambda, z)$$

beziehungsweise

(24a) $$\zeta_\lambda^{(0, \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_\mu)} = R_\lambda^{(0, \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_\mu)}('V^\lambda, 'z),$$

jenachdem μ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, d. h. jenachdem der Halbzweig

$$\zeta_\lambda^{(0, \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_\mu)}$$

einem innerhalb beziehungsweise ausserhalb des Einheitskreises gelegenen Halbblatte der Riemann'schen Fläche $\mathfrak{S}^\lambda$ entspricht. Die R_λ bedeuten die Algorithmen rationaler Functionen.

Fünftes Kapitel.

346. Untersuchung der Eigenschaften der beiden Grenzfunctionen.

Wir sind nunmehr im Besitze der Hülfsmittel, deren wir bedürfen, um in die Natur der in der Nr. 341 (S. 303) für Werthe von z, die innerhalb des Einheitskreises liegen, definirten Grenzfunction

$$\overset{0}{\eta} = \lim_{\lambda} \zeta_\lambda^{(0)} = \lim_{\lambda} \overset{0}{\zeta}_\lambda$$

volle Einsicht zu gewinnen. Zunächst ist klar, dass diejenigen Eigenschaften der Function ζ_λ, die für jeden Werth des Index λ bestehen, auch für die Grenzfunction η, die aus $\overset{0}{\eta}$ durch analytische Fortsetzung hervorgeht, erhalten bleiben, so dass also diese Grenzfunction keine anderen Verzweigungsstellen besitzen kann, wie die Punkte

$$a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$$

der z-Ebene. Wir haben für jeden z-Werth, der innerhalb des Einheitskreises gelegen ist, einen wohlbestimmten Werth $\overset{0}{\eta}$ der Grenzfunction definirt; die Gesammtheit dieser $\overset{0}{\eta}$-Werthe constituirt demnach einen Halbzweig der Grenzfunction, den wir mit $\eta^{(0)}$ bezeichnen und der sich durch Anwendung der Operation $\omega_\varkappa$ auf z in einen dem ausserhalb des Einheitskreises gelegenen Gebiete der z-Ebene entsprechenden Halbzweig $\eta^{(0,\varkappa)}$ verwandelt. Dadurch ist nun zunächst die Fortsetzung der Grenzfunction η nach dem Aeussern des Einheitskreises der z-Ebene vollzogen.

Ebenso wie $\zeta_\lambda^{(0)}$ zu der Gruppe Ω^λ gehört, wird der Halbzweig $\eta^{(0)}$ der Grenzfunction zu der Gruppe

$$\lim_{\lambda} \Omega^\lambda = \Omega^\infty$$

gehören. Ferner folgt aus der für $|z| < 1$ bestehenden Ungleichung (Nr. 339, S. 295)

$$|\zeta_\lambda^{(0)}| < |\zeta_{\lambda-1}^{(0)}| < \cdots < |z|,$$

dass für Werthe von z, die dem Innern des Einheitskreises angehören auch

$$|\eta^{(0)}| < 1$$

sein muss, und durch einfache Grenzbetrachtungen erhellt, dass $\eta^{(0)}$ durch Anwendung der Operationen von

$$P_\infty = \lim_\lambda P_\lambda$$

auf z in diejenigen Halbzweige der Grenzfunction η übergeführt wird, die innerhalb des Einheitskreises der η-Ebene gelegen sind und deren Werthevorrath das Innere dieses Einheitskreises schlicht und lückenlos erfüllt. Da nun (Nr. 345, S. 316) aber, wenn

$$\overline{\text{Ind}}_0\, \omega \leqq \lambda - 1$$

ist, die Operation ω nothwendig in P_λ vorkömmt, so folgt, dass wie gross auch für eine Operation ω von Ω der Werth von

$$\overline{\text{Ind}}_0\, \omega$$

sein mag, die ganze positive Zahl Λ stets so gross gewählt werden kann, dass ω in allen

$$P_{\lambda+\varkappa} \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots)$$

enthalten ist, wenn λ grösser ist wie Λ. Es enthält also P_∞ sämmtliche in Ω vorkommende Operationen und offenbar auch keine anderen, d. h. es ist

$$P_\infty = \Omega,$$

und folglich gemäss der Gleichung (22) der Nr. 345 (S. 316)

$$\lim_\lambda \Omega^\lambda = \Omega_\infty = 1.$$

Wir schliessen hieraus, dass $\eta^{(0)}$ durch Anwendung aller Operationen von Ω nur in solche Halbzweige verwandelt werden kann, deren Werthevorrath dem Innern des Einheitskreises der η-Ebene angehört, d. h.:

Die Grenzfunction η hat die Eigenschaft, dass sie keine analytische Fortsetzung nach dem ausserhalb des Einheitskreises gelegenen Gebiete der η-Ebene gestattet.

Es ist also für jeden von $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$ verschiedenen Werth von z

$$|\eta| < 1,$$

dagegen ist für die Punkte $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$

$$|\zeta_\lambda| = 1,$$

und folglich auch

$$|\eta| = 1.$$

Wir bezeichnen das Gebiet der η-Ebene, welches von der Gesammtheit der Werthe des Halbzweiges $\eta^{(0)}$ erfüllt wird, durch $\gamma^{(0)}$; dann ist $\gamma^{(0)}$ ganz im Innern des Einheitskreises gelegen, nur die den Punkten $z = a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$ entsprechenden Werthe

$$\varepsilon_\varkappa = \lim_\lambda h_\varkappa^\lambda \qquad (\varkappa=1,2,\cdots \sigma+1)$$

(vergl. Nr. 344, S. 314) befinden sich auf der Peripherie dieses Kreises. Die Seiten von $\gamma^{(0)}$ sind Curvenbogen, die den Punkten der Peripherie des Einheitskreises der z-Ebene entsprechen; dieselben schneiden sich (vergl. a. a. O.) in den Eckpunkten $\varepsilon_\varkappa$ unter dem Winkel

$$\lim_\lambda \frac{\pi}{3^\lambda} = 0$$

und bilden in eben diesen Punkten mit der Peripherie des Einheitskreises der η-Ebene den Winkel

$$\lim_\lambda \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{3^\lambda}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Wir bezeichnen den aus $\eta^{(0)}$ durch Anwendung der Operation

$$\omega = \omega_{\varkappa_1} \omega_{\varkappa_2} \cdots \omega_{\varkappa_\mu}$$

von Ω auf z hervorgehenden Halbzweig der Grenzfunction η mit

$$\eta^{(0, \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_\mu)}$$

und das von dem Werthevorrathe dieses Halbzweiges erfüllte Gebiet der η-Ebene durch

$$\gamma^{(0, \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_\mu)};$$

dann befinden sich alle diese Gebiete, wie bereits bemerkt, innerhalb des Einheitskreises der η-Ebene und erfüllen diesen Kreis schlicht und lückenlos.

Hieraus schliessen wir sofort, dass z eine allenthalben eindeutige Function von η ist, die nur für

$$|\eta| < 1$$

existirt, und wir erhalten auch eine Darstellung dieser eindeutigen Function, wenn wir in dem sich aus der Gleichung (17) der Nr. 344 (S. 313) ergebenden rationalen Ausdrucke von z durch ζ_λ

$$z = R_\lambda(\zeta_\lambda),$$

für welchen nach der Definition von ζ_λ die Gleichung

$$'z = R_\lambda('\zeta_\lambda)$$

besteht, mit λ zur Grenze übergehen. In der That ergiebt sich durch einfache Grenzbetrachtungen

$$z = \lim_{\lambda} R_\lambda(\zeta_\lambda) = \lim_{\lambda} R_\lambda(\eta) = F(\eta),$$

wo F den Algorithmus einer eindeutigen Function bedeutet.

Für die Grenzfunction $\tilde{\eta}$, die aus dem für Werthe von z, deren absoluter Betrag grösser als Eins ist, durch die Gleichung (2) der Nr. 341 (S. 303) definirten $\overset{\sigma+1}{\eta}$ durch analytische Fortsetzung entsteht, gelten die analogen Resultate wie für η selbst. Wenn dem Werthe H von η, wo also

$$|\mathsf{H}| < 1$$

ist, der Werth

$$Z = F(\mathsf{H})$$

entspricht, so entspricht dem zu H harmonischen Werthe $'\mathsf{H}$ von $\tilde{\eta}$ der zu Z harmonische Werth $'Z$ von z, und zwar ist

$$'Z = F('\mathsf{H}),$$

d. h. der Algorithmus F stellt für Werthe $\tilde{\eta}$ des Argumentes, deren absoluter Betrag grösser wie Eins ist, die ausserhalb des Einheitskreises existirende eindeutige Function z von $\tilde{\eta}$ dar, ebenso wie er für Werthe des Argumentes, deren absoluter Betrag kleiner wie Eins ist, die nur innerhalb des Einheitskreises definirte eindeutige Function z von η liefert.

347. Beziehungen zwischen den Halbzweigen und Zweigen der Grenzfunction.

Um nunmehr die Beziehung zwischen den verschiedenen Halbzweigen der Function η herstellen zu können, müssen wir diejenige Function V^∞ heranziehen, die für η eine analoge Rolle spielt, wie die Function V^λ für ζ_λ.

Da die Gruppe Ω^∞, zu welcher $\eta^{(0)}$ gehört, nur aus der identischen Operation besteht, so gilt das Gleiche für die Gruppen

$$\omega^{-1}\Omega^\infty\omega,$$

zu denen die verschiedenen Halbzweige von η gehören. Also reducirt sich auch die Gesammtheit T^∞ der allen diesen Gruppen gemeinsam angehörenden Operationen auf die identische Operation, und wir können demnach jeden Zweig der Function η selbst als Function V^∞ ansehen. Bedeutet also

$$\eta^{(0,\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_\nu)} = \eta^{(1)}$$

einen von

$$\eta^{(0, \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_\mu)} = \eta^{(2)}$$

verschiedenen Halbzweig der Function η, so folgt nach der Analogie der Gleichungen (24) und (24a) der Nr. 345 (S. 318), dass $\eta^{(1)}$ durch $\eta^{(2)}$ und z beziehungsweise durch $'\eta^{(2)}$ und $'z$ eindeutig dargestellt werden kann, jenachdem

$$\nu \equiv \mu \pmod 2,$$

beziehungsweise

$$\nu \equiv \mu + 1 \pmod 2$$

ist. Da nun z eine eindeutige Function von η ist, so stellt sich also $\eta^{(1)}$ durch $\eta^{(2)}$ beziehungsweise $'\eta^{(2)}$, d. h. jeder Halbzweig von η durch jeden anderen oder dessen harmonischen Werth eindeutig dar. Hieraus schliessen wir aber nach bekannten functionentheoretischen Sätzen, dass jeder Halbzweig eine lineare Function mit constanten Coefficienten von jedem anderen Halbzweige oder von dessen harmonischem Werthe sein muss. In beiden Fällen müssen diese linearen Functionen die Peripherie des Einheitskreises der η-Ebene in sich selbst transformiren.

Insbesondere ist also jedes

$$\eta^{(0, \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_\mu)}$$

eine lineare Function von $\eta^{(0)}$ oder von $'\eta^{(0)}$, jenachdem μ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Sei

$$(25) \qquad \eta^{(0, \varkappa)} = \frac{\alpha_{\varkappa 1}\,'\eta^{(0)} + \alpha_{\varkappa 2}}{\alpha_{\varkappa 3}\,'\eta^{(0)} + \alpha_{\varkappa 4}},$$

dann ist für einen Punkt ζ der Seite $(\varepsilon_{\varkappa-1}, \varepsilon_\varkappa)$, längs der die Gebiete $\gamma^{(0)}$ und $\gamma^{(0, \varkappa)}$ zusammenhängen,

$$\zeta = \frac{\alpha_{\varkappa 1}\,'\zeta + \alpha_{\varkappa 2}}{\alpha_{\varkappa 3}\,'\zeta + \alpha_{\varkappa 4}}.$$

Hieraus folgt nach einem wiederholt angewandten Schlussverfahren (vergl. z. B. Nr. 268, S. 35 ff.) und mit Rücksicht auf die Eigenschaft der Substitution, die Peripherie des Einheitskreises ungeändert zu lassen, dass die Seite $(\varepsilon_{\varkappa-1}, \varepsilon_\varkappa)$ ein Kreisbogen ist, der den Einheitskreis der η-Ebene in den Punkten $\varepsilon_{\varkappa-1}, \varepsilon_\varkappa$ unter rechtem Winkel schneidet.

Damit ist also gezeigt, dass die Grenzfunction η die Abbildung des Kreisbogenpolygons mit verschwindenden Winkeln

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_{\sigma+1}),$$

dessen Seiten den Einheitskreis unter rechtem Winkel schneiden, auf das Innere des Einheitskreises der z-Ebene liefert, und aus dem Satze der Nr. 320 (S. 232) folgt nunmehr, dass wie in der Nr. 341 (S. 302) behauptet wurde, in der That die Function z von η eine Fuchs'sche ist, die nur innerhalb des Einheitskreises der η-Ebene existirt und die auf der Peripherie des Einheitskreises der z-Ebene beliebig vorgeschriebenen Werthe $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$ auslässt.

Von einer Fuchs'schen Function, die beliebig vorgeschriebene, auf der Peripherie des Einheitskreises gelegene Werthe auslässt, kann man durch eine linear gebrochene Transformation leicht zu einer Fuchs'schen Function gelangen, die beliebig vorgeschriebene reale Werthe auslässt; wir haben also in der That das zu Beginn der Nr. 329 (S. 258) in Aussicht genommene Ziel erreicht, d. h. es ist gezeigt, dass sich in der Differentialgleichung (1) der Nr. 325 (S. 246), wenn die daselbst mit $a_1, a_2, \ldots a_{\sigma+1}$ bezeichneten singulären Punkte real und die $g_1, g_2, \cdots g_{\sigma+1}$ sämmtlich unendlich gross sind, die Coefficienten der ganzen Function $E_{\sigma-2}(z)$ als reale Grössen stets und (gemäss dem Satze der Nr. 327) nur auf eine Weise so bestimmen lassen, dass die unabhängige Variable z eine eindeutige Fuchs'sche Function des Integralquotienten η wird.

348. Betrachtung des allgemeinen Falles beliebiger nicht auf dem Einheitskreise gelegener singulärer Punkte.

Wir wenden uns nun zu der Untersuchung des allgemeinen Falles, wo in der normalen Differentialgleichung (1) der Nr. 325 (S. 246) die $a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$ beliebige, nicht sämmtlich reale (oder auf einer Kreisperipherie gelegene) Werthe, und die $g_1, g_2, \cdots g_{\sigma+1}$ nicht sämmtlich unendlich gross, sondern irgendwelche positive ganze Zahlen sind, die der Ungleichung (4) der Nr. 326 (S. 249) Genüge leisten. Es wird sich dann mit Hülfe der in den vorhergehenden Nummern erlangten Resultate zeigen lassen, dass (vergl. Nr. 326, S. 252) stets eine der Differentialgleichung (1) subordinirte normale Differentialgleichung gefunden werden kann, in der sich über die noch unbestimmt bleibenden Parameter so disponiren lässt, dass diese Differentialgleichung eine Fuchs'sche wird.

Mögen unter den gegebenen Grössen

$$a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1} \tag{1}$$

gewisse, etwa $a_1, a_2, \cdots a_\lambda$ real sein; unter den übrigen

$$a_{\lambda+1}, \cdots a_{\sigma+1}$$

mögen sich gewisse Paare von conjugirten complexen Grössen befinden; sollten dann noch complexe Grössen unter den $a_\varkappa$ vorhanden sein, deren conjugirte in der Reihe der $a_\varkappa$ nicht mit enthalten ist, so fügen wir diese conjugirten dem Tableau (1) einfach hinzu. Die so erweiterte Reihe möge lauten

$$(2) \qquad a_1, a_2, \cdots a_\lambda, \quad a_{\lambda+1}, \cdots a_{\tau+1}, \quad \bar{a}_{\lambda+1}, \cdots \bar{a}_{\tau+1},$$

wo also für $\varkappa = \lambda + 1, \cdots \tau + 1$, $\bar{a}_\varkappa$ die zu $a_\varkappa$ conjugirte complexe Grösse bedeutet. Wenn die Zahl

$$1 + \tau - \lambda = q$$

gleich Null ist, d. h. wenn in der Reihe (2) nur reale Grössen vorkommen, so ist die Existenz einer Fuchs'schen Function, die die Werthe (2) auslässt, bewiesen. Wir zeigen nun, dass, wenn die Existenz einer Fuchs'schen Function als feststehend angesehen wird, die ein System von Werthen auslässt, welches $q - 1$ Paare conjugirter complexer Grössen enthält, auch eine Fuchs'sche Function construirt werden kann, die das Werthesystem (2) auslässt, in welchem die Anzahl der Paare conjugirter complexer Grössen gleich q ist.

Bilden wir zu diesem Ende die ganze rationale Function $2q$ten Grades

$$(3) \qquad \varphi(x) = (x - a_{\lambda+1})(x - \bar{a}_{\lambda+1}) \cdots (x - a_{\tau+1})(x - \bar{a}_{\tau+1}),$$

so sind die Coefficienten derselben, wenn wir uns nach Potenzen von x geordnet denken, reale Grössen. Die Ableitung $\varphi'(x)$ von $\varphi(x)$ ist von ungeradem $(2q - 1)$-ten Grade, die Gleichung

$$(4) \qquad \varphi'(x) = 0$$

besitzt demnach mindestens eine reale Wurzel. Bezeichnen wir also die Wurzeln der Gleichung (4) durch

$$c_1, c_2, \cdots c_{2q-1},$$

so befinden sich unter denselben höchstens $(q - 1)$ Paare conjugirter complexer Grössen. Demnach enthält auch das Tableau

$$(5) \qquad 0, \varphi(a_1), \cdots \varphi(a_\lambda), \varphi(c_1), \varphi(c_2), \cdots \varphi(c_{2q-1})$$

höchstens $(q - 1)$ Paare conjugirter complexer Grössen, wir können folglich gemäss unserer Voraussetzung eine Fuchs'sche Function $F(\eta)$ bestimmen, die nur innerhalb des Einheitskreises der η-Ebene existirt, innerhalb des Fundamentalbereiches jeden Werth nur ein einziges Mal annimmt und die Werthe (5) auslässt.

Setzen wir nun

$$\varphi(x) = F(\eta), \tag{6}$$

so ist zunächst leicht einzusehen, dass x eine eindeutige Function von η ist. Die Function x von η könnte nämlich nur für solche Werthe von η eine Verzweigung erfahren, für welche die Ableitung $\varphi'(x)$ von $\varphi(x)$ verschwindet; für einen solchen η-Werth müsste aber

$$F(\eta) = \varphi(c_i)$$

sein, wo i eine der Zahlen $1, 2, \cdots 2q - 1$ bedeutet, und das ist nicht möglich, da $F(\eta)$ die Werthe (5) auslassen sollte. Ferner kann die durch die Gleichung (6) definirte Function x von η keinen der Werthe

$$a_i \qquad (i = 1, 2, \cdots \lambda)$$

annehmen, da sonst $F(\eta)$ gleich dem entsprechenden $\varphi(a_i)$ sein müsste, und ebensowenig kann x einen der Werthe

$$a_i, \ \bar{a}_i \qquad (i = \lambda + 1, \cdots \tau + 1)$$

erhalten, da sonst $F(\eta)$ verschwinden müsste.

Setzen wir

$$F(\eta) = z, \quad y_1 = \sqrt{\frac{dz}{d\eta}}, \quad y_2 = \eta \sqrt{\frac{dz}{d\eta}},$$

so bilden, da z eine Fuchs'sche Function von η sein sollte, die y_1, y_2 ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = p(z) y, \tag{7}$$

worin $p(z)$ eine rationale Function von z bedeutet. Die singulären Punkte dieser Differentialgleichung sind die Stellen (5), und die determinirende Fundamentalgleichung eines jeden dieser Punkte besitzt eine doppelte Wurzel. Nun ist aber

$$\frac{dx}{d\eta} = \frac{1}{\varphi'(x)} \frac{dz}{d\eta};$$

wenn wir also in der Differentialgleichung (7) die Substitution

$$y = \sqrt{\varphi'(x)}\, u,$$
$$z = \varphi(x)$$

machen, so verwandelt sich (vergl. die Gleichungen (10), (11) der Nr. 181, Bd. II, 1, S. 189) diese Differentialgleichung in

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \left\{ p(\varphi(x))\, \varphi'(x)^2 + \Delta\binom{z}{x} \right\} u, \tag{8}$$

aus welcher sich x als Function von η durch Umkehrung des Quotienten der Elemente

$$u_1 = \sqrt{\frac{dx}{d\eta}}, \quad u_2 = \eta\sqrt{\frac{dx}{d\eta}}$$

eines Fundamentalsystems ergiebt. Offenbar ist der Coefficient von u in (8) eine rationale Function von x, wir schliessen also, dass x eine Fuchs'sche Function des Integralquotienten η sein muss, die innerhalb des Fundamentalbereiches jeden Werth nur ein einziges Mal annimmt.

Die singulären Punkte der Differentialgleichung (8) sind offenbar diejenigen Werthe von x, für welche $z = \varphi(x)$ einen der Werthe (5) annimmt, d. h. also erstens die Punkte (2) und zweitens die von diesen Punkten verschiedenen Lösungen der Gleichungen

$$\varphi(x) = \varphi(a_i) \qquad (i=1, 2, \cdots \lambda),$$

$$\varphi(x) = \varphi(c_i) \qquad (i=1, 2, \cdots 2\varrho-1),$$

die wir durch

(9) $$b_1, b_2, \cdots b_\varkappa$$

bezeichnen wollen. Für jeden dieser singulären Punkte besitzt die determinirende Fundamentalgleichung von (8) eine doppelte Wurzel, die Function x von η lässt also die Werthe (2) und die Werthe (9) aus.

Offenbar ist die Differentialgleichung (8) der normalen Differentialgleichung (1) der Nr. 325 (S. 246), von der wir zu Beginn dieser Nummer ausgegangen waren, subordinirt, die Behauptung, die wir daselbst aufgestellt hatten, ist also bewiesen. Genauer ausgesprochen haben wir den Satz:

Wenn beliebige reale oder complexe Werthe

$$a_1, a_2, \cdots a_{\sigma+1}$$

gegeben sind, so lässt sich stets eine Fuchs'sche Function finden, die diese gegebenen Werthe und überdies noch gewisse andere nicht gegebene Werthe auslässt, nur innerhalb des Einheitskreises existirt und innerhalb des Fundamentalbereiches (dessen sämmtliche Ecken auf der Peripherie des Einheitskreises liegen) *jeden Werth nur ein einziges Mal annimmt.*

349. Zusammenfassung der bisher erlangten Resultate.

Durch diesen Satz ist also das am Schlusse der Nr. 326 (S. 252) in Aussicht genommene Ziel erreicht, d. h. es kann, wenn eine beliebige Function

$$Y = F(z)$$

der complexen Variabeln z gegeben ist, die nur eine endliche Anzahl von Verzweigungspunkten besitzt und die in der durch einen die Verzweigungspunkte unter einander verbindenden Schnitt zerschnittenen z-Ebene eindeutig ist, ein Parameter η so gefunden werden, dass z als Fuchs'sche Function von η und Y als eindeutige Function von η erscheint (vergl. Nr. 326, S. 251).

Wir haben gesehen, dass sich auf Grund der in den Nummern 334, 335 (S. 275 ff.) behandelten Untergruppe einer aus lauter parabolischen Substitutionen erzeugten Fuchs'schen Gruppe mit symmetrischem Fundamentalbereiche eine Function η von z herstellen lässt, die als Grenzfunction gewisser algebraischer Functionen erscheint und deren Umkehrung eine Fuchs'sche Function liefert, die eine endliche Anzahl beliebig vorgeschriebener realer (oder auf der Peripherie eines Kreises gelegener) Werthe auslässt. In ähnlicher Weise kann die in den Nummern 332, 333 (S. 268 ff.) betrachtete Untergruppe einer aus lauter parabolischen Substitutionen erzeugten Fuchs'schen Gruppe mit nicht symmetrischem Fundamentalbereiche dazu benutzt werden, einen Algorithmus von algebraischen Functionen der Variabeln z aufzustellen, dessen Grenzfunction η so beschaffen ist, dass ihre Umkehrung eine Fuchs'sche Function liefert, die eine endliche Anzahl beliebig vorgeschriebener, willkürlich (d. h. nicht auf einer Kreisperipherie) in der z-Ebene gelegener Werthe auslässt. Wir gehen auf eine Ausführung dieses Verfahrens nicht ein, da uns die in der vorigen Nummer erlangten Ergebnisse einen für die Zwecke, die wir im Auge haben, ausreichenden Ersatz für dasselbe bieten, sondern wollen jetzt in eine genauere Betrachtung der Integrationsmethode für eine lineare homogene Differentialgleichung beliebiger Ordnung mit rationalen Coefficienten eintreten, die aus der Anwendung des Poincaré'schen Princips entspringt.

Siebzehnter Abschnitt.

Theorie der Fuchs'schen Zetafunctionen.

Erstes Kapitel.

350. Integration einer linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten auf Grund des Poincaré'schen Princips.

Wenn es sich um eine lineare Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten handelt, deren Ordnungszahl keiner Beschränkung unterliegt, so kann man dieselbe mit Hülfe der in der Nr. 61 (Bd. I, S. 218) angegebenen Reductionsmethode auf eine lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten zurückführen; wir dürfen uns demnach für die allgemeinen Betrachtungen, denen wir uns jetzt zuwenden, auf die Behandlung von linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten beschränken.

Sei

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n(x)y = 0 \tag{1}$$

eine vorgelegte lineare Differentialgleichung, deren Coefficienten rationale Functionen von x sind, die nur in den Punkten

$$a_1, a_2, \cdots a_\varrho, \quad b_1, b_2, \cdots b_\tau$$

unendlich werden. Die Bezeichnung denken wir uns so gewählt, dass die Punkte

$$b_1, b_2, \cdots b_\tau$$

die ausserwesentlich singulären und diejenigen wesentlich singulären Stellen bedeuten, in deren Umgebung das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1) nur wie eine rationale Function unendlich wird, dann sind also die Stellen

$$a_1, a_2, \cdots a_\varrho, \quad a_{\sigma+1} = \infty$$

die einzigen Verzweigungspunkte oder Unbestimmtheitsstellen der Integrale von (1).

Bilden wir nun eine normale Differentialgleichung zweiter Ordnung (Nr. 326, S. 249)

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \tilde{q}(x)\, v, \tag{2}$$

deren singuläre Punkte die

$$a_1,\ a_2,\ \cdots a_\varrho,\quad a_{\sigma+1} = \infty$$

sind und die so beschaffen ist, dass für $\varkappa = 1, 2, \cdots \varrho, \sigma + 1$ die Differenz $\delta_\varkappa$ der Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung, die zu $x = a_\varkappa$ gehört, im Allgemeinen gleich Null ist; nur wenn $a_\varkappa$ kein Punkt der Unbestimmtheit für die Integrale der Differentialgleichung (1) ist, wenn überdies die Entwickelungen dieser Integrale in der Umgebung von $x = a_\varkappa$ keine Logarithmen enthalten und die Wurzeln der zu $a_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung von (1) rationale Zahlen sind, kann $\delta_\varkappa$ gleich dem grössten aliquoten Theile der Einheit gewählt werden, als dessen ganzzahlige Multipla sich diese rationalen Zahlen darstellen lassen. Nach den Ergebnissen des vorhergehenden Abschnittes kann dann jedenfalls eine der Differentialgleichung (2) subordinirte Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = q(x)\, u \tag{2a}$$

gefunden werden, in welcher die unabhängige Variable x eine nur im Innern des Einheitskreises existirende Fuchs'sche Function $x = f(\eta)$ des Integralquotienten η ist, die die Werthe

$$a_1,\ a_2,\ \cdots a_\varrho,\quad a_{\sigma+1} = \infty$$

und eventuell noch gewisse andere Werthe

$$a_{\varrho+1},\ \cdots a_\sigma$$

auslässt. Zufolge des Poincaré'schen Princips ist dann das allgemeine Integral y der Differentialgleichung (1) eine eindeutige Function von η.

Denken wir uns in die Differentialgleichung (1) die Grösse η als neue unabhängige Variable eingeführt, so nimmt diese Differentialgleichung die Gestalt an

$$\frac{d^n y}{d\eta^n} + \varphi_1(\eta)\frac{d^{n-1} y}{d\eta^{n-1}} + \cdots + \varphi_n(\eta)\, y = 0, \tag{1a}$$

wo die Coefficienten $\varphi_1(\eta),\ \varphi_2(\eta), \cdots \varphi_n(\eta)$ eindeutige Functionen von η sind, die nur für

$$|\eta| < 1$$

existiren. Wenn wir die Differentialgleichung (1) durch Multipli-

cation mit einer geeignet gewählten ganzen rationalen Function auf die Form

$$P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_n y = 0$$

bringen, wo die P_x ganze rationale Functionen von x bedeuten und P_0 nur für die singulären Stellen der Differentialgleichung verschwindet, so ist

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n y}{d\eta^n} \frac{1}{[f'(\eta)]^n} - n_2 \frac{d^{n-1} y}{d\eta^{n-1}} \frac{f''(\eta)}{[f'(\eta)]^{n+1}} - \cdots;$$

die Differentialgleichung mit der unabhängigen Variabeln η nimmt folglich nach Multiplication mit $[f'(\eta)]^{2n-1}$ die Gestalt an (vergl. Nr. 124, Bd. I, S. 458)

$$[f'(\eta)]^{n-1} P_0(f(\eta)) \frac{d^n y}{d\eta^n} + \cdots = 0.$$

Die Ableitung $f'(\eta)$ der Fuchs'schen Function $x = f(\eta)$ kann nur für Werthe von η, die auf dem Einheitskreise liegen, gleich Null oder Unendlich werden, ebenso liegen diejenigen η-Werthe, denen die x-Werthe

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, \quad a_{\sigma+1}$$

entsprechen, auf der Peripherie des Einheitskreises. Die Differentialgleichung (1a) besitzt also innerhalb des Existenzbereiches ihrer Coefficienten nur diejenigen η-Werthe als singuläre Stellen, denen die x-Werthe

$$b_1, b_2, \cdots b_\tau$$

entsprechen. In der Umgebung dieser η-Werthe besitzt das allgemeine Integral von (1a) den Charakter einer rationalen Function; wenn wir insbesondere voraussetzen, dass die b_x nur ausserwesentliche singuläre Punkte der Differentialgleichung (1) sind (ein Fall, auf den sich der allgemeine stets durch Multiplication von y mit einer ganzen rationalen Function von x zurückführen lässt), so sind die entsprechenden η-Werthe auch ausserwesentlich singuläre Punkte der Differentialgleichung (1a). Dann sind also die Integrale der letzteren Differentialgleichung für

$$|\eta| < 1$$

holomorph und folglich in ihrem ganzen Existenzbereiche nach positiven ganzen Potenzen von η entwickelbar; und zwar erhalten wir, wenn der Punkt $\eta = 0$ keine der ausserwesentlich singulären Stellen von (1a) ist, für das allgemeine Integral eine Entwickelung, deren n erste Coefficienten willkürliche Constanten sind. Die folgenden Coefficienten ergeben sich mittelst Recursionsformeln, wenn die Coefficienten der

Differentialgleichung (1a) bekannt sind; um diese herzustellen bedarf es nur der Kenntniss der Function $x = f(\eta)$ und diese kann, wenn die $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$ gegeben sind, nach der in dem vorhergehenden Abschnitte behandelten Methode stets als Grenzfunction rationaler Functionen gefunden werden.

Wir haben also auf diese Weise eine Integrationsmethode für eine beliebige lineare Differentialgleichung (1) mit rationalen Coefficienten, die uns gestattet, abhängige und unabhängige Variable als beständig (d. h. für alle Werthe des Existenzbereiches) convergente, nach positiven ganzen Potenzen der Hülfsvariabeln η fortschreitende Reihen

$$y = c_0 + c_1\eta + \cdots,$$
$$x = \varepsilon_0 + \varepsilon_1\eta + \cdots$$

darzustellen, und dieses Reihenpaar liefert uns für Werthe von η, die innerhalb des Einheitskreises liegen, alle regulären Stellen des analytischen Gebildes (x, y).

351. Charakter der Integrale einer Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe als Functionen des Parameters η.

Wenn wir das Verhalten des allgemeinen Integrales der Differentialgleichung (1) bei Umläufen der unabhängigen Variabeln x untersuchen wollen, so haben wir auf η die Substitutionen der Gruppe der Fuchs'schen Function $x = f(\eta)$ anzuwenden.

Um die Untersuchung gleich in der vollen Allgemeinheit zu führen, denken wir uns, es sei die Differentialgleichung (2a) irgend eine der Differentialgleichung (2) subordinirte Fuchs'sche Differentialgleichung (Nr. 326, S. 249), so dass also nicht nothwendig die Differenzen δ_x der Wurzeln aller zu (2a) gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen gleich Null sind. Dann ist nach wie vor sowohl x als auch y eine nur für $|\eta| < 1$ existirende eindeutige Function von η; wenn wir uns also ein Fundamentalsystem

$$y_1, y_2, \cdots y_n$$

von (1) gegeben denken, so ist

$$y_i = \varphi_i(\eta) \qquad (i=1, 2, \cdots n),$$

wo $\varphi_i(\eta)$ eine nur für $|\eta| < 1$ definirte eindeutige Function von η bedeutet.

Sei ϑ die projective Monodromiegruppe der Fuchs'schen Differentialgleichung (2a), und denken wir uns auf η eine Substitution

$$S_\nu \eta = \frac{\alpha_\nu \eta + \beta_\nu}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}$$

der Fuchs'schen Gruppe ϑ angewandt, d. h. lassen wir η auf einem innerhalb des Einheitskreises verlaufenden, sonst beliebigen Wege von dem Punkte η nach dem Punkte $S_\nu \eta$ gehen, so bleibt die Fuchs'sche Function $x = f(\eta)$ ungeändert, d. h. x vollzieht in seiner Ebene einen geschlossenen Weg. Die Integrale $[y_i]$ verwandeln sich demnach in lineare homogene Functionen ihrer selbst, d. h. sie erfahren eine lineare Substitution

$$[\bar{y}_i] = (\alpha_{i\varkappa}^{(\nu)})\,[y_i] = T_\nu [y_i] \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

der homogenen Monodromiegruppe Θ von (1). Offenbar wird zufolge der Art und Weise, wie wir die Differentialgleichung (2) eingerichtet haben, dadurch dass wir S_ν alle Substitutionen der Fuchs'schen Gruppe ϑ durchlaufen lassen, jede Substitution T_ν der Gruppe Θ zum Vorschein kommen; die Gruppen ϑ und Θ sind demnach isomorph, im Allgemeinen ist dieser Isomorphismus aber kein holoedrischer, sondern es entspricht der identischen Substitution von Θ eine gewisse ausgezeichnete Untergruppe E von ϑ.

Wir können also die analytische Beschaffenheit des Functionssystems $[y_i]$ von η in folgender Weise charakterisiren:

Die y_i sind eindeutige, nur für $|\eta| < 1$ existirende Functionen von η, die die Substitutionen einer gewissen linearen homogenen Gruppe Θ erfahren, wenn wir auf η die Substitutionen der Fuchs'schen Gruppe ϑ anwenden.

Diese Eigenschaften haben die $[y_i]$ offenbar mit jedem dem Fundamentalsysteme $[y_i]$ entsprechenden Fundamentalsysteme einer mit (1) zu derselben Art gehörigen Differentialgleichung gemein, und allgemeiner mit jedem System von Functionen, welches in der Form

$$A_0 y_i + A_1 \frac{dy_i}{dx} + \cdots + A_{n-1} \frac{d^{n-1} y_i}{dx^{n-1}} \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

darstellbar ist, wo die $A_0, A_1, \cdots A_{n-1}$ eindeutige Functionen von x bedeuten. Um die y_i als Integrale einer linearen Differentialgleichung mit in x rationalen Coefficienten zu charakterisiren, müssen demnach noch weitere Eigenschaften dieser Grössen als Functionen von η angegeben werden, es sind dies Eigenschaften, die das Verhalten der y_i in der Nähe der Ecken des Fundamentalbereiches F_0 der Fuchs'schen Gruppe ϑ bestimmen.

Da sich der Behandlung des allgemeinen Falles, wo die Integrale von (1) an allen oder an einzelnen der Stellen

$$a_1, a_2, \cdots a_\varrho, a_{\varrho+1}$$

unbestimmt werden, noch wesentliche Schwierigkeiten entgegenstellen, so wollen wir für das Folgende voraussetzen, dass die Differentialgleichung (1) der Fuchs'schen Classe angehört. Dann lässt sich das Verhalten der Integrale der Differentialgleichung (1a) in der Nähe der Eckpunkte des Fundamentalbereiches F_0 auf folgende Weise charakterisiren.

Betrachten wir zunächst den Fall einer im Innern des Einheitskreises gelegenen Ecke $\lambda_\varkappa$ von F_0 oder eines der mit F_0 congruenten Bereiche der Theilung des Einheitskreises (bei der allgemeinen Festsetzung, dass die Fuchs'sche Differentialgleichung (2a) irgend eine der Differentialgleichung (2) subordinirte sein soll, können solche Ecken in der That auftreten), dann gehört $\lambda_\varkappa$ einem gewissen Cyklus von Ecken an, in welchem die Winkelsumme gleich $2\pi\delta_\varkappa$ ist, wenn für $\eta = \lambda_\varkappa$ die Fuchs'sche Function x den Werth $a_\varkappa$ annimmt. Gemäss der Definition der normalen Differentialgleichung (2) besitzt dann die zum Punkte $a_\varkappa$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (1) lauter rationale Wurzeln

$$r_1, r_2, \cdots r_n,$$

die sämmtlich ganzzahlige Multipla

$$r_\nu = m_\nu \delta_\varkappa \qquad (\nu=1, 2, \cdots n)$$

von

$$\delta_\varkappa = \frac{1}{g_\varkappa}$$

sind, und die Entwickelungen der Elemente des zu $x = a_\varkappa$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots \mathfrak{y}_n$ von (1) in der Umgebung von $x = a_\varkappa$ enthalten keine Logarithmen. Wir haben also

$$\mathfrak{y}_\nu = (x - a_\varkappa)^{\frac{m_\nu}{g_\varkappa}} \mathfrak{P}_\nu(x \mid a_\varkappa) \qquad (\nu=1, 2, \cdots n),$$

wo die $\mathfrak{P}_\nu$ nach positiven ganzen Potenzen von $x - a_\varkappa$ fortschreitende Reihen bedeuten.

Andererseits ist in der Umgebung von $x = a_\varkappa$

$$\frac{\eta - \lambda_\varkappa}{\eta - \lambda_\varkappa^0} = (x - a_\varkappa)^{\frac{1}{g_\varkappa}} \mathfrak{P}(x \mid a_\varkappa),$$

wo $\lambda_\varkappa^0$ den zu $\lambda_\varkappa$ harmonischen Werth, $\mathfrak{P}(x \mid a_\varkappa)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $x - a_\varkappa$ bedeutet, die für $x = a_\varkappa$ nicht verschwindet: wir haben also in der Umgebung von $\eta = \lambda_\varkappa$

$$x - a_\varkappa = (\eta - \lambda_\varkappa)^{\varrho_\varkappa}[\varepsilon_1 + \varepsilon_2(\eta - \lambda_\varkappa) + \cdots], \quad \varepsilon_1 \neq 0,$$

und folglich

$$(x - a_\varkappa)^{\frac{1}{\varrho_\varkappa}} = (\eta - \lambda_\varkappa)[\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2(\eta - \lambda_\varkappa) + \cdots].$$

Demnach ergiebt sich

$$\mathfrak{y}_\nu = (\eta - \lambda_\varkappa)^{m_\nu}\overline{\mathfrak{P}}_\nu(\eta \mid \lambda_\varkappa) \qquad (\nu=1, 2, \cdots n),$$

wo die $\mathfrak{P}_\nu$ gewöhnliche Potenzreihen von $\eta - \lambda_\varkappa$ bedeuten.

Da nun

$$y_i = c_{i1}\mathfrak{y}_1 + c_{i2}\mathfrak{y}_2 + \cdots + c_{in}\mathfrak{y}_n \qquad (i=1, 2, \cdots n)$$

ist, wo die $c_{i\nu}$ Constanten sind, für welche

$$|c_{i\nu}| \neq 0 \qquad (i, \nu=1, 2, \cdots n),$$

so erkennt man, dass die Functionen y_i in der Umgebung von $\eta = \lambda_\varkappa$ sich wie rationale Functionen verhalten.

Sei ferner $\eta = \lambda_\varkappa$ eine auf der Peripherie des Einheitskreises gelegene Ecke eines der mit F_0 congruenten Bereiche, dann lauten die Entwickelungen der Elemente des zu $x = a_\varkappa$ gehörigen canonischen Fundamentalsystems der Differentialgleichung (1) allgemein wie folgt:

Bedeuten $r_1, r_2, \cdots r_\varrho$ die von einander nicht um ganze Zahlen verschiedenen Wurzeln der zu $x = a_\varkappa$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung von (1), so lässt sich (Nr. 50, Bd. I, S. 174) bei geeigneter Wahl der $r_1, r_2, \cdots r_\varrho$ die Gruppe der Integrale, die zu r_μ und den α_μ von r_μ um ganze Zahlen verschiedenen Wurzeln gehören, in der Form

$$\mathfrak{y}_{\mu l} = (x - a_\varkappa)^{r_\mu}\sum_{\lambda=0}^{l-1}\varphi_{l\lambda}(x \mid a_\varkappa)[\log(x - a_\varkappa)]^\lambda \qquad (l=1, 2 \cdots \alpha_\mu)$$

darstellen, wo die $\varphi_{l\lambda}$ gewöhnliche Potenzreihen von $x - a_\varkappa$ bedeuten und

$$\sum_{\mu=1}^{\varrho}\alpha_\mu = n$$

ist. Für die Differentialgleichung (2a) ist $\lambda_\varkappa$ Doppelpunkt einer parabolischen Substitution der Gruppe ϑ, wir haben folglich in der Nähe von $\lambda_\varkappa$ für $x - a_\varkappa$ die Entwickelung

$$x - a_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{\infty}\varepsilon_\lambda e^{\lambda t}, \qquad \varepsilon_1 \neq 0,$$

wo

$$t = \frac{\beta_\varkappa}{\eta - \lambda_\varkappa}$$

gesetzt wurde, und $\beta_\varkappa$ eine wohlbestimmte Constante bedeutet.

Hiernach ist also

$$(x - a_\varkappa)^{r_\mu} = e^{r_\mu t}(\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 e^t + \cdots), \qquad \bar{\varepsilon}_1 \neq 0,$$

$$\log(x - a_\varkappa) = t(\delta_1 + \delta_2 e^t + \cdots), \qquad \delta_1 \neq 0,$$

und folglich

$$\mathfrak{y}_{\mu l} = e^{r_\mu t}\,\Phi_\mu(e^t)\sum_{\lambda=1}^{l-1} t^\lambda\,\Phi_{l\lambda}(e^t),$$

wo die Φ_μ, $\Phi_{l\mu}$ gewöhnliche Potenzreihen von e^t bedeuten.

Da nun jedes y_i als lineare homogene Function mit constanten Coefficienten der

$$\mathfrak{y}_{\mu l} \qquad (\mu=1,2,\cdots q;\ l=1,2,\cdots \alpha_\mu)$$

darstellbar ist, ergeben sich für die y_i Entwickelungen von der Form

$$(\alpha) \qquad e^{r_1 t}\Phi_1 \cdot P_1 + e^{r_2 t}\Phi_2 \cdot P_2 + \cdots + e^{r_q t}\Phi_q \cdot P_q,$$

wo die $P_1, P_2, \cdots P_q$ ganze Functionen von t beziehungsweise von den Graden

$$\alpha_1 - 1,\ \ \alpha_2 - 1, \cdots \alpha_q - 1$$

bedeuten, deren Coefficienten ebenso wie die $\Phi_1, \Phi_2, \cdots \Phi_q$ gewöhnliche Potenzreihen von e^t sind. Die Summe der Gradzahlen der P_i befriedigt die Gleichung

$$(\beta) \qquad \alpha_1 - 1 + \alpha_2 - 1 + \cdots + \alpha_q - 1 = n - q.$$

Wenn wir also in der linearen Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe (1) an Stelle von x den Integralquotienten η der Fuchs'schen Differentialgleichung zweiter Ordnung (2a) als neue unabhängige Variable einführen, so lässt sich ein Fundamentalsystem $[y_i]$ von Integralen der so entstehenden Differentialgleichung (1a) wie folgt charakterisiren:

Die $[y_i]$ sind eindeutige nur für $|\eta| < 1$ existirende Functionen von η, die die Substitutionen der Monodromiegruppe Θ von (1) erfahren, wenn auf η die Substitutionen der Fuchs'schen Gruppe ϑ ausgeübt werden. Diese eindeutigen Functionen zeigen in der Umgebung jeder im Innern des Einheitskreises der η-Ebene gelegenen Stelle das Verhalten rationaler Functionen und gestatten in der Nähe der auf der

Peripherie des Einheitskreises gelegenen Ecken der Bereiche der zu der Gruppe ϑ gehörigen Theilung Entwickelungen von der Form (α), wo die Grade der ganzen Function P_λ die Gleichung (β) befriedigen.

352. Analogie mit Problemen der Theorie der elliptischen Functionen. Fuchs'sche Zetafunctionen.

Der Process, durch welchen wir die Integrale der Differentialgleichung (1) als eindeutige Functionen eines eindeutig umkehrbaren Integralquotienten einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung dargestellt haben, hat in der Theorie der elliptischen Functionen sein Analogon.

Betrachtet man nämlich in dem elliptischen Integrale erster Gattung (vergl. Nr. 248, Bd. II, 1, S. 478)

$$u = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}}$$

die obere Grenze x als Function von u, so ist diese Function, d. h. also die Umkehrungsfunction von u, eine eindeutige

$$x = \sin \operatorname{am} u = \operatorname{sn} u$$

mit den Perioden $4K$ und $2K'i$, wo K, K' durch die Gleichungen (5) (a. a. O.) definirt werden. Wenn man die ebenfalls eindeutigen und doppeltperiodischen Functionen

$$\sqrt{1-x^2} = \operatorname{cn} u, \quad \sqrt{1-\varkappa^2 x^2} = \operatorname{dn} u$$

einführt, so ist

$$dx = \operatorname{cn} u \cdot \operatorname{dn} u \cdot du,$$

und das Normalintegral zweiter Gattung (Nr. 250, Bd. II, 1, S. 485)

$$E(u) = \varkappa^2 \int\limits_0^x \frac{x^2\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}}$$

verwandelt sich durch Einführung von u als Integrationsvariable in

$$E(u) = \varkappa^2 \int\limits_0^u \operatorname{sn}^2 u\, du \cdot$$

Da für $x = 1$ das Integral u den Werth K erhält, lautet das complette Integral zweiter Gattung (a. a. O. S. 485)

$$E = \int_0^1 \frac{\varkappa^2 x^2\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}} = \varkappa^2 \int_0^K \operatorname{sn}^2 u\, du;$$

durch Einführung von $\varkappa^2 x^2 = t$ verwandelt sich E in

$$E = \frac{1}{2} \int_0^{\varkappa^2} \frac{t\, dt}{\sqrt{t(t-1)(t-\varkappa^2)}}.$$

Wenn man nun mit Jacobi (Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, art. 47) die Function

$$(\gamma) \qquad Z(u) = \frac{E}{K} u - E(u)$$

in Betracht zieht, so ergiebt sich für das Integral zweiter Gattung die Darstellung

$$E(u) = \frac{E}{K} u - Z(u).$$

Setzt man dann in der Gleichung (γ) für $\operatorname{sn}^2 u$ die für diese Function von Jacobi (a. a. O. art. 41) gegebene Darstellung

$$\left(\frac{2\varkappa K}{\pi}\right)^2 \operatorname{sn}^2 u = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - \frac{2K}{\pi}\frac{2E}{\pi} - 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n q^n}{1-q^{2n}} \cos\frac{n\pi u}{K},$$

wo q die in der Nr. 265 (S. 21) definirte Grösse bedeutet, so erhält man

$$Z(u) = \frac{4\pi}{2K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin\frac{n\pi u}{K}.$$

Die Function $Z(u)$ ist demnach eine eindeutige Function von u, das Gleiche gilt folglich gemäss der Gleichung (γ) für das Integral zweiter Gattung $E(u)$.

Vermehrt man u um $2K$, so bleibt $Z(u)$ ungeändert, und $E(u)$ verwandelt sich in

$$E(u+2K) = E(u) + 2E;$$

vermehrt man u um $2K'i$, so verwandelt sich $Z(u)$ in

$$Z(u+2K'i) = Z(u) - \frac{\pi i}{K},$$

und folglich $E(u)$ in

$$\begin{aligned} E(u+2K'i) &= \frac{E}{K}(u+2K'i) - Z(u) + \frac{\pi i}{K} \\ &= E(u) + \frac{1}{K}\{2EK'i + \pi i\}. \end{aligned}$$

Nun haben wir aber zufolge der Legendre'schen Relation (Nr. 250, Bd. II, 1, S. 485, Gleichung (23), vergl. Nr. 251, ebenda S. 491)

$$\frac{1}{K}\{2EK'i + \pi i\} = 2E'i,$$

wo

$$E'i = \varkappa^2 \int_1^{\frac{1}{\varkappa}} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}},$$

oder, wenn wir wiederum $\varkappa^2 x^2 = t$ setzen,

$$E'i = \frac{1}{2}\int_{\varkappa^2}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-\varkappa^2)}},$$

der dem $K'i$ entsprechende aliquote Theil des zu $E(u)$ gehörigen Periodicitätsmoduls ist*). Es ergiebt sich demnach

$$E(u + 2K'i) = E(u) + 2E'i.$$

Wir sehen also, dass während das elliptische Integral zweiter Gattung $E(u)$ als Function von x keine eindeutige Umkehrung zulässt, durch Einführung des eindeutig inversiblen Integrales erster Gattung u als neuer unabhängiger Variabeln eine Function $E(u)$ von u resultirt, die eindeutig ist, und bei Vermehrung des Argumentes u um Perioden die entsprechenden Zuwüchse um Periodicitätsmoduln erfährt. Wir haben also in der That die analogen Verhältnisse, wie in dem Falle einer beliebigen linearen Differentialgleichung, deren Integrale sich durch Einführung des eindeutig umkehrbaren Integralquotienten η einer Differentialgleichung zweiter Ordnung in eindeutige Functionen von η verwandeln und die Substitutionen ihrer Monodromiegruppe erleiden, wenn auf η die Substitutionen der Fuchs'schen Gruppe angewandt werden, die die eindeutige Umkehrungsfunction von η ungeändert lassen.

Die Function $Z(u)$ ist selbst ein Integral zweiter Gattung, nämlich

$$Z(u) = \int_0^x \left(\frac{E}{K} - \varkappa^2 x^2\right) \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}};$$

da nun die Integrale der allgemeinen Differentialgleichung (1) zu der Fuchs'schen Function x von η in ähnlicher Beziehung stehen, wie die Function $Z(u)$ zu der Function $\operatorname{sn} u$, so nennt man nach Herrn Poincaré die Integrale $y_1, y_2, \cdots y_n$ von (1) als Functionen von η Fuchs'sche Zetafunctionen (fonctions zétafuchsiennes).

*) Vergl. die Berichtigung zu Bd. II, 1, S. 487 ff. am Schlusse dieses Bandes.

353. Allgemeine Definition und Eigenschaften der Systeme Fuchs'scher Zetafunctionen.

Allgemein definiren wir ein System Fuchs'scher Zetafunctionen in folgender Weise:

Sei

$$\vartheta = (1, S_1, S_2, \cdots)$$

eine Fuchs'sche Gruppe von der in der Nr. 304 (S. 169 ff.) angegebenen Beschaffenheit, und nehmen wir wie gewöhnlich den Einheitskreis der η-Ebene als Orthogonalkreis; seien

$$Z_1, Z_2, \cdots Z_n$$

n innerhalb des Einheitskreises existirende eindeutige Functionen von η von der Beschaffenheit, dass sich jedes Z_i in eine lineare homogene Function der $Z_1, Z_2, \cdots Z_n$

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_{i\varkappa}^{(\nu)} Z_\varkappa$$

verwandelt, wenn η eine Substitution S_ν der Gruppe ϑ erfährt, dann bilden die Substitutionen

$$T_\nu = (\alpha_{i\varkappa}^{(\nu)}) \qquad (\nu = 0, 1, \cdots; \ S_0 = 1, \ T_0 = 1)$$
$$(i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

eine mit ϑ isomorphe Gruppe Θ. Der analytische Charakter der Functionen Z_i werde dahin fixirt, dass sich diese Functionen innerhalb des Einheitskreises wie rationale Functionen verhalten und in der Nähe der auf der Peripherie des Einheitskreises gelegenen Ecken $\lambda_\varkappa$ der der Gruppe ϑ entsprechenden Theilung eine Darstellung von der Form (α) gestatten, wo die Gradzahlen der Polynome $P_1, \cdots P_q$ der Gleichung (β) Genüge leisten.

Ein so beschaffenes Functionssystem nennen wir ein System Fuchs'scher Zetafunctionen, welches zu der Fuchs'schen Gruppe ϑ und der Fuchs'schen Zetagruppe Θ, oder kurz zu den Gruppen ϑ und Θ gehört.

Ehe wir auf den Existenzbeweis für diese Functionen bei beliebiger Wahl der mit ϑ isomorphen Zetagruppe Θ eingehen, mögen noch einige Eigenschaften der Systeme Fuchs'scher Zetafunctionen hervorgehoben werden, die eine unmittelbare Folge ihrer Definition sind.

Zunächst ist evident, dass die in den Nummern 350, 351 betrachteten Fundamentalintegrale $y_1, \cdots y_n$ der linearen Differentialgleichung

der Fuchs'schen Classe (1), aufgefasst als Functionen des Integralquotienten η der Differentialgleichung (2a), ein System Fuchs'scher Zetafunctionen bilden, für welches die zugehörige Fuchs'sche Gruppe ϑ und die Zetagruppe Θ durch die projective beziehungsweise homogene Monodromiegruppe der Differentialgleichungen (2a) beziehungsweise (1) gegeben werden. Ebenso bilden aber auch die Elemente eines dem $[y_i]$ entsprechenden Fundamentalsystems einer beliebigen mit (1) zu derselben Art gehörigen linearen Differentialgleichung ein System zu den Gruppen ϑ, Θ gehöriger Fuchs'scher Zetafunctionen.

Diese letztere Bemerkung gestattet eine Umkehrung, die wir gleich für ein beliebiges System Fuchs'scher Zetafunctionen beweisen wollen.

Sei $x = f(\eta)$ eine zu der vorgelegten Fuchs'schen Gruppe ϑ gehörige Fuchs'sche Function, die innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 von ϑ jeden Werth nur ein einziges Mal annimmt, und sei

$$y_1, y_2, \cdots y_n$$

ein System Fuchs'scher Zetafunctionen, welches zu den Gruppen ϑ und Θ gehört. Betrachten wir die $[y_i]$ als Functionen von x, so haben wir uns zuvörderst die Abbildung des Fundamentalbereiches F_0 auf die x-Ebene zu construiren.

Wir denken uns der Einfachheit wegen den Fundamentalbereich F_0 von vornherein so gewählt, dass er in Bezug auf die Anordnung seiner Ecken und Seiten von derselben Beschaffenheit sei, wie der in der Nr. 211 (Bd. II, 1, S. 320) betrachtete Bereich F_0 (vergl. Nr. 304, S. 169 ff.) und behalten für die Ecken und Seiten von F_0 auch die gewohnten Bezeichnungen bei. Wenn dann

$$\lim_{\eta = \lambda_\varkappa} f(\eta) = a_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma),$$

$$\lim_{\eta = \lambda_{\sigma+1}} f(\eta) = \lim_{\eta = \lambda_{\sigma+1}^{(\varkappa)}} f(\eta) = a_{\sigma+1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma - 1)$$

gesetzt wird, so sind die

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, \quad a_{\sigma+1}$$

die singulären Punkte der linearen Differentialgleichung

$$\text{(II)} \qquad \frac{d^2 u}{dx^2} = q(x) u,$$

aus der die Fuchs'sche Function $x = f(\eta)$ durch Inversion des Integralquotienten entspringt.

Lassen wir η die Begrenzung von F_0 im positiven Sinne durchlaufen, so beschreibt x in seiner Ebene ein Liniensystem

$$l_1, l_2, \cdots l_\sigma,$$

welches den Punkt $a_{\sigma+1}$ mit den Punkten $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ verbindet (vergl. Nr. 215, Bd. II, 1, S. 340, insbesondere Fig. 9), und die durch dieses Liniensystem zerschnittene x-Ebene $\overline{T}$ ist die eindeutig conforme Abbildung des Fundamentalbereiches F_0.

Wenn x den Querschnitt $l_\varkappa$ so überschreitet, dass es vom positiven Ufer nach dem negativen Ufer übergeht, so erfährt η die Substitution $A_\varkappa \eta$ der Gruppe ϑ, die die Seite $s_\varkappa$ von F_0 in die Seite $s_\varkappa'$ verwandelt; die $[y_i]$ aufgefasst als Functionen von x erfahren also diejenige Substitution $\mathsf{A}_\varkappa$ der Gruppe Θ, die der Substitution $A_\varkappa$ von ϑ vermöge des zwischen ϑ und Θ bestehenden Isomorphismus entspricht. Allgemein erfahren die $[y_i]$, wenn x irgend einen geschlossenen Weg U in seiner Ebene beschreibt, diejenige Substitution T_ν der Gruppe Θ, die der Substitution $S_\nu \eta$ von ϑ entspricht, welche η durch den Umlauf U erleidet. Innerhalb $\overline{T}$ sind die $[y_i]$ eindeutige Functionen von x.

Da die $[y_i]$ eine lineare homogene Substitution erfahren, wenn η von F_0 nach einem anderen der mit F_0 vermöge der Substitutionen von ϑ congruenten Bereiche übergeht, so entspricht im Allgemeinen jeder innerhalb des Einheitskreises der η-Ebene gelegenen Unendlichkeitsstelle der $[y_i]$ eine Unendlichkeitsstelle von derselben Ordnung innerhalb F_0, und da ferner die $[y_i]$ als Functionen von η in der Umgebung jeder Stelle, die im Innern des Einheitskreises liegt, das Verhalten rationaler Functionen zeigen, so können dieselben im Innern des Fundamentalbereiches F_0 jedenfalls nur an einer endlichen Anzahl von Stellen von endlicher ganzzahliger Ordnung unendlich werden. Seien die diesen Unendlichkeitsstellen entsprechenden x-Werthe

$$b_1, b_2, \cdots b_\tau,$$

so befinden sich diese innerhalb der Fläche $\overline{T}$, und die $[y_i]$ verhalten sich an jeder von den $b_1, \cdots b_\tau$ verschiedenen und im Innern von $\overline{T}$ gelegenen Stelle regulär, während sie für

$$b_1, b_2, \cdots b_\tau$$

wie rationale Functionen unendlich werden, indem ja η in der Umgebung einer solchen Stelle $b_\varkappa$ nach positiven ganzen Potenzen von $x - b_\varkappa$ entwickelbar ist.

Das Verhalten der $[y_i]$ in der Umgebung der Stellen

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, \quad a_{\sigma+1}$$

der x-Ebene ergiebt sich aus den in Bezug auf das Verhalten der

Fuchs'schen Zetafunctionen in der Nähe von Ecken des Fundamentalbereiches F_0 und der mit F_0 congruenten Bereiche getroffenen Festsetzungen durch Umkehrung der in der Nr. 351 (S. 334 ff.) angewandten Schlussweise. Man findet so ohne Weiteres, dass die Stellen $a_\varkappa$ für die $[y_i]$ keine Punkte der Unbestimmtheit sind. Wir haben also das Resultat:

Das System Fuchs'scher Zetafunctionen $[y_i]$ aufgefasst als Functionen von $x = f(\eta)$ hat die Eigenschaft, dass

1) die $[y_i]$ innerhalb der Fläche $\overline{T}$ eindeutig sind und nur an einer endlichen Anzahl von Stellen von endlicher ganzzahliger Ordnung unendlich werden,

2) die Verzweigungspunkte der $[y_i]$ unter den Punkten

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, \quad a_{\sigma+1}$$

enthalten sind,

3) wenn x die Querschnitte $l_\varkappa$ der Fläche $\overline{T}$ überschreitet, die $[y_i]$ die linearen Substitutionen $A_\varkappa$ $(\varkappa=1,2,\cdots\sigma)$ erleiden,

und umgekehrt ist jedes System von n Functionen der Variabeln x, welches diese drei Eigenschaften besitzt, ein System Fuchs'scher Zetafunctionen von η, das zu den Gruppen ϑ, Θ gehört.

Hieraus folgt sofort, dass die Ableitungen jeder Ordnung der $[y_i]$ nach x ebenfalls ein System Fuchs'scher Zetafunctionen bilden, das zu den Gruppen ϑ und Θ gehört, und dass das Gleiche von jedem Functionssysteme gilt, welches durch Gleichungen von der Form

$$\text{(A)} \qquad F_0 y_i + F_1 \frac{dy_i}{dx} + \cdots + F_p \frac{d^p y_i}{dx^p} \qquad (i=1,2,\cdots n)$$

definirt wird, wo p eine beliebige ganze Zahl, $F_0, F_1, \cdots F_p$ Fuchs'sche Functionen von η, also rationale Functionen von x bedeuten.

354. Beziehungen zwischen Systemen Fuchs'scher Zetafunctionen, die zu denselben Gruppen gehören.

Betrachten wir allgemein $(n+1)$ Systeme zu den Gruppen ϑ, Θ gehöriger Fuchs'scher Zetafunctionen

$$\begin{array}{llll} y_{11}, & y_{12}, & \cdots y_{1n}, \\ y_{21}, & y_{22}, & \cdots y_{2n}, \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n+1,1}, & y_{n+1,2}, & \cdots y_{n+1,n} \end{array}$$

und definiren die n Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_{n+1}$ durch das System linearer Gleichungen

$$\text{(III)} \qquad \varphi_1 y_{1i} + \varphi_2 y_{2i} + \cdots + \varphi_{n+1} y_{n+1,i} = 0 \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\cdots n)},$$

so sind die $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_{n+1}$ proportional den aus dem rechteckigen Systeme

$$(\delta) \qquad (y_{\varkappa i}) \qquad {\scriptstyle (\varkappa=1,2,\cdots n+1;\ i=1,2,\cdots n)}$$

gebildeten Determinanten n-ter Ordnung, falls das System (δ) vom Range n ist. — Wenn x den Querschnitt $l_\varkappa$ überschreitet, so erfährt jedes der Systeme

$$y_{\varkappa 1}, y_{\varkappa 2}, \cdots y_{\varkappa n}$$

die Substitution $\mathsf{A}_\varkappa$, jede der erwähnten $(n+1)$ Determinanten multiplicirt sich folglich mit der Determinante $|\mathsf{A}_\varkappa|$ dieser Substitution. Die n Quotienten dieser Determinanten sind also in der unzerschnittenen x-Ebene eindeutige Functionen von x, und da diese Functionen ebensowenig wie die $[y_{\varkappa i}]$ selbst Unbestimmtheitsstellen darbieten können, sind sie rationale Functionen von x und demnach Fuchs'sche Functionen von η. Die durch die Gleichungen (I) definirten Functionen

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_{n+1}$$

sind also proportional gewissen wohlbestimmten rationalen Functionen von x, d. h. wir haben den Satz:

1) Je $(n+1)$ Systeme zu den Gruppen ϑ und Θ gehöriger Fuchs'scher Zetafunctionen von η befriedigen eine homogene lineare Beziehung von der Form (III), deren Coefficienten Fuchs'sche Functionen von η sind.

Falls das System (δ) von niedrigerem als dem n-ten Range ist, befriedigen die Functionssysteme nicht eine, sondern mehrere von einander unabhängige Beziehungen von der angegebenen Art.

Aus diesem Satze ziehen wir nun zwei wichtige Folgerungen (vergl. die ähnlichen Betrachtungen in den Nummern 163, 222, Bd. II, 1).

Zuvörderst betrachten wir das System $[y_i]$ Fuchs'scher Zetafunctionen und die Systeme der Ableitungen $1, 2, \cdots n$-ter Ordnung dieser Functionen nach x. Wenn dann, wie wir offenbar voraussetzen dürfen, zwischen den $[y_i]$ keine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten besteht, so ist (Nr. 14, Bd. I, S. 38) die Determinante

$$(\varepsilon) \qquad \left| \frac{d^{\varkappa-1} y_i}{dx^{\varkappa-1}} \right| \neq 0 \qquad {\scriptstyle (i,\varkappa=1,2,\cdots n)},$$

d. h. wir haben in den

$$\left(\frac{d^\varkappa y_i}{dx^\varkappa}\right) \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n; \quad i = 1, 2, \cdots n)$$

$(n + 1)$ Systeme zu den Gruppen ϑ und Θ gehöriger Zetafunctionen, die ein rechteckiges System vom Range n bilden. Diese Systeme befriedigen demnach eine homogene lineare Relation mit in x rationalen Coefficienten, und zwar ist der Coefficient der n-ten Ableitung zufolge der Ungleichung (ε) von Null verschieden. Hieraus folgt mit Rücksicht auf die oben gefundenen Eigenschaften der $[y_i]$ der Satz:

2) Betrachtet man ein System Fuchs'scher Zetafunctionen, welches zu den Gruppen ϑ und Θ gehört, als Functionen einer zu der Gruppe ϑ gehörigen Fuchs'schen Function, die innerhalb des Fundamentalbereiches jeden Werth nur ein einziges Mal annimmt, so constituiren diese Functionen ein Fundamentalsystem einer linearen homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung der Fuchs'schen Classe, die nebst den Werthen

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, \quad a_{\sigma+1},$$

die den Ecken des Fundamentalbereiches der Gruppe ϑ entsprechen, nur noch ausserwesentlich singuläre Stellen oder solche wesentlich singuläre Stellen besitzen kann, wo die Integrale wie rationale Functionen unendlich werden. Die Monodromiegruppe dieser Differentialgleichung ist die Gruppe Θ.

Bedeutet $[Z_i]$ ein beliebiges System zu den Gruppen ϑ und Θ gehöriger Zetafunctionen, so folgt durch Zusammenstellung dieses Systems mit den n Systemen

$$\frac{d^\varkappa y_i}{dx^\varkappa} \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n - 1; \quad i = 1, 2, \cdots n)$$

und mit Rücksicht auf den Satz 1) oder auch direct aus den Ergebnissen der Nummern 163, 165 (Bd. II, 1) und dem Satze 2) der Satz:

3) Systeme Fuchs'scher Zetafunctionen, die zu denselben Gruppen ϑ, Θ gehören, befriedigen als Functionen von $x = f(\eta)$ aufgefasst, Differentialgleichungen derselben Art,

oder mit anderen Worten:

Jedes System zu den Gruppen ϑ, Θ gehöriger Fuchs'scher Zetafunctionen ist durch ein solches System $[y_i]$ in der Form (A) darstellbar, wo die Zahl $p < n$ ist.

Zweites Kapitel.

355. **Einführung der Reihen ξ und allgemeine Eigenschaften derselben.**

Wir wenden uns nun zum Beweise der Existenz eines Systems Fuchs'scher Zetafunctionen, welches zu den gegebenen Gruppen ϑ und Θ gehört.

Es mögen durch

$$S_\nu \eta = \frac{\alpha_\nu \eta + \beta_\nu}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}, \qquad \alpha_\nu \delta_\nu - \beta_\nu \gamma_\nu = 1,$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \cdots; \; S_0 = 1)$$

die Substitutionen der Gruppe ϑ und durch

$$T_\nu = (a_{i\varkappa}^{(\nu)}) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$
$$(i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

die entsprechenden Substitutionen der mit ϑ isomorphen Gruppe Θ bezeichnet werden. Es werde ferner vorausgesetzt, dass die Substitutionen der Gruppe Θ unimodulare seien, was offenbar keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit involvirt.

Die zu T_ν inverse Substitution von Θ lautet dann (vergl. Nr. 30, Bd. I, S. 94)

$$T_\nu^{-1} = (A_{i\varkappa}^{(\nu)})$$
$$(i, \varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

wo $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ die zu dem Elemente $a_{\varkappa i}^{(\nu)}$ gehörige Subdeterminante der Determinante

$$| a_{i\varkappa}^{(\nu)} | = 1$$
$$(i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

bedeutet.

Wenn wir die Substitution T_ν auf ein System von n Grössen

$$y_1, y_2, \cdots y_n$$

anwenden, so bezeichnen wir den Ausdruck, in den sich y_i verwandelt, durch

$$T_\nu y_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{i\varkappa}^{(\nu)} y_\varkappa \qquad (i=1,2,\cdots n)$$

und betrachten nun n rationale Functionen von η

$$H_1(\eta),\ H_2(\eta),\ \cdots H_n(\eta).$$

Mit Hülfe dieser Functionen bilden wir das System von n Reihen

$$(1) \qquad \xi_i(\eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} T_\nu^{-1} H_i(S_\nu \eta) \left(\frac{dS_\nu \eta}{d\eta}\right)^m \qquad (i=1,2,\cdots n),$$

wo m eine positive ganze Zahl grösser als Eins bedeutet, dann besitzen diese Reihen, ihre unbedingte Convergenz vorausgesetzt, die folgenden Eigenschaften.

Untersuchen wir zunächst die Aenderungen, die die Reihen ξ_i erfahren, wenn auf η eine Substitution S_μ der Gruppe ϑ angewandt wird. Die Gesammtheit der Substitutionen

$$S_\nu S_\mu \qquad (\nu=0,1,2,\cdots)$$

ist mit der Gruppe ϑ, die Gesammtheit der Substitutionen

$$T_\nu T_\mu \qquad (\nu=0,1,2,\cdots)$$

mit der Gruppe Θ identisch; da ferner

$$(T_\nu T_\mu)^{-1} = T_\mu^{-1} T_\nu^{-1}$$

ist, so können wir die Reihe ξ_i in die Form

$$(2) \qquad \xi_i(\eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} T_\mu^{-1} T_\nu^{-1} H_i(S_\nu S_\mu \eta) \left(\frac{dS_\nu S_\mu \eta}{d\eta}\right)^m$$

setzen.

Wenden wir in (1) auf η die Substitution S_μ an, so ergiebt sich

$$\xi_i(S_\mu \eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} T_\nu^{-1} H_i(S_\nu S_\mu \eta) \left(\frac{dS_\nu S_\mu \eta}{dS_\mu \eta}\right)^m,$$

wir erhalten also durch Vergleichung mit (2)

$$\xi_i(\eta) = \left(\frac{dS_\mu \eta}{d\eta}\right)^m T_\mu^{-1} \xi_i(S_\mu \eta),$$

woraus sich

$$(3) \qquad \xi_i(S_\mu \eta) = \left(\frac{d\eta}{dS_\mu \eta}\right)^m T_\mu \xi_i(\eta)$$

ergiebt. Diese Gleichung lehrt also, dass sich die $\xi_i(\eta)$ bei Anwendung der Substitution S_μ von ϑ auf η mit dem Factor

$$\left(\frac{d\eta}{dS_\mu \eta}\right)^m = (\gamma_\mu \eta + \delta_\mu)^{2m}$$

multipliciren und überdies die der Substitution S_μ von ϑ entsprechende Substitution T_μ der Gruppe Θ erfahren.

Aehnlich wie bei den Thetareihen (Nr. 314, S. 210 ff.) kommen wir zu Ausdrücken, deren Verhalten gegenüber den Substitutionen der Gruppe ϑ ein übersichtlicheres ist, wenn wir von den Reihen $\xi_i(\eta)$ zu homogenen Ausdrücken des Grades $(-2m)$ zweier Grössen u_1, u_2 übergehen, als deren Quotient

$$\eta = \frac{u_2}{u_1}.$$

die Variable η aufgefasst werden kann. Betrachten wir z. B. die zu der Gruppe ϑ gehörige Fuchs'sche Function $x = f(\eta)$, die innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 von ϑ jeden Werth nur ein einziges Mal annimmt, so sind

$$u_1 = \sqrt{\frac{dx}{d\eta}}, \qquad u_2 = \eta\sqrt{\frac{dx}{d\eta}}$$

die Elemente eines Fundamentalsystems der Differentialgleichung (II) (Nr. 353, S. 341) die (vergl. Nr. 314, S. 210) sich in

$$(4) \qquad \begin{cases} S_\nu u_1 = \pm(\delta_\nu u_1 + \gamma_\nu u_2), \\ S_\nu u_2 = \pm(\beta_\nu u_1 + \alpha_\nu u_2) \end{cases}$$

verwandeln, wenn η die Substitution S_ν der Gruppe ϑ erfährt. Die homogenen Substitutionen (4) constituiren eine mit ϑ isomorphe Gruppe t, wir behalten für die Substitutionen von t die Bezeichnung S_ν bei, da es bei den folgenden Ueberlegungen auf das $\pm$, durch welches die homogene Substitution sich von der projectiven unterscheidet, nicht ankömmt.

Multipliciren wir die rationalen Functionen

$$H_1(\eta),\ H_2(\eta),\ \cdots\ H_n(\eta)$$

mit u_1^{-2m}, wodurch dieselben in homogene Functionen (Formen) des Grades $(-2m)$ in den u_1, u_2

$$u_1^{-2m} H_i(\eta) = \varphi_i(u_1, u_2) \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

übergehen, so ist offenbar

$$\varphi_i(S_\nu u_1, S_\nu u_2) = u_1^{-2m} H_i(S_\nu \eta)\left(\frac{dS_\nu \eta}{d\eta}\right)^m,$$

und folglich sind die Reihen

$$(5)\qquad Z_i(u_1,\, u_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} T_\nu^{-1} \varphi_i(S_\nu u_1,\; S_\nu u_2) = u_1^{-2m} \mathfrak{z}_i(\eta) \qquad (i=1,2,\cdots n)$$

ebenfalls homogene Functionen oder Formen des Grades $(-2m)$ der u_1, u_2.

Wenn nun die u_1, u_2 die Substitution S_μ der mit der projectiven Gruppe ϑ isomorphen homogenen Gruppe t erfahren, so verwandelt sich $Z_i(u_1, u_2)$ in

$$(6)\qquad Z_i(S_\mu u_1,\, S_\mu u_2) = T_\mu Z_i(u_1,\, u_2) \qquad (i=1,2,\cdots n),$$

d. h. die $Z_i(u_1, u_2)$ werden durch die entsprechende Substitution der Gruppe Θ transformirt und bilden folglich, die unbedingte Convergenz der Reihen (5) vorausgesetzt, ein Functionssystem von η, welches in Bezug auf die Gruppen ϑ und Θ ein ähnliches Verhalten zeigt, wie es für die Systeme der zu diesen Gruppen gehörigen Fuchs'schen Zetafunctionen gefordert wurde. Dabei können die in den Reihen (5) auftretenden $\varphi_i(u_1, u_2)$ offenbar ganz beliebige rationale homogene Functionen $(-2m)$-ten Grades der u_1, u_2 bedeuten.

356. Ansatz zum Convergenzbeweise im Falle, wo keine parabolischen Substitutionen vorhanden sind.

Wir gehen nun an die Untersuchung der Convergenz der Reihen (5) beziehungsweise (1).

In mehr expliciter Form lauten die Reihen (1) wie folgt:

$$(1\,\mathrm{a})\qquad \mathfrak{z}_i(\eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\varkappa=1}^{n} A_{i\varkappa}^{(\nu)} H_i\left(\frac{\alpha_\nu \eta + \beta_\nu}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}\right) \frac{1}{(\gamma_\nu \eta + \delta_\nu)^{2m}} \qquad (i=1,2,\cdots n).$$

Da sich (vergl. Nr. 305, S. 176) für die Ausdrücke

$$H_i\left(\frac{\alpha_\nu \eta + \beta_\nu}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}\right) \qquad (i=1,2,\cdots n;\quad \nu=0,1,2,\cdots)$$

eine obere Grenze angeben lässt, vorausgesetzt, dass (vergl. a. a. O. S. 175) die rationalen Functionen $H_i(\eta)$ an keiner auf der Peripherie des Einheitskreises gelegenen Stelle unendlich werden, und dass η weder eine Unendlichkeitsstelle dieser n rationalen Functionen ist, noch mit einer solchen vermöge der Substitutionen der Gruppe ϑ correspondirt, so hängt die unbedingte Convergenz der Reihen (1a) wesentlich von der Convergenz der n^2 Reihen

(7) $$\lambda_{i\varkappa} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| A_{i\varkappa}^{(\nu)} \frac{1}{(\gamma_\nu \eta + \delta_\nu)^{2m}} \right| \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

ab.

Wir setzen jetzt voraus, dass die Fuchs'sche Gruppe ϑ so beschaffen ist, dass ihr Fundamentalbereich F_0 keine parabolischen Ecken enthält, so dass also die Winkelsummen bei den Ecken, die einen Cyklus bilden, nicht gleich Null, sondern gleich

$$\frac{2\pi}{g_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma + 1)$$

sind, wo die $g_\varkappa$ endliche positive ganze Zahlen bedeuten. Bezeichnen wir wie gewöhnlich mit $A_1, A_2, \cdots A_\sigma$ die Substitutionen, die die congruenten Seitenpaare $s_\varkappa, s_\varkappa'$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$ von F_0 in einander transformiren, dann sind diese σ Substitutionen elliptische und bilden mit ihren inversen eine Basis der Gruppe ϑ. Jede Substitution von ϑ ist in der Form

(8) $$S_\nu = A_{i_1}^{\lambda_1} A_{i_2}^{\lambda_2} \cdots A_{i_\mu}^{\lambda_\mu}$$

darstellbar, wo die $i_1, i_2, \cdots i_\mu$ Zahlen der Reihe $1, 2, \cdots \sigma$, die

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_\mu$$

positive oder negative ganze Zahlen bedeuten.

Zufolge der Relationen

(9) $$A_\varkappa^{g_\varkappa} = 1 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma)$$

kann jede Substitution S_ν auf unendlich verschiedene Arten in der Form (8) dargestellt werden, es wird aber unter diesen Darstellungen eine (eventuell auch mehrere) geben, für welche die Summe der absoluten Beträge der Zahlen $\lambda_\varkappa$ den kleinsten möglichen Werth erhält, wir setzen dann diese Summe

(10) $$\sum_{\varkappa=1}^{\mu} |\lambda_\varkappa| = \operatorname{Ind} S_\nu$$

und nennen sie den Index der Substitution S_ν.

Sei η z. B. ein innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 gelegener Werth, und denken wir uns den Punkt $S_\nu \eta$, der aus η durch die Substitution S_ν von ϑ hervorgeht, mit dem Punkte $\eta = 0$, den wir als innerhalb von F_0 gelegen voraussetzen wollen, durch eine gerade Linie verbunden. — Dann entspricht dieser geraden Linie auf der Fläche vom constanten Krümmungsmaasse -1 eine geodätische Linie; die superficielle Länge der geradlinigen Strecke von 0 bis $S_\nu \eta$ ist demnach

nichts Anderes wie der geodätische Abstand der diesen beiden Punkten entsprechenden Punkte auf der Fläche vom constanten Krümmungsmaasse — 1, also übereinstimmend mit der in der Nr. 308 (S. 186) mit r' bezeichneten Grösse. Wir haben folglich nach Gleichung (26) der erwähnten Nummer

$$r' = \log \frac{1+|S_\nu \eta|}{1-|S_\nu \eta|}.$$

Die geradlinige Verbindungslinie der Punkte 0 und $S_\nu \eta$ wird eine gewisse Anzahl der mit F_0 congruenten Bereiche $F_\varkappa$ der zu der Gruppe ϑ gehörigen Theilung durchqueren, und diese Anzahl N kann offenbar nicht kleiner sein, wie der Index der Substitution S_ν. Zwischen der Zahl N und dem geodätischen Abstande r' des Punktes $S_\nu \eta$ vom Nullpunkte der η-Ebene besteht nun eine Beziehung, die sich am Einfachsten herleiten lässt, wenn man sich des in der Nr. 287 (S. 108) beim Discontinuitätsbeweise angewandten Verfahrens bedient.

Betrachten wir die N Theile, in welche die geradlinige Strecke $(0, S_\nu \eta)$ durch die von ihr durchschnittenen Seiten der Bereiche $F_\varkappa$ zerfällt wird, so sind zunächst die superficiellen Längen derjenigen Theile, die keine Ecken umspannen (vergl. a. a. O.), endliche und von Null verschiedene Grössen, die nicht unter eine angebbare Grenze K herabsinken können. Die Anzahl dieser Theile unserer Strecke ist also jedenfalls kleiner wie

$$\frac{r'}{K}.$$

Solcher Theile der geradlinigen Strecke, die aufeinander folgen und eine und dieselbe Ecke umspannen, kann es, da alle Ecken Doppelpunkte elliptischer Substitutionen sind, höchstens h geben, wo h die grösste unter den positiven ganzen Zahlen

$$g_1, g_2, \cdots g_{\sigma+1}$$

bedeutet. Der Uebergang von aufeinander folgenden Theilen, die eine bestimmte Ecke umspannen, zu aufeinander folgenden Theilen, die eine andere Ecke umspannen, erfolgt nothwendig durch ein Stück, welches selbst keine Ecke umspannt, aber durch die Vereinigung zweier aufeinander folgender und verschiedene Ecken umspannender Theile entsteht (vergl. die Fig. 24, S. 109). Die superficielle Länge eines solchen Verbindungsstückes bleibt stets oberhalb einer gewissen angebbaren Grenze $\overline{K}$, die Anzahl solcher Stücke kann demnach nicht grösser sein, wie

$$\frac{r'}{\overline{K}}.$$

Folglich ist die Gesammtzahl aller Theile unserer Strecke

$$N < r'\left(\frac{1}{K} + \frac{h}{\overline{K}}\right).$$

Die Zahl, die den Factor von r' auf der rechten Seite dieser Ungleichung bildet, ist eine feste von ν unabhängige Grösse; wir bezeichnen dieselbe durch α. Dann ist also zufolge einer oben gemachten Bemerkung

(11) $$\text{Ind } S_\nu < r'\alpha.$$

357. Convergenzbeweis im Falle, wo keine parabolischen Substitutionen vorhanden sind. Divergenz der Reihen im allgemeinen Falle.

Seien $\mathsf{A}_\varkappa$ diejenigen Substitutionen der Gruppe Θ, die vermöge des zwischen den Gruppen ϑ und Θ bestehenden Isomorphismus den Substitutionen $A_\varkappa$ von ϑ entsprechen. Dann ist offenbar die der Substitution S_ν von ϑ entsprechende Substitution T_ν von Θ in der der Gleichung (10) entsprechenden Form

(12) $$T_\nu = \mathsf{A}_{i_1}^{\lambda_1}\mathsf{A}_{i_2}^{\lambda_2} \cdots \mathsf{A}_{i_\mu}^{\lambda_\mu}$$

darstellbar; wenn der zwischen ϑ, Θ bestehende Isomorphismus kein holoedrischer ist, so gestattet die Darstellung (12) von T_ν eventuell noch eine Reduction auf eine Form, wo die Summe der absoluten Beträge der Exponenten kleiner ist wie Ind S_ν. Aus (12) folgt für die zu T_ν inverse Substitution

(12a) $$T_\nu^{-1} = \mathsf{A}_{i_\mu}^{-\lambda_\mu}\mathsf{A}_{i_{\mu-1}}^{-\lambda_{\mu-1}} \cdots \mathsf{A}_{i_1}^{-\lambda_1};$$

die Coefficienten $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ dieser Substitution treten in den Reihen (7) mit Ausdrücken multiplicirt auf, die nur noch von der Substitution S_ν abhängen. Wir wollen darum versuchen, für die absoluten Beträge der $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ eine obere Grenze aufzufinden.

Betrachten wir die Coefficienten der Substitutionen

$$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots \mathsf{A}_\sigma$$

und ihrer inversen, so lässt sich jedenfalls eine positive Zahl M angeben, die nicht kleiner ist, wie der absolute Betrag irgend eines dieser $2n^2\sigma$ Coefficienten. Die Coefficienten einer Substitution, die aus zwei Substitutionen $\mathsf{A}_i^{\pm 1}$, $\mathsf{A}_\varkappa^{\pm 1}$ componirt ist, sind Summen von n Gliedern, deren jedes ein Product von einem Coefficienten der einen in einen Coefficienten der anderen Substitution ist; der absolute Betrag eines

solchen Coefficienten ist demnach nicht grösser wie $n M^2$. Schliesst man so weiter, so erkennt man, dass für die in der Form (12a) dargestellte Substitution T_ν^{-1} der absolute Betrag jedes Coefficienten der Ungleichung

$$|A_{ix}^{(\nu)}| \leqq (n M)^{\text{Ind } S_\nu}$$

Genüge leistet. Wir haben also mit Rücksicht auf (11)

$$(13) \qquad |A_{ix}^{(\nu)}| < e^{r' \alpha \cdot \log n M}.$$

Nun ist nach Gleichung (27) der Nr. 308 (S. 186)

$$\left|\frac{1}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}\right|^2 < \frac{K}{e^{r'} + e^{-r'} + 2} < K e^{-r'},$$

wo K eine von ν unabhängige, nur von $|\eta|$ abhängende Grösse bedeutet, und folglich

$$|A_{ix}^{(\nu)}| \left|\frac{1}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}\right|^{2m-4} < e^{r' [\alpha \cdot \log n M - m + 2]} K^{m-2}.$$

Wählen wir die ganze positive Zahl m so gross, dass

$$(14) \qquad m - 2 > \alpha \cdot \log n M,$$

so ergiebt sich

$$|A_{ix}^{(\nu)}| \left|\frac{1}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}\right|^{2m} < K^{m-2} \left|\frac{1}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}\right|^4;$$

die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left|\frac{1}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}\right|^4$$

ist aber, wie in der Theorie der Fuchs'schen Thetafunctionen bewiesen wurde (Nr. 306, S. 181, Nr. 308, S. 187) convergent, wir haben also die Convergenz der Reihen (7) für Werthe von m, die die Ungleichung (14) befriedigen, bewiesen, und hieraus folgt für ebensolche Werthe von m die unbedingte Convergenz der Reihen $\xi_i(\eta)$.

Wir bemerken, dass die für die Zahl m gefundene Beschränkung (14) im Allgemeinen keine nothwendige ist; da es uns aber im Wesentlichen nur auf einen Existenzbeweis ankömmt, so genügt es, die Convergenz der Reihen $\xi_i(\eta)$ für gewisse wohlcharakterisirte Werthe von m dargethan zu haben.

Wir wenden uns nun zu dem Falle, wo unter den Fundamentalsubstitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_{\sigma+1}$$

der Fuchs'schen Gruppe ϑ parabolische Substitutionen enthalten sind.

Zuvörderst ist leicht einzusehen, dass in diesem Falle die Reihen $\xi_i(\eta)$, wenn die Gruppe Θ keinen weiteren Beschränkungen unterworfen wird, nicht unbedingt convergent sein können.

In der That sei etwa

$$\frac{1}{A\eta-\lambda}=\frac{1}{\eta-\lambda}+\gamma \tag{15}$$

eine der parabolischen Substitutionen unter den A_x in der canonischen Form. Dann können wir uns die Gruppe Θ so transformirt denken, dass die der Substitution A von ϑ entsprechende Substitution A in der canonischen Form (vergl. Nr. 37, Bd. I, S. 127)

$$\mathsf{A}y_x=m_x y_x+n_{x-1}y_{x-1} \qquad (x=1,2,\cdots n;\quad n_0=0)$$

erscheint; wir nehmen ferner der Einfachheit wegen an, dass die n_{x-1} sämmtlich gleich Null sind, so dass also

$$\mathsf{A}=\begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & m_2 & \cdots & 0\\ & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \cdots & m_n\end{pmatrix}$$

ist.

Sondern wir aus der Reihe $\xi_i(\eta)$ diejenigen Glieder aus, die sich auf die positiven und negativen Potenzen der Substitution A beziehen, so lautet das Aggregat dieser Glieder

$$\sum_{q=-\infty}^{+\infty} m_i^{-q}H_i(A^q\eta)\left(\frac{dA^q\eta}{d\eta}\right)^m,$$

oder da nach (15)

$$\frac{dA^q\eta}{d\eta}=\{1+(\eta-\lambda)q\gamma\}^{-2}$$

ist,

$$\sum_{q=-\infty}^{+\infty} m_i^{-q}\overline{H}_i\left(\frac{1}{\eta-\lambda}+q\gamma\right)[1+q\gamma(\eta-\lambda)]^{-2m}, \tag{16}$$

wo

$$\overline{H}_i\left(\frac{1}{\eta-\lambda}\right)=H_i(\eta)$$

gesetzt wurde. Die Reihe (16) hat also die Form

$$\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(q)}{m_i^q}, \tag{17}$$

wo $\varphi(q)$ den Algorithmus einer rationalen Function von q bedeutet.

Nun ist für $|m_i|>1$ der Grenzwerth des Gliederquotienten der Reihe

$$\sum_{q=0}^{\infty} m_i^q \varphi(-q),$$

für $|m_i| < 1$ der Grenzwerth des Gliederquotienten der Reihe

$$\sum_{q=0}^{\infty} \frac{\varphi(q)}{m_i^q}$$

dem absoluten Betrage nach grösser wie Eins, die Reihe (17) ist folglich, wenn

$$|m_i| \neq 1$$

ist, jedenfalls divergent. Da die m_i nichts Anderes sind, wie die Wurzeln der zu der Substitution A gehörigen Fundamentalgleichung, so haben wir den Satz:

Wenn die Fuchs'sche Gruppe ϑ parabolische Substitutionen enthält, so sind die Reihen $\xi_i(\eta)$ jedenfalls nicht unbedingt convergent, sofern die Wurzeln der Fundamentalgleichungen, die zu den diesen parabolischen Substitutionen entsprechenden Substitutionen der Gruppe Θ gehören, von Eins verschiedene absolute Beträge besitzen.

358. Ansatz zum Convergenzbeweise im Falle wo parabolische Substitutionen vorhanden sind.

Wenn unter den Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_{\sigma+1}$$

parabolische enthalten sind, so werden wir mit Rücksicht auf den eben bewiesenen Satz nur dann in eine Untersuchung der unbedingten Convergenz der Reihen $\xi_i(\eta)$ einzutreten haben, wenn die den parabolischen Substitutionen der Gruppe ϑ entsprechenden Substitutionen der Gruppe Θ so beschaffen sind, dass die absoluten Beträge der Wurzeln der zu ihnen gehörigen Fundamentalgleichungen den Werth Eins besitzen. In diesem Falle lässt sich aber auch zeigen, dass die Reihen $\xi_i(\eta)$ für hinreichend grosse Werthe von m allemal unbedingt convergent sind.

Die Voraussetzung, dass alle Substitutionen von Θ, die parabolischen Substitutionen von ϑ entsprechen, Fundamentalgleichungen besitzen, deren Wurzeln dem absoluten Betrage nach gleich Eins sind, lässt sich durch die einfachere ersetzen, dass diese Bedingung für diejenigen Substitutionen von Θ erfüllt sei, die den parabolischen unter den Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_{\sigma+1}$$

von ϑ entsprechen. Denn jede parabolische Substitution von ϑ geht, wie wir wissen, aus einer Potenz der unter den $A_1, A_2, \cdots A_{\sigma+1}$ enthaltenen parabolischen Substitutionen durch Transformation mittelst einer Substitution von ϑ hervor; eine Substitution von Θ, die einer parabolischen Substitution von ϑ entspricht, entsteht also aus einer Potenz einer derjenigen Substitutionen, die den parabolischen unter den

$$A_1, A_2, \cdots A_{\sigma+1}$$

entsprechen, durch Transformation mittelst einer Substitution von Θ; Substitutionen, die durch Transformation aus einander hervorgehen, haben aber dieselbe Fundamentalgleichung, und die Wurzeln der Fundamentalgleichung einer Substitution T^p sind die p-ten Potenzen der Wurzeln der Fundamentalgleichung der Substitution T.

Ohne dadurch die Allgemeinheit zu beschränken können wir voraussetzen, dass die zu dem σ-gliedrigen Eckencyklus des Fundamentalbereiches F_0 gehörige Fundamentalsubstitution $A_{\sigma+1}$ von ϑ keine parabolische sei; es lässt sich das nämlich, wenn unter den Zahlen

$$g_1, g_2, \cdots g_{\sigma+1}$$

wenigstens eine endliche vorhanden ist, durch einfache Vertauschung der Reihenfolge und damit verbundene erlaubte Abänderung von F_0 erreichen; falls jedoch alle $g_\varkappa$ unendlich gross sein sollten, hat man nur einen scheinbaren $(\sigma + 1)$-gliedrigen Eckencyklus mit der Winkelsumme 2π einzuschalten, demselben die identische Substitution 1 zuzuordnen, um dann F_0 durch erlaubte Abänderung so umgestalten zu können, dass die den $\sigma + 1$ parabolischen Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_{\sigma+1}$$

entsprechenden Ecken eingliedrige Cykeln bilden.

Wir betrachten wieder wie im Falle, wo keine parabolische Substitution vorhanden war, einen innerhalb des Fundamentalbereiches F_0 gelegenen η-Werth, und die geradlinige Verbindungslinie des ebenfalls innerhalb F_0 gelegenen Nullpunktes der η-Ebene mit dem Punkte $S_\nu \eta$. Die superficielle Länge der geradlinigen zwischen 0 und $S_\nu \eta$ gelegenen Strecke bezeichnen wir wie oben mit r'. Die gerade Linie $(0, S_\nu \eta)$ möge den Bereich F_0 in einem Punkte der Seite $s_{\varkappa_1}$ verlassen, dann in einen der mit F_0 congruenten Bereiche eintreten, diesen in einem Punkte der der Seite $s_{\varkappa_2}$ von F_0 entsprechenden Seite verlassen u. s. w.; endlich möge die von dieser Geraden durchschnittene Seite des letzten Bereiches, welchen dieselbe noch verlässt, der Seite $s_{\varkappa_\mu}$ von F_0 entsprechen. Dabei bedeuten

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_\mu$$

Zahlen der Reihe $\pm 1, \pm 2, \cdots \pm \sigma$, und für ein positives λ wurde $s_{-\lambda}$ an Stelle von s_λ' geschrieben.

Die Substitution $S_\nu \eta$ ist dann offenbar in der Form

$$S_\nu = A_{\varkappa_1} A_{\varkappa_2} \cdots A_{\varkappa_\mu}$$

darstellbar, wo wieder für ein positives λ

$$A_{-\lambda} = A_\lambda^{-1}$$

zu nehmen ist. Indem wir gleiche und aufeinander folgende unter den $A_{\varkappa_1}, A_{\varkappa_2}, \cdots A_{\varkappa_\mu}$ zusammenfassen, erhalten wir für S_ν die Darstellung

(18) $$S_\nu = A_{i_1}^{\lambda_1} A_{i_2}^{\lambda_2} \cdots A_{i_\tau}^{\lambda_\tau},$$

wo die $i_1, i_2, \cdots i_\tau$ Zahlen der Reihe $\pm 1, \pm 2, \cdots \pm \sigma$, die

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_\tau$$

positive ganze Zahlen bedeuten.

Wir denken uns nun um jede Ecke von F_0 einen kleinen Kreis von folgender Beschaffenheit beschrieben. Für eine Ecke λ, die Doppelpunkt einer elliptischen Substitution ist, sei der betreffende Kreis der geometrische Ort aller Punkte, die von λ einen gewissen constanten (auf der Fläche vom constanten Krümmungsmaasse -1 gemessenen) geodätischen Abstand haben, für eine Ecke, die Doppelpunkt einer parabolischen Substitution ist, möge der betreffende Kreis den Einheitskreis in dieser Ecke berühren. Die so construirten Kreise, die offenbar nichts anderes sind wie Bahncurven (vgl. Nr. 200, Bd. II, 1, S. 271) derjenigen Substitution, um deren Doppelpunkt dieselben beschrieben sind, bilden wir nun durch alle Substitutionen der Fuchs'schen Gruppe ϑ ab, dann erscheint jede Ecke der dieser Gruppe entsprechenden Theilung mit einem solchen Kreise umgeben, und zwar sind die um correspondirende Ecken beschriebenen Kreise im Sinne der in der Nr. 285 (S. 101) eingeführten Terminologie einander congruent. Wir können die gedachten Kreise so klein wählen, dass dieselben sich gegenseitig ausschliessen; die superficielle Länge einer Linie, die zwei auf den Peripherien zweier verschiedener dieser Kreise gelegene Punkte mit einander verbindet, kann dann nicht unter eine gewisse angebbare Grenze l herabsinken.

Die gerade Linie $(0, S_\nu \eta)$ wird im Allgemeinen eine gewisse Anzahl dieser kleinen Kreise durchqueren; diese Anzahl ist aber keinesfalls grösser wie

$$\frac{r'}{l}.$$

Wir sondern nun die Substitutionen, die in dem Ausdrucke (18) auftreten, in zwei Kategorien. In die erste Kategorie gehören diejenigen, die Durchquerungen von Seiten der Bereiche unserer Theilung durch die gerade Linie $(0, S_\nu \eta)$ entsprechen, die entweder ausserhalb der kleinen Kreise oder innerhalb von solchen dieser Kreise erfolgen, die um Doppelpunkte elliptischer Substitutionen beschrieben sind. Der zweiten Kategorie werden jene Substitutionen zugezählt, die Durchquerungen entsprechen, die innerhalb von kleinen Kreisen erfolgen, die um Doppelpunkte parabolischer Substitutionen beschrieben wurden.

Betrachten wir einen dieser letzteren kleinen Kreise $\mathfrak{C}$, und sei λ der auf demselben befindliche parabolische Doppelpunkt. Dann münden offenbar alle Seiten der Theilung, die von $\mathfrak{C}$ getroffen werden, in dem Punkte λ und gehen demnach (da die parabolischen Eckencykeln als eingliedrige vorausgesetzt wurden) aus einer dieser Seiten durch Anwendung von Potenzen einer parabolischen Substitution der Gruppe ϑ mit dem Doppelpunkte λ hervor. Wenn also die Gerade $(0, S_\nu \eta)$ etwa $\pi_\varkappa$ solcher Seiten innerhalb $\mathfrak{C}$ durchquert, so entspricht diesen Durchquerungen eine in dem Ausdrucke (18) auftretende Substitution

$$B_\varkappa^{\pi_\varkappa},$$

wo $B_\varkappa$ eine der parabolischen unter den Substitutionen $A_1, A_2, \cdots A_\sigma$ oder deren inversen bedeutet.

Die Substitutionen der zweiten Kategorie, die in (18) auftreten, können also durch

$$B_1^{\pi_1}, B_2^{\pi_2}, \cdots B_q^{\pi_q}$$

bezeichnet werden, wo die $B_1, B_2, \cdots B_q$ parabolische unter den Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_\sigma$$

oder deren inversen, die $\pi_1, \pi_2, \cdots \pi_q$ positive ganze Zahlen bedeuten. Die Anzahl q dieser Substitutionen ist offenbar kleiner wie die Anzahl aller kleinen Kreise, die die Gerade $(0, S_\nu \eta)$ durchqueren kann, wir haben also

$$q < \frac{r'}{l}.$$

359. Bestimmung oberer Grenzen für die Summen beziehungsweise Producte der Exponenten der Substitutionen erster und zweiter Kategorie.

Seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_p$ die Exponenten, zu denen erhoben die Substitutionen der ersten Kategorie in dem Ausdrucke (18) auftreten. Dann lässt sich für die Summe dieser $\varepsilon_\varkappa$ sofort eine obere Grenze angeben.

Die superficielle Länge einer Curve, die zwei auf verschiedenen Seiten von F_0 gelegene Punkte mit einander verbindet, ohne in einen der kleinen Kreise einzudringen, bleibt offenbar stets oberhalb einer gewissen angebbaren Grenze K. Die Anzahl der Seiten von Bereichen unserer Theilung, die von der geraden Linie $(0, S_\nu \eta)$ in Punkten überschritten werden, die ausserhalb der kleinen Kreise gelegen sind, ist demnach nicht grösser wie

$$\frac{r'}{K}.$$

Die Anzahl der Seiten, die die Gerade $(0, S_\nu \eta)$ im Innern eines der kleinen eine elliptische Ecke umgebenden Kreises durchqueren kann, ist jedenfalls nicht grösser wie die grösste unter den Zahlen $g_\varkappa$, die die Periodicität der elliptischen unter den Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_{\sigma+1}$$

angeben; sei diese grösste Zahl gleich h. Dann ist also die Anzahl der von unserer Geraden im Innern von kleinen elliptische Ecken umgebenden Kreisen überschrittenen Seiten nicht grösser wie

$$\frac{hr'}{l}.$$

Nach der Definition der Substitutionen erster Kategorie haben wir also

$$(19) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{p} \varepsilon_\varkappa < r' \left(\frac{1}{K} + \frac{h}{l}\right).$$

Die Maximalzahl der Durchquerungen, die innerhalb eines Kreises $\mathfrak{C}$ erfolgen können, der um eine parabolische Ecke λ beschrieben ist, d. h. also der den Einheitskreis in λ berührt, ergiebt sich in folgender Weise.

Möge die gerade Linie $(0, S_\nu \eta)$ etwa in einem Punkte A in $\mathfrak{C}$ eintreten und bei B aus $\mathfrak{C}$ austreten (der Fall, dass der Punkt $S_\nu \eta$ sich im Innern von $\mathfrak{C}$, also zwischen A und B befindet, ist nicht ausgeschlossen). Betrachten wir dann die in der Ecke λ einmündenden Seiten, so berühren dieselben einander im Punkte λ und schneiden in

[illegible] Punkte des Einheitskreises [illegible] ... der Gruppe [illegible] ... Bogenstück des Kreises [illegible] ... Länge τ. [illegible] also N die [illegible] Länge des [illegible] Bogens des Kreises C, so ist die Anzahl der [illegible] Geraden (O, S, τ) [illegible] C [illegible] Seiten [illegible] höchstens gleich

$$\frac{N}{\tau}.$$

Für die Grösse N lässt sich aber eine obere Grenze angeben [illegible] nur von dem geodätischen Abstande [illegible] der Punkte A, B [illegible] der [illegible] Länge der zwischen diesen beiden Punkten gelegenen Strecke der geraden Linie (O, S, τ) abhängt.

Bezeichne μ den einen der beiden Punkte des Einheitskreises [illegible] von der gedachten Geraden ausgeschnitten wird und setzen wir

$$(20)\qquad t = u + vi = \frac{i}{2}\,\frac{(1-\eta)(1-\mu)}{\eta-\mu},$$

wo also $|\mu| = 1$, u, v real sind, so entspricht der Peripherie des Einheitskreises der η-Ebene die reale t-Axe, dem Innern des Einheitskreises der η-Ebene die obere t-Halbebene, dem Kreise C ein die reale t-Axe berührender Kreis

$$(21)\qquad (u-\alpha)^2 + (v-\beta)^2 = \beta^2,$$

wo α real, β real positiv ist, und endlich der Geraden (O, S, τ) der η-Ebene eine gerade Linie (weil für $\eta = \mu$, $t = \infty$ ist), die zur realen t-Axe senkrecht steht und den Kreis (21) in den den beiden Punkten A, B der η-Ebene entsprechenden vertical übereinander liegenden Punkten mit den Coordinaten

$$(u_1, v_1), \qquad (u_1, v_2)$$

schneiden möge. Es ist dann offenbar

$$(\alpha - u_1)^2 = v_1 v_2.$$

Das Bogenelement

$$ds = 2\sqrt{\frac{dp^2 + dq^2}{(1-p^2-q^2)^2}} \qquad (\eta = p + qi)$$

ler Fläche vom constanten Krümmungsmaasse -1 nimmt in den Coordinaten u, v die Gestalt an

$$ds = 2\sqrt{\frac{du^2+dv^2}{v^2}}.$$

Wir finden demnach für die superficielle Länge der geradlinigen Strecke von (u_1, v_1) bis (u_1, v_2) der t-Ebene, oder was dasselbe heisst, für die superficielle Länge $\mathfrak{L}_1$ des zwischen den Punkten A, B gelegenen geradlinigen Stückes der η-Ebene den Ausdruck

$$\mathfrak{L}_1 = 2\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v} = 2\log\frac{v_2}{v_1},$$

und für die superficielle Länge N des zwischen denselben Punkten gelegenen Bogens des Kreises (21)

$$N = 2\beta\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v\sqrt{2v\beta - v^2}} = -2\beta\left[\frac{\sqrt{2v\beta - v^2}}{\beta v}\right]_{v_1}^{v_2}$$

$$= 2\left[\frac{u_1-\alpha}{v_1} - \frac{u_1-\alpha}{v_2}\right] = \frac{2(v_2-v_1)}{\sqrt{v_1 v_2}}.$$

Da nun

$$e^{\mathfrak{L}_1} - e^{-\mathfrak{L}_1} = \frac{v_2}{v_1} - \frac{v_1}{v_2} = 2\,\frac{v_2 - v_1}{\sqrt{v_1 v_2}}\cdot\frac{\frac{v_2+v_1}{2}}{\sqrt{v_1 v_2}}$$

und

$$\frac{v_2+v_1}{2} > \sqrt{v_1 v_2}$$

ist, so folgt

$$N < e^{\mathfrak{L}_1} - e^{-\mathfrak{L}_1} < e^{\mathfrak{L}_1}. \tag{22}$$

Die Anzahl der Durchquerungen, die innerhalb des kleinen Kreises $\mathfrak{C}$ stattfinden, ist also kleiner wie

$$\frac{e^{\mathfrak{L}_1}}{\tau},$$

und da diese Anzahl nichts anderes ist, wie der Exponent $\pi_\varkappa$ in der zu diesem Kreise $\mathfrak{C}$ gehörigen Substitution der zweiten Kategorie $B_\varkappa^{\pi_\varkappa}$, so ist

$$\pi_\varkappa < \frac{e^{\mathfrak{L}_1}}{\tau}.$$

Wir werden für die Summe der Logarithmen der $\pi_\varkappa$ einer oberen Grenze bedürfen; bilden wir darum

$$\log \pi_\varkappa < \mathfrak{L}_1 - \log\tau.$$

Offenbar kann eine Grösse k so angegeben werden, dass für alle Kreise $\mathfrak{C}$ die Ungleichung

$$k > -\log \tau$$

erfüllt ist, dann haben wir also

$$\log \pi_\varkappa < \mathfrak{L}_1 + k,$$

und da die Summe aller $\mathfrak{L}_1$ keinesfalls grösser sein kann als die superficielle Länge r' der Geraden $(0, S_\nu \eta)$, ergiebt sich

$$\sum_{\varkappa=1}^{q} \log \pi_\varkappa < r' + qk,$$

oder da, wie oben gefunden wurde, q kleiner ist als $\frac{r'}{l}$,

(24) $$\sum_{\varkappa=1}^{q} \log \pi_\varkappa < r'\left(1 + \frac{k}{l}\right).$$

360. Letzter Theil des Convergenzbeweises.

Betrachten wir nun die der Substitution S_ν von ϑ entsprechende Substitution T_ν von Θ, so ist dieselbe in der Form

(25) $$T_\nu = \mathsf{A}_{i_1}^{\lambda_1} \mathsf{A}_{i_2}^{\lambda_2} \cdots \mathsf{A}_{i_\tau}^{\lambda_\tau}$$

darstellbar, wo die $\mathsf{A}_\varkappa$ wieder die den $A_\varkappa$ $(\varkappa = \pm 1, \pm 2, \cdots \pm \sigma)$ entsprechenden Substitutionen von Θ bedeuten. Seien

$$\mathsf{B}_1^{\pi_1}, \mathsf{B}_2^{\pi_2}, \cdots \mathsf{B}_q^{\pi_q}$$

die den in (18) auftretenden Substitutionen zweiter Kategorie entsprechenden Substitutionen von Θ, dann können wir diese Substitutionen in folgender Weise umformen.

Möge allgemein T_p eine beliebige derjenigen Substitutionen von Θ bedeuten, die den parabolischen unter den Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_\sigma$$

oder deren inversen entsprechen, dann sind die $\mathsf{B}_1, \cdots \mathsf{B}_q$ jedenfalls solche Substitutionen T_p. Denken wir uns T_p durch Transformation mittelst einer gewissen Substitution U in die canonische Form gesetzt

$$T_p = U^{-1} V U,$$

wo also

$$V y_i = m_i y_i + n_{i-1} y_{i-1} \qquad (i = 1, 2, \cdots n;\ n_0 = 0),$$

und für $m_i \neq m_{i-1}$ stets $n_{i-1} = 0$ ist. Wenn wir diese Ausdrücke der $\mathsf{B}_\varkappa$ in (25) einführen und beachten, dass

$$T_p^\lambda = U^{-1} V^\lambda U$$

ist, so haben wir in (25) erstens Substitutionen $A_\varkappa$, die den Substitutionen erster Kategorie in (18) entsprechen, mit der Exponentensumme

$$\sum_{\varkappa=1}^{p} \varepsilon_\varkappa,$$

zweitens die den q Substitutionen zweiter Kategorie entsprechenden U und U^{-1}, endlich die den $B_1, B_2, \cdots B_q$ entsprechenden canonischen Substitutionen V beziehungsweise zu den Exponenten

$$\pi_1, \pi_2, \cdots \pi_q.$$

Zufolge unserer Voraussetzung haben die zu den Substitutionen T_p beziehungsweise V gehörigen Fundamentalgleichungen die Eigenschaft, dass ihre sämmtlichen Wurzeln den absoluten Betrag Eins besitzen, es ist demnach für alle diese Substitutionen

$$|m_i| = 1 \qquad (i=1,2,\cdots n).$$

Wenn nun z. B. alle n_{i-1} für ein gewisses V den Werth Null haben, so sind die Coefficienten von V^λ dem absoluten Betrage nach entweder gleich Eins oder gleich Null, jenachdem dieselben der Diagonale von V^λ angehören oder nicht. Allgemein, d. h. wenn für eine Substitution V nicht alle n_{i-1} verschwinden, bezeichnen wir für einen Augenblick die Substitution V durch

$$V = (a_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n);$$

dann ist also

$$a_{i\varkappa} = 0 \quad \text{für} \quad \varkappa > i,\ \varkappa < i-1.$$

Diejenigen unter den Coefficienten $a_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ der Substitution V^λ, die von Null verschiedene Werthe haben können, sind für ein positives λ in der Form

$$a_{i\varkappa}^{(\lambda)} = \sum_{(i_1, i_2, \cdots i_{\lambda-1})} a_{i i_1} a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_{\lambda-1}\varkappa}$$
$$\begin{pmatrix} i_1 = i, i-1;\ i_2 = i, i-1, i-2; \cdots i_{\lambda-1} = i, i-1, \cdots i-\lambda+1; \\ i \geq i_1 \geq i_2 \geq \cdots \geq i_{\lambda-1} \geq \varkappa \end{pmatrix}$$

darstellbar. Die Anzahl der durch das Summenzeichen angedeuteten Glieder ist für $\varkappa = i$ gleich Eins, für $\varkappa = i-1$ gleich λ, für $\varkappa = i-2$ gleich

$$\frac{\lambda(\lambda-1)}{1\cdot 2},$$

u. s. w. Da $\varkappa$ höchstens gleich n sein kann, ist demnach ein möglicherweise von Null verschiedenes Element von V^λ eine Summe von höchstens

$$\frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+2)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}$$

Producten von je λ Elementen der Substitution V, wobei in jedem Producte höchstens $n-1$ Elemente mit verschiedenen Indices $(a_{i,i-1})$ auftreten. Es lässt sich folglich eine nur von den absoluten Beträgen der in den verschiedenen Substitutionen V auftretenden Elemente n_{i-1} abhängende, von λ unabhängige positive Grösse M so angeben, dass alle Elemente der Substitution V^{λ} dem absoluten Betrage nach kleiner sind als

$$M\lambda^{n}.$$

Wählen wir die Grösse M zugleich so gross, dass sie die Elemente aller Substitutionen

$$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots \mathsf{A}_\sigma$$

und deren inversen übertrifft und beachten, dass (vergl. Nr. 357, S. 352) die absoluten Beträge der Elemente einer aus zwei Substitutionen T, T_1 componirten Substitution kleiner sind wie $nM\cdot M_1$, wenn M, M_1 positive Zahlen bedeuten, die die absoluten Beträge der Elemente von T beziehungsweise T_1 übertreffen, so erkennen wir, dass die Elemente der Substitution T_ν und ebenso die der inversen Substitution T_ν^{-1} dem absoluten Betrage nach kleiner sind als

$$(nM)^{\sum\limits_{i=1}^{p}\varepsilon_i+2q}\cdot n^q M^q \pi_1^{\,n}\pi_2^{\,n}\cdots\pi_q^{\,n}$$
$$=(n\cdot M)^{\sum\limits_{i=1}^{p}\varepsilon_i+3q}\, e^{n\sum\limits_{i=1}^{q}\log \pi_i}.$$

Nun ist aber nach (19) und zufolge der für q gefundenen oberen Grenze $\frac{r'}{l}$

$$\sum_{i=1}^{q}\varepsilon_i+3q<r'\left(\frac{1}{K}+\frac{h+3}{l}\right),$$

mit Rücksicht auf (24) können wir also stets eine constante Grösse a so angeben, dass die Coefficienten der Substitutionen T_ν und T_ν^{-1} dem absoluten Betrage nach kleiner sind als

$$e^{r'a}.$$

Hieraus folgt aber genau ebenso wie im Falle wo ϑ keine parabolische Substitution enthält (Nr. 357, S. 352), mit Rücksicht auf die Ungleichung (13) die unbedingte Convergenz der Reihen $\xi_i(\eta)$ für hinreichend grosse Werthe von m.

Fassen wir die Resultate der Untersuchung dieses Kapitels zusammen, so können wir den folgenden Satz aussprechen:

Sei eine Fuchs'sche Gruppe ϑ von der in der Nr. 304 (S. 169ff.) charakterisirten Beschaffenheit gegeben, für welche die Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_\sigma$$

und deren inverse eine Basis bilden, sei ferner Θ eine Gruppe unimodularer linearer homogener Substitutionen in den n Grössen

$$y_1, y_2, \cdots y_n,$$

die so beschaffen ist, dass jeder Substitution von ϑ eine wohlbestimmte Substitution von Θ entspricht, so convergiren die Reihen (1) beziehungsweise (5) bei hinreichend grossen Werthen der ganzen positiven Zahl m unbedingt für alle Werthe von η, die innerhalb des Orthogonalkreises liegen, sofern unter den Substitutionen

$$A_1, A_2, \cdots A_\sigma, A_{\sigma+1} = A_1^{-1} A_2^{-1} \cdots A_\sigma^{-1}$$

keine parabolische enthalten ist, bei beliebiger Wahl der Gruppe Θ, sofern jedoch die Gruppe ϑ auch parabolische Substitutionen enthält, dann und nur dann, wenn diejenigen Substitutionen von Θ, die parabolischen Substitutionen von ϑ entsprechen, Fundamentalgleichungen besitzen, deren sämmtliche Wurzeln dem absoluten Betrage nach gleich Eins sind.

Wenn die Gruppe Θ den angegebenen Bedingungen genügt, so sagen wir kurz, Θ erfülle die Convergenzbedingungen.

Drittes Kapitel.

361. **Existenz der Systeme Fuchs'scher Zetafunctionen. Differentialgleichungen für die Reihen ξ und Z.**

Sehen wir nun zu, was durch die Aufstellung der Reihen (1) beziehungsweise (5) (Nr. 355, S. 346) für den Existenzbeweis der Fuchs'schen Zetafunctionen gewonnen ist. Die Reihen (5), die wir in der Nr. 355 (S. 348) als homogene Functionen (Formen) der u_1, u_2 vom Grade $-2m$ charakterisirt haben, erfahren, wenn auf η eine Substitution der Fuchs'schen Gruppe ϑ, also auf die u_1, u_2 die entsprechende Substitution der mit ϑ isomorphen homogenen Gruppe t ausgeübt wird, die zugehörige Substitution der Gruppe Θ. Das Gleiche gilt also auch von den Ausdrücken, die wir erhalten, indem wir die Reihen

$$Z_1(u_1, u_2), \cdots Z_n(u_1, u_2)$$

mit einer beliebigen Fuchs'schen Function oder, was dasselbe heisst, mit einer invarianten eindeutigen Form nullten Grades der u_1, u_2 multipliciren.

Auf die Reihen $\xi_i(\eta)$ übertragen besagt dies, da nach dem Satze der Nr. 316 (S. 219) jede Fuchs'sche Function als Quotient von Thetafunctionen darstellbar ist, dass die Reihen $\xi_i(\eta)$, durch beliebige Thetafunctionen, die im Sinne der Nr. 313 (S. 209) zu der Zahl m gehören, dividirt, Ausdrücke liefern, die, wenn auf η eine Substitution von ϑ ausgeübt wird, die entsprechende Substitution von Θ erleiden. Die Bildungsweise der Reihen $\xi_i(\eta)$ lehrt aber sofort, dass diese Quotienten im Innern des Orthogonalkreises das Verhalten rationaler Functionen zeigen und in der Nähe der Ecken der der Gruppe ϑ entsprechenden Theilung eine Darstellung von der Form (α) (Nr. 351, S. 336) gestatten. Man erkennt dies durch Anwendung derselben Methode, mit Hülfe deren wir in der Nr. 310 (S. 193) die analoge Frage für die Fuchs'schen Thetareihen erledigt haben. Die gedachten Quotienten und folglich auch die Reihen $Z_i(u_1, u_2)$ beziehungsweise deren Producte in beliebige Fuchs'sche Functionen von η, sind demnach Fuchs'sche Zetafunctionen, die zu den Gruppen ϑ und Θ gehören.

Damit ist also der Existenzbeweis für die Fuchs'schen Zetafunctionen geliefert, sofern die Gruppe Θ die Convergenzbedingungen erfüllt.

Herr Poincaré hat gezeigt, dass auch umgekehrt jedes zu den Gruppen ϑ, Θ gehörige System Fuchs'scher Zetafunctionen, sofern Θ die Convergenzbedingungen erfüllt, dargestellt werden kann als Quotient eines Systems von Reihen $\xi_i(\eta)$ in eine Fuchs'sche Thetafunction mit der Gruppe ϑ. Wir gehen auf eine Darlegung dieses Nachweises nicht ein, sondern bemerken nur, dass derselbe durch ähnliche Betrachtungen erbracht wird, wie der analoge in der Nr. 316 (S. 216) gelieferte Beweis für die Darstellbarkeit einer beliebigen Fuchs'schen Function als Quotienten von Thetafunctionen. Für die Zwecke, die wir im Auge haben, genügt es darauf hinzuweisen, dass uns die Sätze 1), 2), 3) der Nr. 353 (S. 343) volle Einsicht gewähren in die Art und Weise, wie sich beliebige Systeme Fuchs'scher Zetafunctionen, die zu den Gruppen ϑ, Θ gehören, durch ein System der zu diesen Gruppen gehörigen Reihen $\xi_i(\eta)$ beziehungsweise $Z_i(u_1, u_2)$ und der zu ϑ gehörigen Fuchs'schen Function $x = f(\eta)$ darstellen lassen. Wir haben nämlich die Sätze:

1) Die Reihen

$$Z_1(u_1, u_2), \cdots Z_n(u_1, u_2)$$

genügen, als Function von $x = f(\eta)$ aufgefasst, einer homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung der Fuchs'schen Classe

$$\frac{d^n Z}{d x^n} + p_1 \frac{d^{n-1} Z}{d x^{n-1}} + \cdots + p_n Z = 0, \tag{1}$$

für welche Θ die Monodromiegruppe darstellt, und in der demgemäss, da Θ nur unimodulare Substitutionen enthält, der Coefficient p_1 die logarithmische Ableitung einer rationalen Function von x ist. Diejenigen singulären Punkte der Differentialgleichung (1), wo sich die Integrale verzweigen, sind die den Ecken $\lambda_\varkappa$ des Fundamentalbereiches F_0 entsprechenden Werthe

$$a_\varkappa = f(\lambda_\varkappa) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma + 1);$$

die zu $x = a_\varkappa$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung besitzt, wenn $\lambda_\varkappa$ im Innern des Einheitskreises liegt, rationale Wurzeln, die ganzzahlige Vielfache der zu $\lambda_\varkappa$ gehörigen Zahl $\frac{1}{g_\varkappa}$ sind; wenn $\lambda_\varkappa$ auf der Peripherie des Einheitskreises liegt, sind diese Wurzeln zu Folge der für Θ bestehenden Convergenzbedingungen real. Ueberdies kann

die Differentialgleichung (1) noch diejenigen x-Werthe zu singulären Punkten haben, die η-Werthen entsprechen, für welche eine der rationalen Functionen H_i beziehungsweise φ_i unendlich wird; in diesen Punkten verhalten sich die Integrale von (1) wie rationale Functionen von x.

2) Jedes System Fuchs'scher Zetafunctionen, welches zu den Gruppen ϑ und Θ gehört, befriedigt als Function von x aufgefasst eine lineare Differentialgleichung, die mit (1) zu derselben Art gehört und ist folglich in der Form

$$F_0 Z_i + F_1 \frac{dZ_i}{dx} + \cdots + F_{n-1} \frac{d^{n-1} Z_i}{dx^{n-1}} \qquad (i=1,2,\cdots n)$$

darstellbar, wo die $F_0, F_1, \cdots F_{n-1}$ rationale Functionen von x bedeuten.

Die Differentialgleichung (1), der die $Z_i(u_1, u_2)$ als Functionen von x genügen, verwandelt sich durch die auf abhängige und unabhängige Variable auszuübende Transformation

$$(2) \qquad Z = u_1^{-2m} \xi, \quad x = f(\eta),$$

die wir, da

$$u_1^{-2m} = \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^m$$

ist, auch in die Form

$$(2a) \qquad Z = \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^m \xi, \quad x = f(\eta)$$

setzen können, in eine Differentialgleichung für ξ als Function von η mit in η eindeutigen Coefficienten, der die n Reihen

$$\xi_1(\eta), \ \xi_2(\eta), \cdots \xi_n(\eta)$$

Genüge leisten:

$$(3) \qquad \frac{d^n \xi}{d\eta^n} + q_1(\eta) \frac{d^{n-1}\xi}{d\eta^{n-1}} + \cdots + q_n(\eta)\xi = 0.$$

Setzen wir ferner

$$Z = e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx} \mathfrak{z}, \qquad \xi = e^{-\frac{1}{n}\int q_1 d\eta} \mathfrak{x},$$

so genügen $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}$ den Differentialgleichungen

$$(1a) \qquad \frac{d^n \mathfrak{z}}{dx^n} + \mathfrak{p}_2 \frac{d^{n-2}\mathfrak{z}}{dx^{n-2}} + \cdots + \mathfrak{p}_n \mathfrak{z} = 0,$$

$$(3a) \qquad \frac{d^n \mathfrak{x}}{d\eta^n} + \mathfrak{q}_2 \frac{d^{n-2}\mathfrak{x}}{d\eta^{n-2}} + \cdots + \mathfrak{q}_n \mathfrak{x} = 0,$$

wo (vergl. Nr. 181, Bd. II, 1, S. 189, Gleichung (10))

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{x}\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^{-\frac{n-1}{2}}$$

ist und die Coefficienten $\mathfrak{p}_x$ rationale Functionen von x, die Coefficienten $\mathfrak{q}_x$ eindeutige Functionen von η sind.

Wenn $p_1 = 0$ und $-2m = n - 1$ ist, wird Z mit $\mathfrak{z}$ und ξ mit $\mathfrak{x}$ identisch.

362. Die Invarianten der Differentialgleichung. Zetaformen. Simultane Covarianten. Combinanten.

Wir können nun auf Grund der Ergebnisse des fünften Kapitels des zehnten Abschnittes (Bd. II, 1, S. 185—199) sofort Ausdrücke bilden, die sich aus den $\mathfrak{q}_x$ und ihren Ableitungen beziehungsweise den q_x und ihren Ableitungen nach η rational zusammensetzen und die, abgesehen von einer Potenz von

$$\frac{dx}{d\eta}$$

als Factor, rationale Functionen von x, also Fuchs'sche Functionen von η sind.

Solche Ausdrücke sind z. B. die $n - 2$ Invarianten

$$\vartheta_3, \vartheta_4, \cdots \vartheta_n$$

von den Gewichten $3, 4, \cdots n$. Bezeichnen wir wie a. a. O. durch $\vartheta_\nu(\eta)$ die Invariante ϑ_ν, gebildet aus den Coefficienten $\mathfrak{q}_x$, durch $\vartheta_\nu(x)$ dieselbe Invariante, gebildet aus den Coefficienten p_x, so ist

$$\vartheta_\nu(\eta) = \left(\frac{dx}{d\eta}\right)^\nu \vartheta_\nu(x) \qquad (\nu = 3, 4, \cdots n);$$

d. h. es sind die Ausdrücke

$$u_1^{-2\nu} \vartheta_\nu(\eta)$$

Fuchs'sche Functionen von η.

Die Invarianten ϑ_ν haben die Eigenschaft, bei einer beliebigen Transformation

$$\eta = \varphi(\zeta)$$

der unabhängigen Variabeln der Differentialgleichung (3), abgesehen von dem Factor

$$\left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)^\nu,$$

ungeändert zu bleiben. Damit aber rationale Combinationen der q_x und ihrer Ableitungen, oder allgemeiner gesprochen der

$$\xi_1(\eta), \cdots \xi_n(\eta)$$

und ihrer Ableitungen nach η mit einer geeigneten Potenz von u_1 multiplicirt Fuchs'sche Functionen von η seien, ist nur erforderlich, dass sie 1), wenn η eine projective Substitution

$$S\eta = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

erfährt, sich nur mit einer bestimmten Potenz von $(\gamma\eta + \delta)$ multipliciren, und dass sie 2) ungeändert bleiben, wenn auf die

$$\xi_1(\eta), \cdots \xi_n(\eta)$$

eine lineare homogene unimodulare Substitution ausgeübt wird.

Die zweite Eigenschaft bedingt nach dem Appell'schen beziehungsweise dem Picard-Vessiot'schen Satze, dass die betreffenden Ausdrücke rational in den $q_\varkappa$ und deren Ableitungen nach η darstellbar seien, in Bezug auf die erste Eigenschaft hingegen leisten die Invarianten ϑ_ν offenbar zuviel, da sie nicht nur bei projectiven, sondern bei beliebigen Transformationen der unabhängigen Variabeln η invariant sind. Um die vorliegende Frage mit gewissen Problemen der Algebra linearer Transformationen in Zusammenhang zu bringen, ist es zweckmässig, wieder an Stelle der Functionen von η die homogenen Formen in den u_1, u_2 zu betrachten.

Nehmen wir also das System der n Reihen

$$(4) \qquad Z_1(u_1, u_2), \cdots Z_n(u_1, u_2),$$

die wir kurz als Zetaformen vom Grade

$$-2m = r$$

bezeichnen wollen, dann hat eine simultane Covariante H dieses Formensystems vom Gewichte μ bekanntlich die Eigenschaft, sich abgesehen von der μ-ten Potenz der Substitutions-Determinante als Factor zu reproduciren, wenn die u_1, u_2 durch homogene lineare Functionen ihrer selbst ersetzt werden. D. h. wenn

$$(5) \qquad \begin{cases} v_1 = \delta u_1 + \gamma u_2 \\ v_2 = \beta u_1 + \alpha u_2 \end{cases}$$

und

$$Z_i(v_1, v_2) = \bar{Z}_i(u_1, u_2)$$

gesetzt wird, ist

$$(6) \qquad H(\bar{Z}_1(u_1, u_2), \cdots \bar{Z}_n(u_1, u_2);\ \ u_1, u_2)$$
$$= (\alpha\delta - \beta\gamma)^\mu H(Z_1(v_1, v_2), \cdots Z_n(v_1, v_2);\ \ v_1, v_2).$$

Unter den simultanen Covarianten eines Systems von Formen desselben Grades*), wie es uns hier in den $Z_i(u_1, u_2)$ vorliegt, giebt es, wie zuerst Sylvester bemerkt hat, stets solche, die abgesehen von einem Factor ungeändert bleiben, wenn die Elemente des Formensystems selbst einer linearen homogenen Substitution unterworfen werden; dieser Factor kann dann nur eine Potenz der Substitutions-Determinante sein. Solche Covarianten nennt man Combinanten des Formensystems.

Wenn also H eine Combinante ist, so befriedigt sie die Gleichung

$$H(SZ_1, \cdots SZ_n) = |\alpha_{i\varkappa}|^p H(Z_1, \cdots Z_n) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

wo

$$SZ_i = \alpha_{i1} Z_1 + \cdots + \alpha_{in} Z_n \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

eine beliebige lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante in den $Z_1, \cdots Z_n$ bedeutet.

Betrachten wir nun eine solche Combinante

$$H(Z_1, \cdots Z_n; u_1, u_2)$$

unseres Formensystems; dann ist, wenn (5) eine Substitution S_ν der Gruppe t bedeutet, zu Folge der Covarianteneigenschaft, und da S_ν unimodular ist,

$$(7) \qquad \begin{aligned} &H(\bar{Z}_1(u_1, u_2), \cdots \bar{Z}_n(u_1, u_2); u_1, u_2) \\ &= H(Z_1(v_1, v_2), \cdots Z_n(v_1, v_2); v_1, v_2). \end{aligned}$$

Da ferner

$$\bar{Z}_\varkappa(u_1, u_2) = Z_\varkappa(S_\nu u_1, S_\nu u_2) = T_\nu Z_\varkappa(u_1, u_2) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

ist, wo T_ν die dem S_ν entsprechende Substitution von Θ bedeutet, so haben wir

$$\begin{aligned} &H(\bar{Z}_1(u_1, u_2), \cdots \bar{Z}_n(u_1, u_2); u_1, u_2) \\ &= H(T_\nu Z_1(u_1, u_2), \cdots T_\nu Z_n(u_1, u_2); u_1, u_2), \end{aligned}$$

und dies ist zufolge der Combinanteneigenschaft, und da T_ν unimodular sein sollte, weiter gleich

$$H(Z_1(u_1, u_2), \cdots Z_n(u_1, u_2); u_1, u_2);$$

es besteht also nach (7) die Gleichung

---

*) In der Invariantentheorie der ganzen rationalen Formen bezeichnet man die Dimension in Bezug auf die Variabeln als Ordnung, die Dimension in Bezug auf die Coefficienten als Grad; da wir es hier mit transcendenten Formen zu thun haben, können wir die Bezeichnung Grad für die Dimension in den Variabeln im gewohnten Sinne beibehalten.

$$H(Z_1(u_1, u_2), \cdots Z_n(u_1, u_2); u_1, u_2)$$
$$= H(Z_1(S_\nu u_1, S_\nu u_2), \cdots Z_n(S_\nu u_1, S_\nu u_2); S_\nu u_1, S_\nu u_2),$$

d. h. H bleibt als Function der u_1, u_2 ungeändert, wenn auf diese beiden Grössen eine Substitution S_ν der Gruppe t ausgeübt wird.

Wenn sich also H aus den $Z_i(u_1, u_2)$ und deren Ableitungen rational zusammensetzt, so ist es eine zu der Gruppe ϑ beziehungsweise t gehörige eindeutige invariante Form der u_1, u_2 und zwar eine Fuchs'sche Function von η.

Gehen wir wieder auf die inhomogene Gestalt unserer Ausdrücke zurück.

Wenn $H(u_1, u_2)$ eine Combinante des Formensystems $[Z_i(u_1, u_2)]$ und in den u_1, u_2 homogen vom Grade ϱ ist, so wollen wir auch

$$u_1^{-\varrho} H(u_1, u_2) = \mathsf{H}(\eta)$$

als eine Combinante ϱ-ten Grades des Functionssystems

$$\xi_1(\eta), \cdots \xi_n(\eta)$$

bezeichnen, dessen Elemente $\xi_i(\eta)$ selbst als Functionen vom Grade $-2m = r$ der Variabeln η aufzufassen sind. Eine solche Combinante verwandelt sich also nach Multiplication mit u_1^ϱ in eine Fuchs'sche Function von η.

363. Invarianz der Differentialgleichung für die Reihen ξ. Systeme von Formen, ihre Jacobi'sche Combinante und Differentialgleichung.

Die Differentialgleichung (3) hat die Eigenschaft, sich durch die Transformation

$$(8) \qquad S_\nu\zeta = \eta, \qquad \bar{\xi} = \left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)^m \xi$$

in die Differentialgleichung

$$(3\nu) \qquad \frac{d^n\bar{\xi}}{d\zeta^n} + \overset{\nu}{q}_1(\zeta)\frac{d^{n-1}\bar{\xi}}{d\zeta^{n-1}} + \cdots + \overset{\nu}{q}_n(\zeta)\bar{\xi} = 0$$

zu verwandeln, für welche, da

$$\xi_i(\eta) = \xi_i(S_\nu\zeta) = \left(\frac{d\zeta}{dS_\nu\zeta}\right)^m T_\nu\xi_i(\zeta)$$

und folglich

$$\left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)^m \xi_i(\eta) = T_\nu\xi_i(\zeta)$$

ist, die Ausdrücke

$$T_\nu\xi_1(\zeta), \cdots T_\nu\xi_n(\zeta),$$

also auch die

$$\xi_1(\zeta), \cdots \xi_n(\zeta)$$

selbst ein Fundamentalsystem von Integralen darstellen. Die Differentialgleichung (3ν) geht demnach aus (3) hervor, indem man in (3) ζ an die Stelle von η und $\bar{\xi}$ an die Stelle von ξ schreibt; d. h. mit anderen Worten, die Differentialgleichung (3) verhält sich gegenüber den Transformationen (8) invariant.

Man kann nun der Differentialgleichung (3) eine solche Form zuertheilen, dass ihre Invarianz bei den Transformationen (8) unmittelbar in Evidenz tritt, indem nämlich nur solche Ausdrücke in dieser Form auftreten, die Combinanten des Functionssystems

$$\xi_1(\eta), \cdots \xi_n(\eta)$$

sind.

Betrachten wir zu diesem Ende allgemein ein System von n linearunabhängigen Functionen der Variabeln η

$$\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n,$$

denen eine gewisse Gradzahl g beigelegt werden möge in dem Sinne, dass sie aus homogenen Functionen g-ten Grades der u_1, u_2

$$z_1(u_1, u_2), \quad z_2(u_1, u_2), \cdots z_n(u_1, u_2)$$

durch die Gleichungen

$$u_1^g \zeta_\varkappa = z_\varkappa(u_1, u_2) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

entstanden zu denken sind. Dann befriedigen die ζ_i als Functionen von η die homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$(9) \quad (-1)^n \begin{vmatrix} \zeta\, \zeta' \cdots \zeta^{(n)} \\ \zeta_1 \zeta_1' \cdots \zeta_1^{(n)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \zeta_n \zeta_n' \cdots \zeta_n^{(n)} \end{vmatrix} = D\zeta^{(n)} - D'\zeta^{(n-1)} + D_2 \zeta^{(n-2)} + \cdots + D_n \zeta = 0,$$

wo die Accente Ableitungen nach η bedeuten und

$$D = D(\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n) = \begin{vmatrix} \zeta_1 \zeta_1' \cdots \zeta_1^{(n-1)} \\ \zeta_2 \zeta_2' \cdots \zeta_2^{(n-1)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \zeta_n \zeta_n' \cdots \zeta_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

gesetzt wurde.

Wenn man die $(n-1)$-ten partiellen Ableitungen der homogenen Functionen $z_\varkappa(u_1, u_2)$ nach u_1, u_2 durch die Ableitungen der $\zeta_\varkappa$ nach η ausdrückt, so ergiebt sich

$$\frac{\partial^{n-1} z_\varkappa}{\partial u_1^{n-1}} = a_{11}^{(n-1)} \zeta_\varkappa + a_{12}^{(n-1)} \zeta_\varkappa' + \cdots + a_{1n}^{(n-1)} \zeta_\varkappa^{(n-1)},$$
$$\frac{\partial^{n-1} z_\varkappa}{\partial u_1^{n-2} \partial u_2} = \qquad a_{22}^{(n-1)} \zeta_\varkappa' + \cdots + a_{2n}^{(n-1)} \zeta_\varkappa^{(n-1)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial^{n-1} z_\varkappa}{\partial u_2^{n-1}} = \qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)} \zeta_\varkappa^{(n-1)},$$

wo, wie man durch Induction leicht verificirt,

$$a_{11}^{(n-1)} = g(g-1)\cdots(g-n+2)\, u_1^{g-n+1},$$
$$a_{22}^{(n-1)} = \quad (g-1)\cdots(g-n+2)\, u_1^{g-n+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{nn}^{(n-1)} = \qquad u_1^{g-n+1}$$

ist. Hiernach erhält man

$$\left| \frac{\partial^{n-1} z_\varkappa}{\partial u_1^{n-i-1} \partial u_2^i} \right|_{\binom{\varkappa = 1, 2, \cdots n}{i = 0, 1, \cdots n-1}} = g(g-1)^2 \cdots (g-n+2)^{n-1} u_1^{n(g-n+1)} D(\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n),$$

d. h. der Function D ist der Grad

$$\gamma = n(g-n+1)$$

beizulegen. Die linke Seite dieser Gleichung ist bekanntlich eine simultane Covariante, und zwar eine Combinante (die sogenannte Jacobi'sche Combinante) des Formensystems $z_1, z_2, \cdots z_n$, wir haben also im Sinne der eingeführten Terminologie in

$$D(\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n)$$

eine Combinante des Functionssystems $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n$.

Bilden wir nun die n-te Ueberschiebung der Combinante

$$u_1^{n(g-n+1)} D = \Delta(u_1, u_2)$$

über die Form g-ten Grades

$$z(u_1, u_2) = u_1^g \zeta,$$

so ist dieselbe (vergl. Nr. 298, S. 146) vom Grade

$$g + \gamma - 2n = (n+1)(g-n),$$

also vom selben Grade wie die durch Multiplication mit der geeigneten Potenz von u_1 homogen gemachte linke Seite der Differentialglei-

chung (9), die wir nach Analogie der für $D(\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n)$ gefundenen Formel in der Form

$$\left|\frac{\partial^n z_\varkappa}{\partial u_1^{n-i}\partial u_2^{\,i}}\right| = g(g-1)^2 \cdots (g-n+1)^n u_1^{(n+1)(g-n)} D(\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n)$$
$$\begin{pmatrix} i,\ \varkappa = 0, 1, \cdots n \\ z_0 = z \end{pmatrix}$$

darstellen können. Drückt man die partiellen Ableitungen der Formen

$$z(u_1, u_2), \qquad \Delta(u_1, u_2)$$

nach u_1, u_2 durch die nach η genommenen (sogenannten einseitigen) Differentialquotienten der Functionen ζ und D aus und setzt mit Herrn Hilbert allgemein für eine beliebige Function f von η, der die Gradzahl h beigelegt werden kann,

$$(f)_\lambda = \frac{1}{h(h-1)\cdots(h-\lambda+1)} \frac{d^\lambda f}{d\eta^\lambda} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \cdots),$$

so erhält man für die n-te Ueberschiebung der Form $\Delta(u_1, u_2)$ über $z(u_1, u_2)$ den Ausdruck

$$(\Delta, z)^{(n)} = u_1^{(n+1)(g-n)} (D, \zeta)^{(n)},$$

woselbst

$$(D, \zeta)^{(n)} = \sum_{\varkappa=0}^{n} (-1)^\varkappa \frac{n(n-1)\cdots(n-\varkappa+1)}{1\cdot 2\cdots \varkappa} (D)_\varkappa (\zeta)_{n-\varkappa}$$

gesetzt wurde. Wir bezeichnen diesen letzteren Ausdruck, der also nichts Anderes ist, wie die inhomogene Gestalt von

$$(\Delta, z)^{(n)},$$

als die n-te Ueberschiebung der Functionen D, ζ übereinander.

Die $\varkappa = 0$ und $\varkappa = 1$ entsprechenden Glieder in $(D, \zeta)^{(n)}$ stimmen offenbar mit den beiden ersten Gliedern der mit dem Factor

$$\frac{1}{g(g-1)\cdots(g-n+1)}$$

multiplicirten linken Seite der Differentialgleichung (9) überein; die Differenz

$$(10) \qquad \frac{(-1)^n}{g(g-1)\cdots(g-n+1)} D(\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n) - (D, \zeta)^{(n)}$$

ist demnach ein Differentialausdruck von nur $(n-2)$-ter Ordnung in ζ.

Die linke Seite der Differentialgleichung (9) ist als Determinante des Functionssystems $\zeta, \zeta_1, \cdots \zeta_n$ eine simultane Covariante und Combinante dieses Functionssystems vom Grade $(n+1)(g-n)$; da auch

$$(D, \zeta)^{(n)}$$

eine simultane Covariante desselben Grades ist, und Covarianten desselben Grades auch vom selben Gewichte sind, so ist auch die Differenz (10) eine Covariante vom Grade $(n+1)(g-n)$ desselben Functionssystems.

Wir setzen nun

$$(-1)^n D(\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n) = g(g-1)\cdots(g-n+1)\,[(D, \zeta)^{(n)} + \bar{D}_2 \cdot (\zeta)_{n-2} + \cdots + \bar{D}_n \cdot \zeta]$$

und bilden die $(n-2)$-te Ueberschiebung von $\bar{D}_2$ über ζ

$$(\bar{D}_2, \zeta)^{(n-2)},$$

dann stimmt das erste $(\zeta)_{n-2}$ enthaltende Glied dieser Ueberschiebung mit

$$\bar{D}_2 \cdot (\zeta)_{n-2}$$

überein, und wir haben folglich

$$(-1)^n D(\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n) = g(g-1)\cdots(g-n+1)\,[(D, \zeta)^{(n)} + (\bar{D}_2, \zeta)^{(n-2)} + \bar{\bar{D}}_3 \cdot (\zeta)_{n-3} + \cdots + \bar{D}_n \cdot \zeta].$$

Fahren wir so fort, so erhalten wir schliesslich die linke Seite der Differentialgleichung (9) als Aggregat von Ueberschiebungen

$$(11) \qquad (D, \zeta)^{(n)} + (P_2, \zeta)^{(n-2)} + (P_3, \zeta)^{(n-3)} + \cdots + (P_n, \zeta)^{(0)}$$

dargestellt, wo

$$P_2 = \bar{D}_2, \cdots$$

gesetzt wurde.

Wir behaupten nun zuvörderst, dass diese Ueberschiebungen sämmtlich vom Grade $(n+1)(g-n)$ und dass die Coefficienten

$$D, P_2, P_3, \cdots P_n$$

dieser Darstellung Combinanten des Functionssystems $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n$ sind.

364. Invariante Gestalt einer linearen Differentialgleichung, insbesondere der für die Zetaformen. Allgemeine Bemerkungen.

Zum Beweise bedienen wir uns nach dem Vorgange des Herrn A. Hirsch des folgenden Satzes von Herrn Hilbert.

Sei

$$f_\varkappa(u_1, u_2) = u_1^{\varrho_\varkappa} \varphi_\varkappa(\eta) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots)$$

ein System von Formen, $g_\varkappa$ der Grad der Form $f_\varkappa$ oder der Function $\varphi_\varkappa$, dann ist jede isobare Function $F(\eta)$ vom Gewichte p der Ausdrücke

$$(\varphi_\varkappa)_0, (\varphi_\varkappa)_1, \cdots (\varphi_\varkappa)_{\lambda_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots),$$

die in den (einseitigen) Differentialquotienten jeder einzelnen der Functionen $\varphi_\varkappa$ homogen von dem Grade $\gamma_\varkappa$ ist und die der Differentialgleichung

$$\sum_{\varkappa=1,2,\cdots}\left\{(\varphi_\varkappa)_0 \frac{\partial F}{\partial(\varphi_\varkappa)_1} + 2(\varphi_\varkappa)_1 \frac{\partial F}{\partial(\varphi_\varkappa)_2} + 3(\varphi_\varkappa)_2 \frac{\partial F}{\partial(\varphi_\varkappa)_3} + \cdots\right\} = 0$$

Genüge leistet, eine simultane Covariante des Functionssystems $\varphi_\varkappa$ vom Grade

$$\sum_{\varkappa=1,2,\cdots} g_\varkappa \gamma_\varkappa - 2p.$$

Wie bereits oben bemerkt wurde, ist der Ausdruck (10) oder

$$\bar{D} = \bar{D}_2 \cdot (\zeta)_{n-2} + \bar{D}_3 \cdot (\zeta)_{n-3} + \cdots + \bar{D}_n \cdot \zeta$$

eine simultane Covariante vom Grade $(n+1)(g-n)$ des Functionssystems

$$\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n$$

und genügt demnach der partiellen Differentialgleichung

$$(\zeta)_0 \frac{\partial \bar{D}}{\partial(\zeta)_1} + 2(\zeta)_1 \frac{\partial \bar{D}}{\partial(\zeta)_2} + \cdots$$

$$+ \sum_{\varkappa=1}^{n}\left\{(\zeta_\varkappa)_0 \frac{\partial \bar{D}}{\partial(\zeta_\varkappa)_1} + 2(\zeta_\varkappa)_1 \frac{\partial \bar{D}}{\partial(\zeta_\varkappa)_2} + \cdots\right\} = 0 \cdot$$

Da diese Differentialgleichung eine Identität darstellt, so müssen, wenn wir nach den Grössen

$$(\zeta)_{n-2}, (\zeta)_{n-3}, \cdots \zeta$$

ordnen, die Coefficienten jeder einzelnen dieser Grössen verschwinden. Der Coefficient von $(\zeta)_{n-2}$ gleich Null gesetzt giebt

$$\sum_{\varkappa=1}^{n}\left\{(\zeta_\varkappa)_0 \frac{\partial \bar{D}_2}{\partial(\zeta_\varkappa)_1} + 2(\zeta_\varkappa)_1 \frac{\partial \bar{D}_2}{\partial(\zeta_\varkappa)_2} + \cdots\right\} = 0,$$

und hieraus folgt nach dem Hilbert'schen Satze, dass $\bar{D}_2$ eine simultane Covariante der $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n$ vom Grade

$$n(g-n+1) - 4$$

ist. Da aber $\bar{D}_2$ eine rationale Differentialfunction der Coefficienten der Differentialgleichung (9) ist, so haben wir in $\bar{D}_2$ oder P_2 nicht nur eine Covariante sondern eine Combinante des Functionssystems

$$\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n.$$

Bilden wir also

$$(P_2, \zeta)^{(n-2)},$$

so ist dieser Ausdruck ebenso wie $\bar{D}$ eine simultane Covariante der

$$\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n$$

vom Grade $(n+1)(g-n)$, das Gleiche gilt folglich auch von der Differenz

$$\bar{D} - (P_2, \zeta)^{(n-2)} = \bar{D}_3 \cdot (\zeta)_{n-3} + \cdots + \bar{\bar{D}}_n \cdot \zeta,$$

und durch ähnliche Schlüsse wie oben findet man nunmehr, dass auch

$$\bar{D}_3 = P_3$$

eine Combinante des Functionssystems $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n$ und zwar eine solche vom Grade

$$n(g-n+1)-6$$

ist, u. s. w.

Wir haben also in der That in (11) eine Form der linken Seite unserer Differentialgleichung (9), in welcher die einzelnen Terme simultane Covarianten des Grades $(n+1)(g-n)$ des Functionssystems

$$\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n$$

und die Coefficienten

$$D, P_2, P_3, \cdots P_n$$

Combinanten des Functionssystems $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n$ von den Graden

$$\gamma, \gamma-4, \gamma-6, \cdots \gamma-2n$$

sind. Multipliciren wir nun noch den Ausdruck (11) mit

$$u_1^{(n+1)(g-n)}$$

und setzen dieses Product gleich Null, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$(12) \quad (\varDelta, z)^{(n)} + (\Pi_2, z)^{(n-2)} + (\Pi_3, z)^{(n-3)} + \cdots + \Pi_n \cdot z = 0$$

für die homogene Function z vom g-ten Grade in den beiden Variabeln u_1, u_2, die durch das Formensystem

$$(13) \qquad z_1(u_1, u_2), \quad z_2(u_1, u_2), \cdots z_n(u_1, u_2)$$

befriedigt wird und deren Coefficienten

$$(14) \qquad \Delta(u_1, u_2), \quad \Pi_\varkappa(u_1, u_2) = u_1^{n(g-\varkappa+1)-2\varkappa} P_\varkappa \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots n)$$

Combinanten des Formensystems (13) von den angegebenen Graden sind.

Wir bezeichnen (12) als die invariante Gestalt der Differentialgleichung (9).

Identificiren wir also die Differentialgleichung (9) mit der durch die Reihen

$$\xi_1(\eta), \ \xi_2(\eta), \cdots \xi_n(\eta)$$

befriedigten Differentialgleichung (3) der Nr. 361 (S. 368), nachdem wir die letztere Gleichung noch mit dem Factor

$$e^{-\int q_1 d\eta}$$

multiplicirt haben, so ist

$$g = -2m$$

zu setzen, und die Gleichung (12) wird durch die Fuchs'schen Zetaformen

$$Z_1(u_1, u_2), \ Z_2(u_1, u_2), \cdots Z_n(u_1, u_2)$$

befriedigt, während die Coefficienten (14) invariante eindeutige Formen der u_1, u_2 von ganzen und geradzahligen Graden, also Fuchs'sche Functionen von η sind.

Die Differentialgleichung (1) (Nr. 316, S. 367), der die $Z_\varkappa(u_1, u_2)$ als Functionen der Fuchs'schen Function $x = f(\eta)$ Genüge leisten, hat vor der Differentialgleichung (3), der die $\xi_\varkappa(\eta)$ als Functionen von η genügen, den Vorzug, dass die Coefficienten von (1) einen leicht zu übersehenden analytischen Charakter besitzen, indem sie nämlich rationale Functionen von x sind. Dagegen hat (3) vor (1) die Eigenschaft voraus, von

$$x = f(\eta)$$

völlig unabhängig zu sein, also kein Element zu enthalten, welches in der Definition der Fuchs'schen Zetafunctionen nicht unmittelbar vorkömmt.

Die invariante Gestalt (12) der Differentialgleichung (3), die durch das System der Zetaformen

$$Z_1(u_1, u_2), \cdots Z_n(u_1, u_2)$$

befriedigt wird, vereinigt die Vorzüge der Differentialgleichungen (1) und (3), indem sie erstens x nicht enthält und

zweitens der analytische Charakter ihrer Coefficienten (14) als Fuchs'scher Functionen von η in übersichtlicher Weise gegeben ist.

Wenn man in der Differentialgleichung (9) den Coefficienten der höchsten Ableitung nicht gleich der Determinante eines Fundamentalsystems wählt, so kann man die invariante Gestalt gleichwohl auf dieselbe Weise herstellen, nur folgt dann nicht gleich eine $(n-2)$-te Ueberschiebung auf die n-te, sondern es tritt noch eine $(n-1)$-te Ueberschiebung auf; wir können aber die gewählte Form der Differentialgleichung (9) um so eher beibehalten, als wir von einer unimodularen Gruppe Θ ausgegangen waren, so dass also die Determinante des Fundamentalsystems absolut invariant bei den Substitutionen der Monodromiegruppe ist.

Die invariante Gestalt einer linearen Differentialgleichung ist in der neueren Zeit besonders von den Herren Klein, Waelsch, Pick, Hurwitz, Hirsch u. A. vielfach angewandt und insbesondere auch in den Fällen mit Vortheil benutzt worden, wo die Coefficienten der Differentialgleichung rationale oder algebraische Functionen der unabhängigen Variabeln sind. Will man jedoch eine beliebige lineare Differentialgleichung, deren Coefficienten etwa rationale Functionen der unabhängigen Variabeln x sind, in die invariante Gestalt überführen, so muss man der abhängigen Variabeln y einen bestimmten Grad g beilegen, d. h. man hat, nachdem x gleich dem Quotienten

$$x = \frac{x_2}{x_1}$$

zweier homogener Variabeln gesetzt worden ist, $x_1^g y$ als Form g-ten Grades der x_1, x_2 aufzufassen, wobei aber in den meisten Fällen der Grad g ganz willkürlich, d. h. nicht durch den analytischen Charakter der Integralfunction y von x bestimmt ist. Eine derartige Schwierigkeit tritt auch schon auf, wenn man die Darstellung eines beliebigen Systems zu den Gruppen ϑ, Θ gehöriger Fuchs'scher Zetafunctionen von η durch die Formen

$$Z_1, Z_2, \cdots Z_n,$$

die nach dem Satze 2) der Nr. 361 (S. 368) stets in der Form

$$F_0(x) Z_\varkappa + F_1(x) \frac{dZ_\varkappa}{dx} + \cdots + F_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} Z_\varkappa}{dx^{n-1}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

erfolgen kann, in eine der Form (12) der linken Seite der Differentialgleichung (9) analoge invariante Gestalt setzen will.

In diesem Falle liefert jedoch der in der Nr. 361 (S. 367) erwähnte Poincaré'sche Satz ein Hülfsmittel für die Gradbestimmung, die dem analytischen Charakter des betreffenden Systems Fuchs'scher Zetafunctionen gemäss, also wenigstens bis zu einer gewissen Grenze, nicht vollständig der Willkür anheimgegeben ist. Wir versagen es uns hier auf eine Erörterung der Frage einzugehen, wie auf Grund der angedeuteten von Herrn Poincaré für ein System Fuchs'scher Zetafunctionen gegebenen Gradbestimmung auch für die allgemeine Lösung einer beliebigen linearen Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe, eine der Natur der Integralfunction angemessene Gradbestimmung vorgenommen werden könnte, und bemerken nur, dass z. B. im Falle einer normalen Differentialgleichung zweiter Ordnung die durch die Gleichung (4) der Nr. 326 (S. 249) definirte Zahl ν in gewissem Sinne als der Grad der allgemeinen Lösung aufgefasst werden kann.

Viertes Kapitel.

365. Discussion eines Riemann'schen Problems.

Wir wollen nunmehr aus der bisher entwickelten Theorie der Zetafunctionen nach zwei Seiten hin Folgerungen zu ziehen suchen, die geeignet sein werden, die principielle Bedeutung dieser Theorie hervortreten zu lassen.

Erwägen wir zunächst, was sich aus dem für die Fuchs'schen Zetafunctionen gelieferten Existenzbeweise ergiebt.

In der Nr. 162 (Bd. II, 1, S. 109) hatten wir die Aufgabe geschildert, von welcher ausgehend Riemann in seinen nachgelassenen Aufzeichnungen die allgemeine Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen, deren Integrale — in unserer modernen Terminologie gesprochen — sich überall bestimmt verhalten, aufzubauen unternommen hat. Diese Aufgabe war die folgende:

Seien σ lineare homogene Substitutionen in n Variabeln

$$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots \mathsf{A}_\sigma$$

willkürlich gegeben; dann mögen n Functionen $y_1, y_2, \cdots y_n$ der Variabeln x bestimmt werden, die in der ganzen Ebene mit Ausnahme gewisser willkürlich vorgeschriebener Punkte

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, \quad a_{\sigma+1} = \infty$$

endlich und stetig sind, die, wenn x einfache Umläufe um die Punkte

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma$$

vollzieht, d. h. genauer gesprochen, die von diesen Punkten aus nach $a_{\sigma+1} = \infty$ hin gelegten Querschnitte im positiven Sinne überschreitet, beziehungsweise die Substitutionen $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots \mathsf{A}_\sigma$ erfahren, und die überdies an keiner dieser Stellen und auch nicht für $x = \infty$ unbestimmt werden.

Wir behaupten, dass unter gewissen über die Substitutionen

$$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots \mathsf{A}_\sigma$$

zu machenden speciellen Annahmen die Existenz eines Functionssystems $[y_i]$ von der geforderten Beschaffenheit durch die Theorie der Zetafunctionen erwiesen werden kann. Diese speciellen Annahmen sind die folgenden:

Betrachten wir die zu den Substitutionen $A_1, A_2, \cdots A_\sigma$ und

$$A_{\sigma+1} = A_1^{-1} A_2^{-1} \cdots A_\sigma^{-1}$$

gehörigen Fundamentalgleichungen, so wollen wir voraussetzen, dass die sämmtlichen Wurzeln dieser Fundamentalgleichungen den absoluten Betrag Eins besitzen.

Wenn für eine der Substitutionen $A_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma+1)$ die sämmtlichen Wurzeln der zugehörigen Fundamentalgleichung ganzzahlige Einheitswurzeln sind, und die canonische Form der Substitution $A_\varkappa$ nur Diagonalglieder enthält (d. h. also, dass entweder alle diese Wurzeln von einander verschieden oder doch so beschaffen sind, dass die zu einer λ-fachen Wurzel ω_α gehörige, in dem Theorem der Nr. 37 (Bd. I, S. 127) definirte Zahl $\varrho_{\alpha 1}$ den Werth λ besitzt), so bezeichnen wir mit $g_\varkappa$ die kleinste positive ganze Zahl, für welche diese sämmtlichen Wurzeln der Gleichung

$$\omega^{g_\varkappa} = 1$$

Genüge leisten. Wenn für eine der Substitutionen $A_\varkappa$ die beiden angegebenen Bedingungen nicht gleichzeitig erfüllt sind, so nehmen wir das entsprechende $g_\varkappa$ gleich Unendlich. Für ein $A_\varkappa$, wo das zugehörige $g_\varkappa$ einen endlichen Werth besitzt, ist dann offenbar

$$A_\varkappa^{g_\varkappa} = 1.$$

Die so definirten Zahlen $g_1, g_2, \cdots g_{\sigma+1}$ bestimmen in Verbindung mit den gegebenen singulären Stellen

$$a_1,\ a_2,\ \cdots a_\sigma,\quad a_{\sigma+1} = \infty,$$

von denen wir, ohne dadurch die Allgemeinheit zu beschränken, zwei, etwa a_1, a_2, in die Punkte 0, 1 verlegen können, eine **normale Differentialgleichung**

$$(\alpha) \qquad \frac{d^2 u}{dx^2} = q(x)\, u$$

im Sinne der Nr. 326 (S. 249). Wollten wir uns auf den in der erwähnten Nummer (S. 251) angeführten Poincaré'schen Satz in seiner allgemeinen Fassung stützen, so könnten wir sagen: Die in dem Coefficienten $q(x)$ auftretenden noch unbestimmten Parameter (vergl. a. a. O.) lassen sich stets und nur auf eine Weise so bestimmen, dass x eine eindeutige, und zwar wenn

$$-\frac{1}{\nu}=\sum_{i=1}^{\sigma+1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{g_i}\right)-1>0$$

ist, eine **Fuchs'sche**, wenn $-\frac{1}{\nu}<0$ eine rationale, wenn $-\frac{1}{\nu}=0$ ist, eine doppeltperiodische Function des Integralquotienten η wird.

Wenn wir uns dagegen des **Poincaré'schen** Satzes nur in der beschränkten Fassung bedienen, wir wir ihn in den Nummern 341—348 bewiesen haben, so können wir doch auf Grund des Satzes der Nr. 348 (S. 327) behaupten:

Es lässt sich stets eine der Differentialgleichung (α) subordinirte **Fuchs'sche** Differentialgleichung

$$(\beta)\qquad \frac{d^2u}{dx^2}=\bar{q}(x)u$$

angeben, die nebst den singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$ eventuell noch gewisse andere singuläre Stellen

$$a_{\sigma+2}, \cdots a_{\sigma+\tau+1}$$

besitzt. Man kann z. B. (β) allemal so einrichten, dass die Umkehrungsfunction des Integralquotienten die gegebenen Stellen

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1}$$

und überdies noch gewisse andere nicht gegebene Stellen auslässt.

Sei u_1, u_2 ein Fundamentalsystem von (β),

$$\frac{u_2}{u_1}=\eta,$$

und sei ϑ die zu η gehörige projective, t die zu u_1, u_2 gehörige homogene Monodromiegruppe dieser Differentialgleichung. Mögen ferner

$$A_1, \cdots A_\sigma, A_{\sigma+2}, \cdots A_{\sigma+\tau+1}$$

die Substitutionen bedeuten, die η beziehungsweise (u_1, u_2) erfahren, wenn x die von den Punkten

$$a_1, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+2}, \cdots a_{\sigma+\tau+1}$$

aus nach $a_{\sigma+1}=\infty$ hin gelegten Querschnitte im positiven Sinne überschreitet, während

$$A_{\sigma+1}=A_1^{-1}A_2^{-1}\cdots A_\sigma^{-1}A_{\sigma+2}^{-1}\cdots A_{\sigma+\tau+1}^{-1}$$

gesetzt wird, so ist die **Fuchs'sche** Gruppe ϑ mit der aus den Substitutionen

$$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots \mathsf{A}_\sigma, \mathsf{A}_{\sigma+1}$$

als Basis gebildeten Gruppe Θ in dem Sinne isomorph, dass jeder Substitution von ϑ eine bestimmte Substitution von Θ entspricht; insbesondere entsprechen den Substitutionen $A_\varkappa$ die Substitutionen $\mathsf{A}_\varkappa$ für $\varkappa = 1, 2, \cdots \sigma + 1$, und den Substitutionen $A_\varkappa$ für $\varkappa = \sigma + 2, \cdots \sigma + \tau + 1$ entspricht die identische Substitution von Θ.

366. Lösung des Riemann'schen Problems unter gewissen beschränkenden Voraussetzungen.

Wir wollen nun von den Substitutionen $\mathsf{A}_1, \cdots \mathsf{A}_\sigma$ dadurch zu unimodularen Substitutionen $\overline{\mathsf{A}}_1, \cdots \overline{\mathsf{A}}_\sigma$ übergehen, dass wir jedes Element von $\mathsf{A}_\varkappa$ durch die n-te Wurzel aus der Determinante dieser Substitution dividiren, dann bleibt die in Bezug auf die Fundamentalgleichungen der $\mathsf{A}_\varkappa$ gemachte Voraussetzung auch für die $\overline{\mathsf{A}}_\varkappa$ bestehen, und die aus den Substitutionen

$$\overline{\mathsf{A}}_1, \overline{\mathsf{A}}_2, \cdots \overline{\mathsf{A}}_\sigma$$

und deren inversen als Basis gebildete Gruppe $\overline{\Theta}$ ist in demselben Sinne wie Θ selbst mit der Fuchs'schen Gruppe ϑ isomorph.

Bilden wir mit Hülfe der Gruppen ϑ und $\overline{\Theta}$ die Fuchs'schen Zetaformen

$$Z_\varkappa(u_1, u_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{T}_\nu^{-1} \varphi_\varkappa(S_\nu u_1, S_\nu u_2) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

wo S_ν die Substitutionen der Gruppen ϑ beziehungsweise t, $\overline{T}_\nu$ die entsprechenden Substitutionen von $\overline{\Theta}$ durchläuft und die $\varphi_\varkappa(u_1, u_2)$ rationale homogene Functionen vom Grade $-2m$ der u_1, u_2 bedeuten, so convergiren diese Reihen für hinreichend grosse Werthe der positiven ganzen Zahl m, da die Fundamentalgleichungen derjenigen Substitutionen von $\overline{\Theta}$, die parabolischen Substitutionen von ϑ entsprechen, zufolge der für die Substitutionen $\mathsf{A}_\varkappa$ getroffenen Festsetzung nur Wurzeln vom absoluten Betrage Eins besitzen. Die $Z_\varkappa(u_1, u_2)$ befriedigen dann als Functionen von x aufgefasst eine homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit in x rationalen Coefficienten

$$(\gamma) \qquad \frac{d^n Z}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} Z}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n(x) Z = 0,$$

die der Fuchs'schen Classe angehört und nebst den singulären Punkten

$$a_1, \cdots a_\sigma, a_{\sigma+1},$$

in denen sich die Integrale verzweigen, noch gewisse andere singuläre Stellen

$$b_1, b_2, \cdots b_\varrho$$

besitzt, in deren Umgebung die Integrale das Verhalten rationaler Functionen zeigen, und die einerseits unter den Punkten $a_{\sigma+1}, \cdots a_{\sigma+\tau+1}$, andererseits unter denjenigen x-Werthen zu suchen sind, die den innerhalb des Einheitskreises der η-Ebene gelegenen Unendlichkeitsstellen der rationalen Functionen

$$u_1^{2m} \varphi_\varkappa(u_1, u_2) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

von η entsprechen.

Die Functionen $Z_1, Z_2, \cdots Z_n$ von x erfahren, wenn x den von dem Punkte $a_\varkappa$ aus nach $x = \infty$ hin gelegten Querschnitt im positiven Sinne überschreitet, die unimodulare Substitution $\overline{\mathsf{A}}_\varkappa$; wir können aber, indem wir diese Functionen mit einem Ausdrucke von der Form

$$A = (x - a_1)^{\lambda_1} \cdots (x - a_\sigma)^{\lambda_\sigma} (x - b_1)^{\mu_1} \cdots (x - b_\varrho)^{\mu_\varrho}$$

multipliciren, zu Ausdrücken $y_1, y_2, \cdots y_n$ übergehen, die beim Ueberschreiten der gedachten Querschnitte die Substitutionen

$$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots \mathsf{A}_\sigma$$

erleiden und überdies an den Stellen $b_1, \cdots b_\varrho$ nicht mehr unendlich werden. Dabei sind die $\lambda_1, \cdots \lambda_\sigma$ durch die Determinanten der Substitutionen $\mathsf{A}_\varkappa$ und zwar nur abgesehen von ganzen Zahlen bestimmt, während die $\mu_1, \cdots \mu_\varrho$ als positive ganze Zahlen so zu wählen sind, dass μ_i grösser ist als die höchste Ordnungszahl, von welcher ein Integral der Differentialgleichung (γ) für $x = b_i$ unendlich wird.

Die so bestimmten $y_1, y_2, \cdots y_n$ erfüllen die Anforderungen des Riemann'schen Problems, sie befriedigen eine lineare Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe

$$(\delta) \qquad \frac{d^n y}{d x^n} + q_1(x) \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \cdots + q_n(x) y = 0,$$

die die Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$, $a_{\sigma+1} = \infty$ zu wesentlichen singulären Stellen besitzt, die aber im Allgemeinen, d. h. wenn die $\sigma \cdot n^2$ Coefficienten der gegebenen Substitutionen

$$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots \mathsf{A}_\sigma$$

von einander unabhängige Grössen sind, noch ausserwesentlich singuläre Stellen (mindestens deren $\sigma - 2$, vergl. Nr. 227, Bd. II, 1, S. 388) aufweist. Das allgemeinste Functionssystem, das den Anforderungen des Riemann'schen Problems genügt, bildet das dem Fundamental-

systeme $[y_x]$ von (δ) entsprechende Fundamentalsystem einer mit (δ) zu derselben Classe gehörigen linearen Differentialgleichung, und man hat nunmehr nur noch die Ergebnisse des achten Kapitels des elften Abschnittes (Bd. II, 1, S. 365 ff.) heranzuziehen, um ein solches Functionssystem durch Angabe der Anzahl der ausserwesentlich singulären Stellen, beziehungsweise der genauen Werthe der stets realen Wurzeln der zu den wesentlich singulären Stellen gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen eindeutig zu bestimmen.

Wir haben also das Resultat:

Auf Grund der Ergebnisse des sechzehnten Abschnittes und der Theorie der Fuchs'schen Zetafunctionen lässt sich die Existenz der durch das Riemann'sche Problem geforderten Functionen in dem Falle beweisen, wo die Fundamentalgleichungen der gegebenen Substitutionen $A_1, \cdots A_\sigma, A_{\sigma+1}$ nur Wurzeln vom absoluten Betrage Eins besitzen, und es ist zugleich eine Methode gefunden, mittelst der man im Stande ist, das allgemeinste Functionssystem von der gewünschten Beschaffenheit wirklich herzustellen.

Auf den Unterschied, der zwischen dem Riemann'schen Probleme und der Aufgabe, eine lineare Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe zu bestimmen, deren Monodromiegruppe vorgeschrieben ist, besteht, wurde bereits in der Nr. 227 (Bd. II, 1, S. 227 ff.) hingewiesen; wir bemerken nur noch, dass der Lösung der letzteren Aufgabe, die wir für den Fall $n = 2$ im sechsten Kapitel des elften Abschnittes (Bd. II, 1, S. 323 ff.) nach dem Vorgange des Herrn Klein gegeben haben, auch die Voraussetzung zu Grunde liegt, dass die Fundamentalgleichungen der gegebenen Substitutionen $A_1, \cdots A_\sigma, A_{\sigma+1}$ Wurzeln mit dem absoluten Betrage Eins besitzen.

Wenn wir von einer linearen Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe, die durch ihre Coefficienten gegeben ist, ausgehen, so hängen die Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen im Allgemeinen, d. h. wenn wir die in den Coefficienten der Differentialgleichung enthaltenen Parameter willkürlich also als unbestimmte Constanten wählen, von diesen Parametern, insbesondere von den Werthen der singulären Punkte ab. Gehen wir dagegen von dem Riemann'schen Probleme aus, so können wir die Substitutionen $A_1, \cdots A_\sigma$ auf die mannigfaltigste Weise so einrichten, dass für sie die in Bezug auf die Wurzeln der Fundamentalgleichungen erforderlichen Bedingungen erfüllt sind und dass ihre Coefficienten von den ebenfalls willkürlich vorzuschreibenden Werthen der singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ unabhängig sind. Dann gehört die Differentialgleichung, der die Functionen

$[y_x]$ genügen, in die Kategorie derjenigen, deren Monodromiegruppe von den in den Coefficienten auftretenden Parametern $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ unabhängig ist, und es bestehen für dieselbe folglich die im neunten Kapitel des elften Abschnittes (Bd. II, 1, S. 398 ff.) entwickelten Fuchs'schen Sätze. Dies ist also insbesondere der Fall, wenn wir die singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ sowohl wie die Coefficienten der Substitutionen $A_1, A_2, \cdots A_\sigma$ (die letzteren allerdings gemäss den für die Wurzeln der Fundamentalgleichungen festzuhaltenden Beschränkungen) willkürlich, d. h. als unbestimmte Constanten wählen, wir kommen also, wenn wir von dem Riemann'schen Probleme ausgehen, gewissermassen „im Allgemeinen" zu Differentialgleichungen der Fuchs'schen Classe, deren Monodromiegruppe von den Werthen der wesentlichen singulären Stellen unabhängig sind.

367. Endliche Gruppen. Uebersicht über die Resultate von C. Jordan und Fuchs.

Wir betrachten nun noch den Fall, wo die gegebenen Substitutionen

$$A_1, \cdots A_\sigma$$

so beschaffen sind, dass die aus denselben und ihren inversen als Basis gebildete Gruppe Θ eine endliche ist, d. h. nur eine endliche Anzahl von Substitutionen enthält.

Wenn T_x eine beliebige Substitution von Θ bedeutet, so muss, da Θ eine endliche Gruppe sein sollte, jedenfalls eine positive ganze Zahl ν_x existiren, für welche

$$T_x^{\nu_x} = 1$$

ist; sei z. B. ν_x die kleinste Zahl von dieser Beschaffenheit. Dann folgt durch ähnliche Schlüsse wie die, die in der Nr. 33 (Bd. I, S. 107 ff.) dazu geführt haben, die Fundamentalgleichung einer Substitution in die Form (3) jener Nummer (a. a. O. S. 108) zu setzen, dass alle Wurzeln der zu T_x gehörigen Fundamentalgleichung die Gleichung

$$\omega^{\nu_x} = 1$$

befriedigen müssen, also ganzzahlige Einheitswurzeln sind. Die Substitutionen einer endlichen Gruppe Θ haben demnach stets die Eigenschaft, dass die sämmtlichen Wurzeln der zu ihnen gehörigen Fundamentalgleichungen dem absoluten Betrage nach gleich Eins sind, d. h. in dem jetzt zu betrachtenden Falle befriedigen die $A_1, \cdots A_\sigma$ jeden-

falls die bei unserem Existenzbeweise für die Functionen des Riemann'schen Problems erforderlichen Bedingungen.

Seien nun $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ die gegebenen singulären Punkte (wir bemerken, dass hier ebensowohl wie beim allgemeinen Riemann'schen Problem die Substitutionen

$$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots \mathsf{A}_\sigma$$

nicht sämmtlich von einander verschieden zu sein brauchen) und bedeute ϑ eine Fuchs'sche Gruppe, die mit der endlichen Gruppe Θ in dem Sinne isomorph ist, dass jeder Substitution von ϑ eine bestimmte Substitution von Θ entspricht. ϑ kann z. B. als die Gruppe einer Fuchs'schen Function $x = f(\eta)$ genommen werden, die die Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\sigma$ auslässt. Bilden wir die zu den Gruppen ϑ, $\overline{\Theta}$ (wo $\overline{\Theta}$ die mit Θ isomorphe unimodulare Gruppe bedeutet) gehörigen Zetaformen

$$Z_i(u_1, u_2) = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \overline{T}_\varkappa^{-1} \varphi_i(S_\varkappa u_1, S_\varkappa u_2) \qquad (i=1, 2, \cdots n)$$

und bedeute $\vartheta^{(1)}$ diejenige ausgezeichnete Untergruppe von ϑ, deren Substitutionen die identische Substitution von Θ entspricht, so bleiben die $Z_i(u_1, u_2)$ als Functionen von η aufgefasst offenbar ungeändert, wenn η eine Substitution von $\vartheta^{(1)}$ erfährt. Die Gruppe $\vartheta^{(1)}$ ist aber, wie man sofort übersieht, eine Untergruppe von ϑ mit endlichem Quotienten, und folglich eine Fuchs'sche Gruppe im Sinne der allgemeinen in der Nr. 322 (S. 236) aufgestellten Definition. Seien $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ zwei zu der Gruppe $\vartheta^{(1)}$ gehörige Fuchs'sche Functionen, durch die sich jede zu $\vartheta^{(1)}$ gehörige Fuchs'sche Function rational darstellen lässt (vergl. Nr. 323, S. 241), so besteht zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ eine algebraische Beziehung und sowohl die $Z_i(u_1, u_2)$ als auch $x = f(\eta)$ sind rational durch $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ darstellbar. Daraus folgt, dass die $Z_i(u_1, u_2)$ und ebenso die $y_1, y_2, \cdots y_n$ algebraische Functionen von x sind, was ja übrigens auch schon aus dem Satze der Nr. 158 (Bd. II, 1, S. 99) unmittelbar hervorgeht.

Man kann also algebraisch integrirbare lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit in x rationalen Coefficienten und beliebig vorgeschriebenen wesentlichen singulären Stellen bilden, wenn man die endlichen Gruppen linearer Substitutionen in n Variabeln kennt.

Im Falle $n = 2$ haben wir in der Nr. 301 (S. 159) die sämmtlichen endlichen Gruppen linearer Substitutionen aufgestellt, aber auch für $n > 2$ haben sich mehrere Mathematiker mit der Aufgabe, alle endlichen Gruppen linearer Substitutionen in n Variabeln zu bestimmen,

mit Erfolg beschäftigt. Namentlich hat Herr C. Jordan im 84. Bande des Crelle'schen Journals eine Methode entwickelt, die für jeden gegebenen Werth von n die Auffindung aller endlichen Gruppen linearer Substitutionen gestattet und hat mit Hülfe dieser Methode für $n = 3$ die Aufgabe auch wirklich gelöst. Mit dem Falle $n = 3$ haben sich dann noch die Herren Klein, Valentiner u. A. beschäftigt und die Resultate des Herrn Jordan theils vervollständigt theils bestätigt. Die Frage nach den algebraisch integrirbaren linearen Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung wurde von Herrn Jordan in der genannten Arbeit ebenfalls discutirt und dann von Herrn Fuchs auf einem anderen Wege (Acta Mathematica, Bd. I) untersucht.

Herr Fuchs geht dabei von den homogenen nicht linearen Relationen mit constanten Coefficienten aus, die (vergl. Nr. 186, Bd. II, 1, S. 208) zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems einer algebraischen integrirbaren linearen Differentialgleichung von höherer als der zweiten Ordnung bestehen. Betrachtet man das allgemeine Integral y einer algebraisch integrirbaren Differentialgleichung n-ter Ordnung, so lässt sich für dasselbe der Begriff des reducirten Werthesystems in ähnlicher Weise aufstellen, wie für $n = 2$ (vergl. Nr. 295, S. 136). Das reducirte Werthesystem umfasst nämlich diejenigen Zweige der Function y, die so beschaffen sind, dass nicht der Quotient zweier dieser Zweige constant ist. Aus den Untersuchungen des Herrn Jordan kann man schliessen, dass allgemein für ein gegebenes n die Anzahl der Elemente eines reducirten Werthesystems des allgemeinen Integrals eine angebbare obere Grenze besitzt. Herr Fuchs hat für $n = 3$ diese obere Grenze durch die ihm eigenthümlichen Methoden ermittelt, sein Resultat spricht sich in dem folgenden Satze aus:

Sei

$$(\alpha) \qquad f(y_1, y_2, y_3) = 0$$

die homogene Relation m-ten Grades ($m > 1$) mit constanten Coefficienten, die die Integralcurve $\mathfrak{C}$ (vergl. Nr. 191, Bd. II, 1. S. 227) einer algebraisch integrirbaren linearen Differentialgleichung dritter Ordnung mit rationalen Coefficienten darstellt. Wenn das Geschlecht p der durch (α) definirten algebraischen ebenen Curve grösser ist als Eins, so ist die Anzahl der Elemente des reducirten Werthesystems des allgemeinen Integrals y nicht grösser als vier. Ist $p = 1$, so ist die Anzahl dieser Elemente gleich zwei, drei, vier oder sechs. Endlich lassen sich für $p = 0$ die Integrale der Differentialgleichung dritter Ordnung, abgesehen von der Wurzel aus einer rationalen Function als Factor, als ganze homogene Functionen m-ten Grades der Integrale

einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten darstellen.

Wir erinnern daran, dass nach dem von Herrn Fuchs in eben dieser Abhandlung bewiesenen Satze, dessen Verallgemeinerung wir in der Nr. 191 (Bd. II, 1, S. 226) kennen gelernt haben, das Bestehen der Relation (α), wenn $m > 2$ ist, schon allein die algebraische Integrabilität der Differentialgleichung bedingt.

368. Rückblick auf die Untersuchungen der Abschnitte XIII—XVI. Satz von Fuchs.

In neuerer Zeit ist Herr Fuchs von anderweitigen allgemeineren Gesichtspunkten ausgehend zu einem auf die algebraisch integrirbaren linearen Differentialgleichungen oder, was auf dasselbe hinauskommt, die endlichen Gruppen linearer Substitutionen bezüglichen Theoreme gelangt. Wir wollen diese Entwickelungen von Herrn Fuchs hier darlegen, weil dieselben geeignet sind, die auf lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung bezüglichen Untersuchungen, mit denen wir uns in den Abschnitten XIII—XVI beschäftigt haben, im Lichte einer allgemeineren Auffassung erscheinen zu lassen und auf diese Weise der Forschung den Weg zur Verallgemeinerung dieser Untersuchungen auf Differentialgleichungen von höherer als zweiter Ordnung zu ebnen.

Wir haben uns, abgesehen von den auf allgemeinere Fragen hinweisenden Nummern 321—324, in den genannten Abschnitten ausschliesslich mit solchen Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Fuchs'schen Classe von der Form

$$(\alpha) \qquad \frac{d^2 u}{d z^2} = q(z)\, u$$

beschäftigt, deren projective Monodromiegruppe die Eigenschaft besass, dass ihre Substitutionen Verschiebungen in Bezug auf einen gewissen (realen, imaginären oder auf einen Punkt reducirten) Orthogonalkreis sind. In der That besitzt die Legendre'sche Differentialgleichung (L) (S. 1), allgemeiner jede Gauss'sche Differentialgleichung, für welche die

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3$$

reciproke ganze Zahlen oder Null sind und auch jede Differentialgleichung, deren unabhängige Variable eine Fuchs'sche Function des Integralquotienten ist, diese Eigenschaft, und das Gleiche gilt offenbar von jeder algebraisch integrirbaren linearen Differentialgleichung zwei-

ter Ordnung von der Form (α), da, wie in den Nummern 299—301 gezeigt wurde, die projective Monodromiegruppe einer solchen Differentialgleichung mit der Gruppe einer rational umkehrbaren Dreiecksfunction identisch sein muss.

Wenn wir wie gewöhnlich den Mittelpunkt des Orthogonalkreises in den Punkt $\eta = 0$ verlegen, so lautet die Gleichung dieses Kreises

$$(\beta) \qquad \eta\bar{\eta} - c = 0,$$

wo c positiv, negativ oder Null sein kann, und die projectiven Substitutionen

$$\eta' = S\eta = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

die Verschiebungen in Bezug auf den Orthogonalkreis (β) darstellen, sind durch die Gleichung (VIII) der Nr. 282 (S. 89), d. h. in unserem Falle durch die Gleichung

$$(\gamma) \qquad \eta\bar{\eta} - c = |\gamma\eta + \delta|^2 (\eta'\bar{\eta}' - c),$$

charakterisirt.

Führen wir in gewohnter Weise durch die Gleichungen

$$u_1 = \sqrt{\frac{dz}{d\eta}}, \qquad u_2 = \eta\sqrt{\frac{dz}{d\eta}}$$

dasjenige Fundamentalsystem von (α) ein, als dessen Quotient η erscheint, und betrachten an Stelle der projectiven Substitutionen $S\eta$ die entsprechenden homogenen unimodularen Substitutionen

$$u_1' = Su_1 = \pm(\delta u_1 + \gamma u_2),$$
$$u_2' = Su_2 = \pm(\beta u_1 + \alpha u_2),$$

so lautet nach Multiplication mit $u_1 \cdot \bar{u}_1$ die Gleichung des Orthogonalkreises

$$u_2\bar{u}_2 - cu_1\bar{u}_1 = 0,$$

und die Bedingung (γ) nimmt die Form an

$$u_2'\bar{u}_2' - cu_1'\bar{u}_1' = u_2\bar{u}_2 - cu_1\bar{u}_1,$$

d. h. man kann die Eigenschaft der homogenen unimodularen Substitution S einfach dahin aussprechen, dass diese Substitution die in den u_1, u_2 und ihren conjugirten Werthen $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ bilineare Form mit realen Coefficienten

$$u_2\bar{u}_2 - cu_1\bar{u}_1$$

ungeändert lässt. Wir können also die zu Beginn dieser Nummer ausgesprochene Bemerkung über unsere vorangegangenen Untersuchungen in die folgende Form kleiden:

Wenn die Differentialgleichung (α) eine Gauss'sche Differentialgleichung mit eindeutig umkehrbarem Integralquotienten oder allgemein eine Fuchs'sche Differentialgleichung ist oder aus einer solchen Differentialgleichung durch eine Transformation von der Form

$$z = \varphi(x), \quad u = \sqrt{\frac{1}{\varphi'(x)}}\, v,$$

wo $\varphi(x)$ eine rationale Function bedeutet, hervorgeht, also insbesondere wenn die Differentialgleichung (α) algebraisch integrirbar ist, so giebt es stets eine aus den Elementen u_1, u_2 eines Fundamentalsystems und den conjugirten Werthen $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ gebildete bilineare Form mit realen Coefficienten

$$u_2\bar{u}_2 - c u_1 \bar{u}_1,$$

die ungeändert bleibt, wenn die u_1, u_2 eine Substitution der homogenen Monodromiegruppe der Differentialgleichung (α) erfahren, oder mit anderen Worten, wenn z einen beliebigen geschlossenen Umlauf in seiner Ebene vollzieht.

Eine analoge Eigenschaft besteht nun, wie Herr Fuchs gezeigt hat, für eine algebraisch integrirbare lineare Differentialgleichung beliebiger Ordnung; Herr Fuchs erschliesst dies aus einem allgemeinen Theorem, welches folgendermassen lautet.

Sei

$$\frac{d^n u}{dz^n} + p_2(z)\frac{d^{n-2}u}{dz^{n-2}} + \cdots + p_n(z)u = 0 \tag{1}$$

eine von dem Gliede mit $\frac{d^{n-1}u}{dz^{n-1}}$ befreite lineare Differentialgleichung, deren Coefficienten eindeutige Functionen der unabhängigen Variabeln z sind, und möge die unimodulare Monodromiegruppe Θ dieser Differentialgleichung die Eigenschaft haben, dass die zu einer beliebigen Substitution von Θ gehörige Fundamentalgleichung durch die reciproken Werthe der Wurzeln derjenigen Gleichung befriedigt wird, die aus dieser Fundamentalgleichung dadurch hervorgeht, dass ihre sämmtlichen Coefficienten durch ihre conjugirten Werthe ersetzt werden; dass ferner unter den Substitutionen von Θ wenigstens eine enthalten ist, deren Fundamentalgleichung lauter von einander verschiedene Wurzeln vom absoluten Betrage Eins besitzt, so giebt es eine aus den Elementen eines Fundamentalsystems

$$u_1, u_2, \cdots u_n$$

und den conjugirten Werthen

$$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots \bar{u}_n$$

gebildete bilineare Form mit realen, constanten Coefficientenverhältnissen von der Gestalt

$$a_1 u_1 \bar{u}_1 + a_2 u_2 \bar{u}_2 + \cdots + a_n u_n \bar{u}_n,$$

die durch alle Substitutionen von Θ in sich selbst transformirt wird.

369. Eigenschaften der Substitutionen, die den Anforderungen des Fuchs'schen Satzes genügen.

Bezeichnen wir mit

$$\left.\begin{array}{l} S = (a_{i\varkappa}), \\ |a_{i\varkappa}| = 1 \end{array}\right\} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

eine beliebige Substitution von Θ und denken uns die zu S gehörige Fundamentalgleichung

(1) $$|a_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa}\omega| = 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

nach Potenzen von ω geordnet

(2) $$(-1)^n \omega^n + \alpha_1 \omega^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\omega + 1 = 0,$$

so sind die Coefficienten

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{n-1}, \alpha_n = 1$$

offenbar in der Form

(3) $$\alpha_l = (-1)^{n-l} \Sigma R_l \qquad (l = 1, 2, \cdots n)$$

darstellbar, wo R_l eine Hauptsubdeterminante (Subdeterminante, deren Diagonalglieder unter den Diagonalgliedern $a_{\varkappa\varkappa}$ der ursprünglichen Determinante enthalten sind) l-ter Ordnung der Determinante

$$|a_{i\varkappa}| \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

bedeutet und die Summation über alle Hauptsubdeterminanten l-ter Ordnung zu erstrecken ist.

Zufolge der Voraussetzung hat die Gleichung (2) mit der Gleichung

$$\omega^n + \bar{\alpha}_{n-1}\omega^{n-1} + \cdots + \bar{\alpha}_1 \omega + (-1)^n = 0$$

sämmtliche Wurzeln gemein, es ist also

$$\alpha_\varkappa = (-1)^n \bar{\alpha}_{n-\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

d. h. mit Rücksicht auf die Gleichungen (3)

$$\Sigma R_\varkappa = \Sigma \bar{R}_{n-\varkappa}. \tag{4}$$

Möge wie gewöhnlich $A_{i\varkappa}$ die zu dem Elemente $a_{\varkappa i}$ gehörige Subdeterminante $(n-1)$-ter Ordnung von

$$|a_{i\varkappa}| \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

bedeuten, so dass also

$$S^{-1} = (A_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

ist, dann lautet die Gleichung (4) insbesondere für $\varkappa = 1$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \bar{A}_{ii}. \tag{5}$$

Sei Ω eine Substitution von Θ, die so beschaffen ist, dass die sämmtlichen Wurzeln $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$ der zu Ω gehörigen Fundamentalgleichung von einander verschieden und dem absoluten Betrage nach gleich Eins sind (die Existenz mindestens einer solchen Substitution wurde ja vorausgesetzt), dann können wir uns das der Gruppe Θ zu Grunde liegende Fundamentalsystem

$$u_1, u_2, \cdots u_n$$

als das zu Ω gehörige canonische Fundamentalsystem gewählt denken, so dass also

$$\Omega u_\varkappa = \omega_\varkappa u_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

ist.

Bedeute ferner

$$T = (b_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

irgend eine andere Substitution von Θ, so müssen zufolge der über die Gruppe Θ gemachten Annahme die den Gleichungen (5) analogen Gleichungen auch für die Substitution

$$(c_{i\varkappa}) = (a_{i\varkappa})\, \Omega^r (b_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

erfüllt sein, wo r eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Nun ist aber

$$(c_{i\varkappa})^{-1} = (b_{i\varkappa})^{-1}\, \Omega^{-r} (a_{i\varkappa})^{-1},$$

wir haben folglich (vergl. Nr. 30, Bd. I, S. 92)

$$c_{i\varkappa} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{l\varkappa} \omega_l^{r},$$

$$C_{i\varkappa} = \sum_{l=1}^{n} B_{il} A_{l\varkappa} \omega_l^{-r},$$

wo $C_{i\varkappa}$, $B_{i\varkappa}$ beziehungsweise die zu den Elementen $c_{\varkappa i}$, $b_{\varkappa i}$ der Determinanten

$$|c_{i\varkappa}|,\ |b_{i\varkappa}| \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

gehörigen Subdeterminanten bedeuten. Die der Gleichung (5) analoge Gleichung lautet daher für die Substitution $(c_{i\varkappa})$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(\overline{B}_{il}\overline{A}_{li} - a_{il}b_{li})\,\omega_l^r = 0, \tag{5a}$$

da ja

$$\omega_l^{-1} = \overline{\omega}_l \qquad (l = 1, 2, \cdots n)$$

sein sollte.

Setzen wir in (5a) für r die Werthe $0, 1, \cdots n-1$ ein und beachten, dass die $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$ von einander verschieden, also die Determinante

$$|\omega_\varkappa^{i-1}| \neq 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

ist, so schliessen wir, dass

$$\sum_{i=1}^{n}(\overline{B}_{il}\overline{A}_{li} - a_{il}b_{li}) = 0 \qquad (l = 1, 2, \cdots n) \tag{6}$$

sein muss.

Nehmen wir insbesondere

$$T = (b_{i\varkappa}) = \Omega,$$

so ergiebt sich aus (6) die Gleichung

$$\overline{A}_{ii} = a_{ii} \qquad (i = 1, 2, \cdots n). \tag{7}$$

Diese Gleichung besteht für **jede** Substitution von Θ, also auch für die Substitution $(c_{i\varkappa})$; mit Rücksicht auf die Ausdrücke der $c_{i\varkappa}$, $C_{i\varkappa}$ haben wir demnach

$$\sum_{l=1}^{n}(\overline{B}_{il}\overline{A}_{li} - a_{il}b_{li})\,\omega_l^r = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots n),$$

und wenn wir hierin dem r wieder die Werthe $0, 1, \cdots n-1$ beilegen, so folgt wie oben, da die $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$ von einander verschieden sind,

$$\overline{B}_{il}\overline{A}_{li} = a_{il}b_{li} \qquad (i, l = 1, 2, \cdots n). \tag{8}$$

Nehmen wir nunmehr

$$T = (b_{i\varkappa}) = (a_{i\varkappa})^{-1} = (A_{i\varkappa}) = S^{-1},$$

so ergeben die Gleichungen (8)

(9) $$\bar{a}_{il}\bar{A}_{li} = a_{il}A_{li} \qquad (i, l = 1, 2, \cdots n),$$

und wenn wir andererseits

$$(b_{i\varkappa}) = (a_{i\varkappa})$$

setzen, so folgt aus (8)

(10) $$\bar{A}_{il}\bar{A}_{li} = a_{il}a_{li} \qquad (i, l = 1, 2, \cdots n).$$

Endlich ergiebt das Gleichungssystem (8) für

$$(b_{i\varkappa}) = (a_{i\varkappa})\,\Omega^r\,(a_{i\varkappa})$$

die Gleichungen

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \bar{A}_{i\varkappa}\bar{A}_{\varkappa l}\omega_\varkappa^{\ r} \cdot \bar{A}_{li} = \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{l\varkappa}a_{\varkappa i}\omega_\varkappa^{\ r} \cdot a_{il},$$

und wenn wir hierin abermals $r = 0, 1, \cdots n - 1$ nehmen, so schliessen wir aus der Verschiedenheit der $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$, dass

(11) $$\bar{A}_{i\varkappa}\bar{A}_{\varkappa l}\bar{A}_{li} = a_{l\varkappa}a_{\varkappa i}a_{il} \qquad (i, \varkappa, l = 1, 2, \cdots n)$$

sein muss.

370. **Beweis des Fuchs'schen Satzes und Anwendung desselben auf endliche Gruppen.**

Wenn die Integrale $u_1, u_2, \cdots u_n$ der Differentialgleichung (1) die Substitution

$$S = (a_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

der Monodromiegruppe Θ erfahren, so erleiden die conjugirten Werthe

$$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots \bar{u}_n$$

dieser Integrale die conjugirte Substitution

$$\bar{S} = (\bar{a}_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n).$$

Betrachten wir also die bilineare Form

$$\varphi(u_1, \cdots u_n, \bar{u}_1, \cdots \bar{u}_n) = \sum_{\varkappa=1}^{n} A_\varkappa u_\varkappa \bar{u}_\varkappa,$$

deren Coefficienten $A_\varkappa$ von z unabhängige Grössen sind, so verwandelt sich dieselbe durch Anwendung der Substitution S in

$$\tilde{\varphi}(u_1, \cdots u_n, \bar{u}_1, \cdots \bar{u}_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\varkappa=1}^{n} P_{i\varkappa}u_i\bar{u}_\varkappa,$$

wo

$$P_{i\varkappa} = \varphi(a_{1i}, \cdots a_{ni}, \bar{a}_{1\varkappa}, \cdots \bar{a}_{n\varkappa}) = \sum_{\alpha=1}^{n} A_\alpha a_{\alpha i} \bar{a}_{\alpha\varkappa}$$

gesetzt wurde. Bestimmen wir die $A_1, \cdots A_n$ aus den Gleichungen

$$P_{12} = 0, \; P_{13} = 0, \cdots P_{1n} = 0,$$

so ergiebt sich

$$A_1 a_{11} : A_2 a_{21} : \cdots : A_n a_{n1} = \bar{A}_{11} : \bar{A}_{12} : \cdots : \bar{A}_{1n},$$

also mit Rücksicht auf die Gleichungen (7)

$$\frac{A_\varkappa}{A_1} = \frac{\bar{A}_{1\varkappa}}{a_{\varkappa 1}} \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots n). \tag{12}$$

Die Gleichung (9) lehrt also, dass die Verhältnisse der Grössen

$$A_1, A_2, \cdots A_n$$

real sind.

Setzen wir die Ausdrücke (12) in $P_{i\varkappa}$ ein, so ergiebt sich

$$\frac{P_{i\varkappa}}{A_1} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha i} \bar{a}_{\alpha\varkappa} \frac{\bar{A}_{1\alpha}}{a_{\alpha 1}} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n).$$

Nun ist aber nach Gleichung (11)

$$\bar{A}_{\alpha\varkappa} \bar{A}_{\varkappa 1} \bar{A}_{1\alpha} = a_{1\varkappa} a_{\varkappa\alpha} a_{\alpha 1}$$

und folglich

$$\frac{\bar{a}_{\alpha\varkappa} \bar{A}_{1\alpha}}{a_{\alpha 1}} = \frac{\bar{a}_{\alpha\varkappa} a_{1\varkappa} a_{\varkappa\alpha} a_{\alpha 1}}{a_{\alpha 1} \bar{A}_{\alpha\varkappa} \bar{A}_{\varkappa 1}},$$

oder mit Rücksicht auf (9) und (10)

$$\frac{\bar{a}_{\alpha\varkappa} \bar{A}_{1\alpha}}{a_{\alpha 1}} = \frac{A_{\varkappa\alpha}}{a_{\varkappa\alpha}} \cdot \frac{a_{1\varkappa} a_{\varkappa\alpha}}{\bar{A}_{\varkappa 1}} = \frac{A_{\varkappa\alpha} a_{1\varkappa}}{\bar{A}_{\varkappa 1}},$$

d. h. wir erhalten

$$\frac{P_{i\varkappa}}{A_1} = \frac{a_{i\varkappa}}{\bar{A}_{\varkappa 1}} \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha i} A_{\varkappa\alpha} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n).$$

Hieraus folgt

$$P_{i\varkappa} = 0, \quad \text{für } i \neq \varkappa,$$

$$\frac{P_{\varkappa\varkappa}}{A_1} = \frac{a_{1\varkappa}}{\bar{A}_{\varkappa 1}} = \frac{a_{1\varkappa} a_{\varkappa 1}}{\bar{A}_{\varkappa 1} a_{\varkappa 1}},$$

also mit Rücksicht auf die Gleichungen (10)

$$\frac{P_{\varkappa\varkappa}}{A_1} = \frac{\bar{A}_{1\varkappa}}{a_{\varkappa 1}} = \frac{A_\varkappa}{A_1},$$

d. h. wir haben

$$P_{\varkappa\varkappa} = A_\varkappa \qquad (\varkappa=1,2,\cdots n)$$

und folglich

$$\widetilde{\varphi}_1 = \varphi.$$

Wenn wir also die Coefficienten der Form φ durch die Gleichungen (12) bestimmen, so bleibt diese Form ungeändert, wenn die $u_1, u_2, \cdots u_n$ die Substitution S erleiden.

Für die beliebige Substitution

$$T = (b_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa=1,2,\cdots n)$$

von Θ wird ebenso die Form

$$B_1 u_1 \bar{u}_1 + B_2 u_2 \bar{u}_2 + \cdots + B_n u_n \bar{u}_n$$

mit den realen Coefficientenverhältnissen

$$\frac{B_\varkappa}{B_1} = \frac{\bar{B}_{1\varkappa}}{b_{\varkappa 1}} \qquad (\varkappa=2,3,\cdots n)$$

ungeändert bleiben, wenn auf die $u_1, u_2, \cdots u_n$ diese Substitution T ausgeübt wird; da aber für irgend zwei Substitutionen S, T der Gruppe Θ die Gleichungen (8) gelten, so haben wir

$$\frac{B_{1\varkappa}}{b_{\varkappa 1}} = \frac{a_{1\varkappa}}{\bar{A}_{\varkappa 1}},$$

oder nach (10)

$$\frac{\bar{B}_{1\varkappa}}{b_{\varkappa 1}} = \frac{A_{1\varkappa}}{a_{\varkappa 1}};$$

es ist also

$$\frac{B_\varkappa}{B_1} = \frac{A_\varkappa}{A_1} \qquad (\varkappa=2,3,\cdots n),$$

d. h. die invariante bilineare Form ist für jede Substitution von Θ, abgesehen von einem constanten Factor, dieselbe, oder mit anderen Worten:

Die Form φ bleibt ungeändert, wenn auf die $u_1, u_2, \cdots u_n$ irgend eine Substitution der Gruppe Θ angewandt wird.

Damit ist aber der Beweis des am Schlusse der Nr. 368 (S. 393) ausgesprochenen Fuchs'schen Satzes geliefert.

Wir bemerken, ohne auf den Beweis einzugehen, dass, wie Herr Fuchs gezeigt hat, dieser Satz auch eine Umkehrung zulässt, und dass der Satz sowohl wie seine Umkehrung auch dann gültig bleiben, wenn in der gegebenen Differentialgleichung das Glied mit der $(n-1)$-ten Ableitung nicht fehlt.

Sei nun Θ eine endliche Gruppe homogener linearer unimodularer

Substitutionen und bedeute $S_\varkappa$ eine beliebige Substitution dieser Gruppe. Dann sind (Nr. 367, S. 388) die Wurzeln der zu $S_\varkappa$ gehörigen Fundamentalgleichung ganzzahlige Einheitswurzeln; diejenige Gleichung, die aus der Fundamentalgleichung dadurch hervorgeht, dass man in jedem Coefficienten $+i$ in $-i$ verwandelt, wird demnach durch die reciproken Werthe der Wurzeln der Fundamentalgleichung befriedigt. Wir haben also den Satz:

Wenn unter den Substitutionen einer endlichen und unimodularen Gruppe wenigstens eine enthalten ist, deren Fundamentalgleichung lauter von einander verschiedene Wurzeln besitzt, so giebt es eine bilineare Form der Gestalt

$$A_1 u_1 \bar{u}_1 + A_2 u_2 \bar{u}_2 + \cdots + A_n u_n \bar{u}_n$$

mit realen Coefficientenverhältnissen, die ungeändert bleibt, wenn auf die $u_1, u_2, \cdots u_n$ eine Substitution der Gruppe angewandt wird.

371. Kriterium dafür, dass die Monodromiegruppe einer Differentialgleichung eine bilineare Form mit conjugirten Variabelen ungeändert lässt.

Der am Schlusse der vorigen Nummer bewiesene Satz lehrt, dass ebenso wie für $n = 2$ auch für ein beliebiges n die algebraisch integrirbaren linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung sich in die Classe von linearen Differentialgleichungen einordnen, deren Monodromiegruppe eine aus den Elementen eines Fundamentalsystems und dessen conjugirten Werthen gebildete bilineare Form mit constanten und realen Coefficienten ungeändert lässt. Die hohe Bedeutung dieser Classe von Differentialgleichungen erhellt auch andererseits daraus, dass die Fuchs'schen Differentialgleichungen zweiter Ordnung dieser Classe angehören. Man kann nun nach Herrn Fuchs ein einfaches Kriterium dafür angeben, dass eine vorgelegte Differentialgleichung

$$p_0 \frac{d^n u}{dz^n} + p_1 \frac{d^{n-1} u}{dz^{n-1}} + \cdots + p_n u = 0 \tag{1}$$

der gedachten Classe angehört.

Zerlegen wir nämlich u, z und die Coefficienten $p_\varkappa$ von (1) in ihre realen und imaginären Theile

$$\begin{cases} u = v + wi, \\ z = x + yi, \\ p_\varkappa = P_\varkappa + Q_\varkappa i, \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n) \end{cases} \tag{2}$$

so sind also v, w, $P_\varkappa$, $Q_\varkappa$ reale Functionen der realen Variabelen x, y, die die partiellen Differentialgleichungen

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial w}{\partial y}, & \dfrac{\partial w}{\partial x} = -\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\[2ex] \dfrac{\partial P_\varkappa}{\partial x} = \dfrac{\partial Q_\varkappa}{\partial y}, & \dfrac{\partial Q_\varkappa}{\partial x} = -\dfrac{\partial P_\varkappa}{\partial y} \end{cases}$$

befriedigen. Setzen wir die Werthe (2) in die Differentialgleichung (1) ein und beachten, dass

$$\frac{d^\lambda u}{dz^\lambda} = \frac{\partial^\lambda v}{\partial x^\lambda} + i\frac{\partial^\lambda w}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^\lambda w}{\partial y^\lambda} - i\frac{\partial^\lambda v}{\partial y^\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots)$$

ist, so zerfällt (1) in die beiden Differentialgleichungen

$$\sum_{\varkappa=0}^{n}\left(P_\varkappa \frac{\partial^{n-\varkappa} v}{\partial x^{n-\varkappa}} - Q_\varkappa \frac{\partial^{n-\varkappa} w}{\partial x^{n-\varkappa}}\right) = 0,$$

$$\sum_{\varkappa=0}^{n}\left(Q_\varkappa \frac{\partial^{n-\varkappa} v}{\partial x^{n-\varkappa}} + P_\varkappa \frac{\partial^{n-\varkappa} w}{\partial x^{n-\varkappa}}\right) = 0,$$

aus denen durch Elimination von v beziehungsweise w die Gleichungen

$$(4)\qquad \sum_{\varkappa=0}^{n-1}\left(M_\varkappa \frac{\partial^{n-\varkappa} v}{\partial x^{n-\varkappa}} - N_\varkappa \frac{\partial^{n-\varkappa} w}{\partial x^{n-\varkappa}}\right) + (P_n^2 + Q_n^2)\, v = 0,$$

$$(5)\qquad \sum_{\varkappa=0}^{n-1}\left(N_\varkappa \frac{\partial^{n-\varkappa} v}{\partial x^{n-\varkappa}} + M_\varkappa \frac{\partial^{n-\varkappa} w}{\partial x^{n-\varkappa}}\right) + (P_n^2 + Q_n^2)\, w = 0$$

hervorgehen, wo

$$M_\varkappa = P_\varkappa P_n + Q_\varkappa Q_n, \quad N_\varkappa = Q_\varkappa P_n - P_\varkappa Q_n \qquad (\varkappa = 0, 1, \cdots n-1)$$

gesetzt wurde.

Ersetzen wir in (4)

$$\frac{\partial w}{\partial x} \text{ durch } -\frac{\partial v}{\partial y},$$

und in (5)

$$\frac{\partial v}{\partial x} \text{ durch } \frac{\partial w}{\partial y},$$

so ergiebt sich, dass sowohl v als auch w die partielle Differentialgleichung

$$(6)\qquad \sum_{\varkappa=0}^{n-1}\left(M_\varkappa \frac{\partial^{n-\varkappa} \omega}{\partial x^{n-\varkappa}} + N_\varkappa \frac{\partial^{n-\varkappa} \omega}{\partial x^{n-\varkappa-1}\partial y}\right) + (P_n^2 + Q_n^2)\, \omega = 0$$

befriedigen. Bedeuten umgekehrt v, w den realen Theil und Coefficienten von i einer monogenen Function der complexen Variabeln

$$z = x + yi$$

und befriedigen v, w die partielle Differentialgleichung (6), so folgt, indem man die angegebene Rechnung rückwärts verfolgt, dass $v + wi$ eine Lösung der linearen Differentialgleichung (1) sein müsse.

Betrachten wir nun ein Fundamentalsystem

$$u_\varkappa = v_\varkappa + w_\varkappa i \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

der Differentialgleichung (1), so befriedigen die $v_\varkappa$, $w_\varkappa$ die Differentialgleichung (6) und folglich die Ausdrücke

$$u_\varkappa \bar{u}_\lambda = v_\varkappa v_\lambda + w_\varkappa w_\lambda - i(v_\varkappa w_\lambda - v_\lambda w_\varkappa),$$
$$(\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots n),$$

diejenige lineare partielle Differentialgleichung, der die Quadrate der Lösungen der Differentialgleichung (6) Genüge leisten.

Wenn also eine aus den

$$u_1, \cdots u_n, \quad \bar{u}_1, \cdots \bar{u}_n$$

gebildete bilineare Form mit constanten Coefficienten bei allen Substitutionen der Monodromiegruppe Θ der Differentialgleichung (1) ungeändert bleibt, so muss die partielle Differentialgleichung, der die Quadrate der Integrale von (6) Genüge leisten, durch eine eindeutige Function der beiden realen Variabeln x, y befriedigt werden.

Fünftes Kapitel.

372. Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten; mit doppeltperiodischen Coefficienten.

Wir waren zu Beginn dieses Abschnittes (Nr. 350, S. 329) von dem Probleme ausgegangen, die Darstellung der allgemeinen Lösung y einer linearen Differentialgleichung, deren Coefficienten algebraische Functionen von x sind, in der Form zu geben, dass diese Lösung und die unabhängige Variable x simultan als eindeutige Functionen einer Hülfsvariabeln η erscheinen, haben uns aber dann mit Rücksicht auf eine an früherer Stelle dargelegte Reductionsmethode auf die Betrachtung von Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten beschränkt. Wir nehmen jetzt die Frage in der allgemeineren Fassung wieder auf, wo die Coefficienten der Differentialgleichung algebraische Functionen der unabhängigen Variabeln sind, um eine Reihe von Problemen zu formuliren, deren Bedeutung nicht so klar hervortritt, wenn man die vorgelegte Differentialgleichung mit Hülfe des gedachten Reductionsverfahrens auf eine solche mit rationalen Coefficienten zurückführt.

Wie in der Nr. 187 (Bd. II, 1, S. 213 ff.) bemerkt wurde, können wir die gegebene Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten in der Form

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x, s)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n(x, s) y = 0$$

zu Grunde legen, wo die Coefficienten $p_1(x, s), \cdots p_n(x, s)$ rationale Functionen der durch eine algebraische Gleichung

$$(2) \qquad F(x, s) = 0$$

vom Range p mit einander verknüpften Variabelen (x, s) sind. Wir setzen überdies voraus, dass die Integrale von (1) keine Punkte der Unbestimmtheit besitzen, und fassen diese Bedingung auch in dem vorliegenden allgemeinen Falle in die Aussage zusammen, dass die Differentialgleichung (1) der Fuchs'schen Classe angehören möge.

Es lässt sich dann stets eine Fuchs'sche Function $x = f(\eta)$ finden, die so beschaffen ist, dass sowohl s als auch das allgemeine Integral y von (1) als eindeutige Functionen von η erscheinen, z. B. kann man $f(\eta)$ so wählen, dass diese Function die Verzweigungspunkte der algebraischen Function s von x und diejenigen x-Werthe, zu denen Werthepaare (s, x) gehören, für die die Coefficienten von (1) unendlich werden, auslässt.

Führen wir dann η, beziehungsweise die Grössen

$$u_1 = \sqrt{\frac{dx}{d\eta}}, \quad u_2 = \eta\sqrt{\frac{dx}{d\eta}},$$

in die Differentialgleichung (1) an Stelle von x als unabhängige Variable ein, so sind für die so entstehende Differentialgleichung in ihrer invarianten Gestalt

1. die Coefficienten Fuchs'sche Functionen von η,

2. die sämmtlichen Integrale eindeutige Functionen von η. Wir wollen diese beiden Eigenschaften der gedachten Differentialgleichung gesondert betrachten.

Die erste Eigenschaft hat dieselbe offenbar mit jeder Differentialgleichung gemein, die aus einer Differentialgleichung mit in (x, s) rationalen Coefficienten durch Einführung von η beziehungsweise u_1, u_2 als neuer unabhängiger Variabeln hervorgeht, die zweite Eigenschaft dagegen ist wesentlich bedingt durch die Beschaffenheit der singulären Stellen von (1) und durch die Natur der Monodromiegruppe dieser Differentialgleichung.

Etwas anders gefasst führt diese Ueberlegung zu dem folgenden Problem.

Denken wir uns die durch die Gleichung (2) verknüpften Variabeln x, s auf irgend eine Weise als eindeutige Fuchs'sche oder Klein'sche Functionen einer Hülfsvariabeln t dargestellt, z. B. auf die in der Nr. 324 (S. 242 ff.) beschriebene Art, und sei (1) eine vorgelegte Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe mit in (x, s) rationalen Coefficienten. Führen wir in (1) an Stelle von x die Grösse t als neue unabhängige Variable ein, so erhalten wir eine Differentialgleichung (1a), die in ihrer invarianten Gestalt Coefficienten besitzt, die Fuchs'sche beziehungsweise Klein'sche Functionen von t sind. Wie muss die Differentialgleichung (1) beschaffen sein, damit auch die Integrale von (1a) eindeutige Functionen von t werden?

Die exacte Lösung dieses Problems bietet nicht unerhebliche Schwierigkeiten dar, obwohl eine Anzahl nothwendiger Bedingungen durch Umkehrung der beim Poincaré'schen Principe zur Anwendung

gelangten Ueberlegungen sofort angegeben werden kann. Wir beschränken uns auf die Behandlung der Frage in dem besonderen Falle, wo die algebraische Gleichung (2) vom Range Eins ist, ein Fall, der in der Litteratur ausführlich untersucht worden ist und zu, namentlich für die mathematische Physik, bedeutsamen Resultaten geführt hat.

Wenn $p = 1$ ist, so können wir die zwischen x und s bestehende Gleichung ohne Beschränkung der Allgemeinheit in der Form

$$s^2 = (1 - x^2)(1 - \varkappa^2 x^2) \tag{2a}$$

voraussetzen, wo $\varkappa$ eine Constante bedeutet, und dann den Parameter t gleich dem elliptischen Integrale erster Gattung

$$t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - \varkappa^2 x^2)}}$$

nehmen, so dass also x und s in der Gestalt

$$x = \operatorname{sn} t,$$
$$s = \operatorname{cn} t \cdot \operatorname{dn} t$$

als eindeutige doppeltperiodische Functionen von t mit den Perioden

$$\Omega = 4K, \quad \Omega' = 2K'i$$

erscheinen.

Führen wir in die Differentialgleichung (1) t als unabhängige Variable ein, so erhalten wir

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \pi_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + \pi_n(t)\, y = 0, \tag{1a}$$

und die $\pi_1(t), \cdots \pi_n(t)$, die sich aus den $p_\varkappa(s, x)$ und den Ableitungen der doppeltperiodischen Function x von t rational zusammensetzen, sind schon selbst eindeutige doppeltperiodische Functionen von t, so dass wir also in diesem Falle gar nicht zu der invarianten Gestalt der Differentialgleichung überzugehen brauchen. Die Bedingungen dafür, dass die Integrale von (1a) eindeutige Functionen von t werden, lassen sich dann in folgender Weise formuliren.

373. Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Coefficienten und eindeutigem Integral.

Zunächst ist klar, dass wenn, wie wir voraussetzen, die Differentialgleichung (1) der Fuchs'schen Classe angehört, die eindeutigen Functionen, die die Differentialgleichung (1a) befriedigen sollen, nur dort unbestimmt werden können, wo dies für die elliptischen Functionen

$$\operatorname{sn} t, \ \operatorname{cn} t, \ \operatorname{dn} t$$

der Fall ist, d. h. für $t = \infty$. Die Integrale von (1a) müssen also für alle endlichen Werthe von t den Charakter rationaler Functionen haben, und sind folglich nach einem bekannten Satze der Functionentheorie als Quotienten beständig (d. h. für alle endlichen Werthe von t) convergenter Potenzreihen von t darstellbar.

Betrachten wir ferner den Fundamentalbereich der elliptischen Functionen x und s von t, d. h. das zu diesen Functionen gehörige Periodenparallelogramm, so können wir dasselbe dadurch erhalten, dass wir die zu dem elliptischen Gebilde (2a) gehörige zweiblättrige und dreifach zusammenhängende Riemann'sche Fläche T, etwa in der in der Nr. 187 (Bd. II, 1, S. 213) für beliebiges p beschriebenen Weise, durch zwei Querschnitte a, b in eine einfach zusammenhängende $\overline{T}$ zerschneiden (vergl. die Fig. 33) und dann $\overline{T}$ auf die Ebene der complexen Variabeln t abbilden. Dann müssen, damit die Integrale von (1a) eindeutige Functionen von t werden, zunächst die Integrale von (1) in der zerschnittenen Riemann'schen Fläche $\overline{T}$ eindeutig sein. Die Bedingungen hierfür lassen sich in algebraische Bedingungen für die Coefficienten $p_1, \cdots p_n$ umsetzen. Man hat nämlich nur die Bedingungen dafür aufzustellen, dass die Integrale von (1) in der Umgebung der einzelnen singulären Stellen dieser Differentialgleichung den Charakter von rationalen Functionen des durch die Gleichung (2a) definirten algebraischen Gebildes (x, s) besitzen, dann sind die Integrale in der Umgebung jeder Stelle von $\overline{T}$ eindeutig, also unverzweigt innerhalb $\overline{T}$, und folglich, da $\overline{T}$ einfach zusammenhängend ist, innerhalb $\overline{T}$ schlechthin eindeutig.

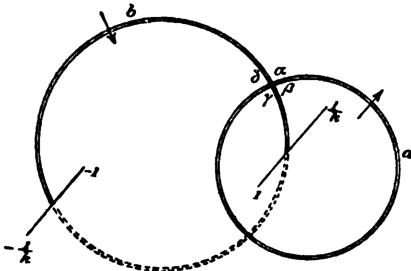


Fig. 33.

Die Integrale von (1) müssen aber überdies so beschaffen sein, dass sie, wenn x einen in der unzerschnittenen Fläche T verlaufenden Weg beschreibt, der t zu seinem Ausgangswerthe zurückführt, ebenfalls ungeändert bleiben. Dies ist eine Bedingung für die Monodromiegruppe der Differentialgleichung (1), die sich wie folgt aussprechen lässt. Sei

$$y_1, \ y_2, \cdots y_n$$

ein Fundamentalsystem von (1), so erfahren diese Integrale, wenn x die Querschnitte a, b im positiven Sinne (vergl. die Pfeile in der Figur 33) überschreitet, beziehungsweise die Substitutionen

$$A = (a_{i\varkappa}), \quad B = (b_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n).$$

Diese beiden Substitutionen mit ihren inversen bilden eine Basis der Monodromiegruppe Θ der Differentialgleichung (1). Das Integral erster Gattung t erleidet, wenn x die Querschnitte a, b im positiven Sinne überschreitet, die Substitutionen

$$t + \Omega, \quad t + \Omega',$$

diese bilden mit ihren inversen eine Basis der doppeltperiodischen Gruppe ϑ. Diejenigen Wege von x in der Fläche T, durch welche t zu seinem Ausgangswerthe zurückgeführt wird, können dann dahin charakterisirt werden, dass ihnen die identische Substitution der Gruppe ϑ entspricht, und die Bedingung für die Monodromiegruppe Θ der Differentialgleichung (1) besagt demnach nichts anderes, als dass die Gruppen ϑ und Θ in dem Sinne isomorph sein müssen, dass jeder Substitution von ϑ eine bestimmte Substitution von Θ entspricht.

Die charakteristische Eigenschaft der Gruppe ϑ besteht nun darin, dass ihre Substitutionen mit einander vertauschbar sind, d. h. dass für die Composition derselben das commutative Gesetz gültig ist. Folglich muss auch die Gruppe Θ so beschaffen sein, dass ihre Substitutionen dem commutativen Gesetze gehorchen. Man sagt von einer Gruppe, die diese Eigenschaft besitzt, sie sei eine Abel'sche Gruppe.

Damit Θ eine Abel'sche Gruppe sei, ist zunächst erforderlich, dass die Substitutionen A, B selbst mit einander vertauschbar seien, d. h. dass

$$AB = BA$$

oder ausführlicher geschrieben

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\varkappa i} b_{ih} = \sum_{i=1}^{n} b_{\varkappa i} a_{ih} \qquad (\varkappa, h = 1, 2, \cdots n)$$

sei. Sind nun zwei Substitutionen B, C mit A vertauschbar, d. h. ist

$$BA = AB, \quad CA = AC,$$

so ist für die aus B, C componirte Substitution

$$BC \cdot A = BAC = A \cdot BC,$$

d. h. auch BC ist mit A vertauschbar. Ferner ist offenbar, wenn B mit A vertauschbar ist, auch B^{-1} mit A^{-1} vertauschbar. Aus diesen beiden Bemerkungen folgt, dass, wenn A mit B vertauschbar ist, auch jede aus

$$A, B, A^{-1}, B^{-1}$$

componirte Substitution mit jeder anderen aus diesen vier Substitutionen componirten Substitution vertauschbar sein muss. Die Vertauschbarkeit von A und B ist also zugleich hinreichend dafür, dass die Gruppe Θ eine Abel'sche sei. D. h. nebst den algebraischen Bedingungen, die die Eindeutigkeit der $y_1, y_2, \cdots y_\varkappa$ in der zerschnittenen Fläche $\bar{T}$ zur Folge haben, ist für die Eindeutigkeit dieser Integrale als Functionen von t nothwendig und hinreichend, dass die beiden Substitutionen A, B mit einander vertauschbar seien.

Diese letztere Bedingung ist aber stets von selbst erfüllt.

Um dies einzusehen, brauchen wir nur den in der zerschnittenen Fläche $\bar{T}$ verlaufenden Weg zu betrachten, der entlang den beiden Ufern der Querschnitte a, b führt. Gehen wir z. B. mit dem Fundamentalsysteme $[y_\varkappa]$ von β aus (vergl. Fig. 33) das linke Ufer von b entlang nach α, so haben wir in α die Integralwerthe $A[y_\varkappa]$, gehen wir weiter von α längs des linken Ufers von a nach δ, so stellt $AB[y_\varkappa]$ daselbst die Integralwerthe dar; von δ weiter längs des rechten Ufers von b nach γ gelangend haben wir in γ $ABA^{-1}[y_\varkappa]$, und wenn wir endlich längs des rechten Ufers von a nach β zurückkehren, so haben wir in β die Integralwerthe $ABA^{-1}B^{-1}[y_\varkappa]$. Da aber auf einem in $\bar{T}$ verlaufenden geschlossenen Wege die $[y_\varkappa]$ zu ihren Ausgangswerthen zurückgeführt werden, ist

$$ABA^{-1}B^{-1} = 1,$$

d. h. in der That

$$AB = BA.$$

Wir haben also den Satz:

Die Bedingungen dafür, dass die Lösungen von (1) beziehungsweise (1a) eindeutige Functionen von t mit der einzigen Unbestimmtheitsstelle $t = \infty$ seien, fallen mit den Bedingungen dafür zusammen, dass diese Integrale in der Umgebung jeder singulären Stelle (x, s) der Differentialgleichung (1) den Charakter rationaler Functionen von x und s besitzen, und sind folglich stets durch algebraische Gleichungen, denen die Coefficienten von (1) zu genügen haben, ausdrückbar.

374. Vertauschbare Substitutionen. Bilineare Form mit contragredienten Variabeln.

Die Eigenschaft der Substitutionen A, B, mit einander vertauschbar zu sein, lässt sich in einer etwas anderen Form darstellen, wenn man die zu der Differentialgleichung (1) adjungirte Differentialgleichung

$$\text{(I)} \qquad \frac{d^n z}{dx^n} - \frac{d^{n-1}(p_1 z)}{dx^{n-1}} + \cdots + (-1)^n p_n z = 0$$

heranzieht. Wir schicken die folgende Hülfsbetrachtung voraus.

Sei

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{i\varkappa} z_i y_\varkappa$$

eine bilineare Form in den beiden Variabelnreihen

$$y_1, y_2, \cdots y_n; \quad z_1, z_2, \cdots z_n.$$

Transformiren wir die $[y_\varkappa]$ durch die Substitution

$$P y_\varkappa = \sum_{i=1}^{n} p_{\varkappa i} y_i \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

die $[z_\varkappa]$ durch die Substitution

$$Q z_\varkappa = \sum_{i=1}^{n} q_{\varkappa i} z_i \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

so lautet die transformirte Form

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{i\varkappa} \sum_{\alpha=1}^{n} q_{i\alpha} z_\alpha \sum_{\beta=1}^{n} p_{\varkappa\beta} y_\beta = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} z_\alpha y_\beta \sum_{i} \sum_{\varkappa} q'_{\alpha i} a_{i\varkappa} p_{\varkappa\beta},$$

wo $q'_{\alpha i} = q_{i\alpha}$ gesetzt wurde. Die Coefficienten der transformirten Form sind also nichts anderes wie die Elemente der Substitution

$$Q' A P,$$

wo

$$Q' = (q'_{\alpha\beta}), \quad A = (a_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots n)$$

gesetzt wurde.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die bilineare Form φ bei Anwendung der Substitutionen P, Q auf die Variabeln $[y_\varkappa]$, $[z_\varkappa]$ ungeändert bleibe, ist also:

$$Q' A P = A.$$

Seien nun die beiden Variabelnreihen $[y_\varkappa]$, $[z_\varkappa]$ contragredient (vergl. Nr. 23, Bd. I, S. 65 ff.), d. h. mögen, wenn die $[y_\varkappa]$ die Substitution P erfahren, die $[z_\varkappa]$ die reciproke Substitution

$$Q = \Pi = (\pi_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots n)$$

erfahren, wo $\pi_{\alpha\beta}$ die zu dem Elemente $p_{\alpha\beta}$ gehörige Subdeterminante der Determinante

$$|p_{\alpha\beta}| \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots n)$$

dividirt durch diese Determinante selbst bedeutet. Setzen wir dann

$$\pi'_{\alpha\beta} = \pi_{\beta\alpha} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots n),$$

so ist (vergl. Nr. 30, Bd. I, S. 95)

$$Q' = (\pi'_{\alpha\beta}) = P^{-1}.$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, \cdots n).$$

Damit also die bilineare Form φ mit den contragredienten Variabelnreihen $[y_\varkappa]$, $[z_\varkappa]$ durch Anwendung der Substitution P in sich selbst übergeht ist erforderlich, dass

$$P^{-1} A P = A$$

sei, d. h. die Substitution P muss mit der aus den Coefficienten der Form φ gebildeten Substitution A vertauschbar sein. Umgekehrt lässt eine Substitution P, die mit A vertauschbar ist, die bilineare Form φ mit contragredienten Variabelnreihen auch stets ungeändert.

Bezeichnen wir nunmehr mit $z_1, z_2, \cdots z_n$ das dem Fundamentalsysteme $y_1, y_2, \cdots y_n$ der Differentialgleichung (1) adjungirte Fundamentalsystem von (I), so sind diese beiden Fundamentalsysteme contragredient; folglich hat die mit den Coefficienten der Substitution A gebildete bilineare Form

$$\varphi = \sum_i \sum_\varkappa a_{i\varkappa} z_i y_\varkappa$$

nach der eben gemachten Bemerkung die Eigenschaft, bei allen Substitutionen der Gruppe Θ ungeändert zu bleiben. Diese Form ist demnach eine in der unzerschnittenen Fläche T eindeutige Function, und folglich, da die Differentialgleichung zur Fuchs'schen Classe gehört, eine rationale Function von x und s.

Betrachten wir nun die lineare Differentialgleichung, der die Producte yz der Lösungen der Differentialgleichungen (1) und (I) Genüge leisten, so ist dieselbe allgemein von der Ordnung n^2; da aber (Nr. 23, Bd. I, S. 62)

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} y_\varkappa z_\varkappa = 0$$

ist, so reducirt sich die Ordnung dieser Differentialgleichung auf $(n^2 - 1)$. Die bilineare Form φ ist eine Lösung der gedachten Differentialgleichung, dieselbe besitzt also ein in x und s rationales Integral, d. h. ein Integral, welches eine eindeutige doppeltperiodische Function von t ist und für alle endlichen Werthe von t den Charakter einer rationalen Function hat.

375. Untersuchung der Fundamentalgleichungen vertauschbarer Substitutionen.

Aus der Vertauschbarkeit der Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}$ können wir eine Reihe wichtiger Folgerungen ziehen, die den analytischen Charakter der Lösungen der Differentialgleichungen (1) anzugeben gestatten.

Wir haben zu dem Ende nur die Erörterungen des dritten Abschnittes (Bd. I) auf die beiden Substitutionen A, B anzuwenden. Betrachten wir etwa die Substitution A und sei

$$L(\omega) = l_\lambda \omega^\lambda + l_{\lambda-1}\omega^{\lambda-1} + \cdots + l_0$$

ein Factor der zu A gehörigen Fundamentalgleichung

$$(3) \qquad F(\omega) = | a_{h\varkappa} - \delta_{h\varkappa}\omega | = 0 \qquad {\scriptstyle (h,\varkappa = 1, 2, \cdots n)}.$$

Bezeichnen wir wie im dritten Abschnitte mit $a_{h\varkappa}^{(i)}$ die Coefficienten der Substitution A^i, dann liefern (Nr. 35, Bd. I, S. 117) die Lösungen des Gleichungssystems

$$(4) \qquad \sum_{h=1}^{n} (l_\lambda a_{h\varkappa}^{(\lambda)} + l_{\lambda-1} a_{h\varkappa}^{(\lambda-1)} + \cdots + l_0 \delta_{h\varkappa})\, \xi_h = 0 \qquad {\scriptstyle (\varkappa = 1, 2, \cdots n)}$$

die Coefficienten derjenigen linearen Combinationen der $y_1, y_2, \cdots y_n$, die der Relation

$$(5) \qquad l_\lambda A^\lambda u + l_{\lambda-1} A^{\lambda-1} u + \cdots + l_0 u = 0$$

Genüge leisten, wo durch $A^\varkappa u$ diejenige Function bezeichnet wurde, in welche sich das Integral u der Differentialgleichung (1) verwandelt, wenn auf die $[y_i]$ die Substitution $A^\varkappa$ angewandt wird.

Sei das Gleichungssystem (4) vom Range $n - \tau$, und bedeute

$$\xi_1^{(\nu)}, \xi_2^{(\nu)}, \cdots \xi_n^{(\nu)} \qquad {\scriptstyle (\nu = 1, 2, \cdots \tau)}$$

ein System linear unabhängiger Lösungen desselben. Bezeichnen wir mit $b_{h\varkappa}^{(\beta)}$ die Coefficienten der Substitution B^β und bilden die Ausdrücke

$$(6)\qquad \sum_{h=1}^{n} b_{h\varkappa}^{(\beta)}\,\xi_h^{(\nu)} \qquad (\beta=1,2,\cdots),$$

so ist zufolge der Vertauschbarkeit von A^α mit B^β

$$\sum_{\varkappa} b_{h\varkappa}^{(\beta)}\,a_{\varkappa i}^{(\alpha)} = \sum_{\varkappa} a_{h\varkappa}^{(\alpha)}\,b_{\varkappa i}^{(\beta)},$$

und folglich

$$\sum_{\varkappa}(l_\lambda a_{\varkappa i}^{(\lambda)} + \cdots + l_0\delta_{\varkappa i})\sum_h b_{h\varkappa}^{(\beta)}\,\xi_h^{(\nu)}$$

$$= \sum_{\varkappa}\sum_h (l_\lambda a_{h\varkappa}^{(\lambda)} b_{\varkappa i}^{(\beta)} + \cdots + l_0\delta_{h\varkappa} b_{\varkappa i}^{(\beta)})\,\xi_h^{(\nu)}$$

$$= \sum_{\varkappa} b_{\varkappa i}^{(\beta)} \sum_h (l_\lambda a_{h\varkappa}^{(\lambda)} + \cdots + l_0\delta_{h\varkappa})\,\xi_h^{(\nu)} = 0,$$

d. h. die **Ausdrücke (6) sind für jeden Werth von β ebenfalls Lösungen des Gleichungssystems (4).**

Wir können folglich ein System von τ^2 Constanten

$$c_{\nu\mu} \qquad (\nu,\mu=1,2,\cdots\tau)$$

so bestimmen, dass insbesondere

$$\sum_{h=1}^{n} b_{h\varkappa}\,\xi_h^{(\nu)} = \sum_{\mu=1}^{\tau} c_{\nu\mu}\,\xi_\varkappa^{(\mu)} \qquad (\nu=1,2,\cdots\tau)$$
$$(\varkappa=1,2,\cdots n)$$

ist; aus diesen Gleichungen ergiebt sich aber sofort

$$(7)\qquad \sum_{h=1}^{n} b_{h\varkappa}^{(\beta)}\,\xi_h^{(\nu)} = \sum_{\mu=1}^{\tau} c_{\nu\mu}^{(\beta)}\,\xi_\varkappa^{(\mu)} \qquad \begin{pmatrix}\nu=1,2,\cdots\tau,\\ \varkappa=1,2,\cdots n,\\ \beta=1,2,\cdots\end{pmatrix},$$

wo $c_{\nu\mu}^{(\beta)}$ die Elemente der Substitution

$$(c_{\nu\mu})^\beta \qquad (\nu,\mu=1,2,\cdots\tau)$$

bedeuten.

Betrachten wir nun die zu der Substitution $(c_{\nu\mu})$ gehörige Fundamentalgleichung

$$|c_{\mu\nu} - \delta_{\mu\nu}\,\omega| = 0 \qquad (\nu,\mu=1,2,\cdots\tau)$$

und denken uns dieselbe nach Potenzen von ω entwickelt:

$$(8)\qquad (-1)^\tau\omega^\tau + \gamma_{\tau-1}\omega^{\tau-1} + \cdots + \gamma_0 = 0,$$

so ist nach Nr. 33 (Bd. I, S. 108)

$$(-1)^\tau c_{\nu\mu}^{(\tau)} + \gamma_{\tau-1}c_{\nu\mu}^{(\tau-1)} + \cdots + \gamma_0\delta_{\nu\mu} = 0 \qquad (\nu,\mu=1,2,\cdots\tau);$$

wir haben folglich gemäss den Gleichungen (7)

$$(9)\qquad \sum_{h=1}^{n} \xi_h^{(\nu)} \{(-1)^\tau b_{h\varkappa}^{(\tau)} + \gamma_{\tau-1} b_{h\varkappa}^{(\tau-1)} + \cdots + \gamma_0 \delta_{h\varkappa}\} = 0 \qquad \begin{pmatrix}\nu=1,2,\cdots\tau,\\ \varkappa=1,2,\cdots n\end{pmatrix}.$$

Nach dem Satze der Nr. 33 (Bd. I, S. 111) schliessen wir hieraus, dass die Gleichung (8) mit der zu der Substitution B gehörigen Fundamentalgleichung

$$(10)\qquad |b_{h\varkappa} - \omega\delta_{h\varkappa}| = 0 \qquad (h,\varkappa=1,2,\cdots n)$$

gewisse Wurzeln gemein haben müsse; bedeute

$$(11)\qquad c_\varrho \omega^\varrho + c_{\varrho-1}\omega^{\varrho-1} + \cdots + c_0 \qquad (0<\varrho\leq\tau)$$

den grössten gemeinsamen Theiler der linken Seiten der Gleichungen (8) und (10), dann ist nach dem Satze der Nr. 35 (Bd. I, S. 115, 116) das Gleichungssystem

$$(12)\qquad \sum_{h=1}^{n} (c_\varrho b_{h\varkappa}^{(\varrho)} + c_{\varrho-1} b_{h\varkappa}^{(\varrho-1)} + \cdots + c_0\delta_{h\varkappa})\xi_h = 0 \qquad (\varkappa=1,2,\cdots n)$$

mit dem Gleichungssysteme

$$\sum_{h=1}^{n} \{(-1)^\tau b_{h\varkappa}^{(\tau)} + \gamma_{\tau-1} b_{h\varkappa}^{(\tau-1)} + \cdots + \gamma_0\delta_{h\varkappa}\}\xi_h = 0 \qquad (\varkappa=1,2,\cdots n)$$

aequivalent. Das letztere Gleichungssystem ist aber, da es nach (9) die linear unabhängigen Lösungssysteme

$$(13)\qquad \xi_1^{(\nu)},\ \xi_2^{(\nu)},\ \cdots\ \xi_n^{(\nu)} \qquad (\nu=1,2,\cdots\tau)$$

besitzt, höchstens vom Range $n-\tau$, folglich ist auch das Gleichungssystem (12) höchstens vom Range $n-\tau$ und wird durch die Systeme (13) befriedigt. Wir haben demnach den allgemeinen Satz:

Sind A, B irgend zwei mit einander vertauschbare Substitutionen und bedeuten

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \xi_\varkappa^{(\nu)} y_\varkappa \qquad (\nu=1,2,\cdots\tau)$$

diejenigen linear unabhängigen linearen homogenen Functionen der $[y_\varkappa]$, die der Relation (5)

$$l_\lambda A^\lambda u + l_{\lambda-1}A^{\lambda-1}u + \cdots + l_0 u = 0$$

Genüge leisten, so befriedigen dieselben Ausdrücke auch die Relation

$$(14)\qquad c_\varrho B^\varrho u + c_{\varrho-1}B^{\varrho-1}u + \cdots + c_0 u = 0 \qquad (0<\varrho<\tau).$$

376. **Der Satz von Picard. Anzahl der Integrale, die doppeltperiodische Functionen zweiter Art sind.**

Sei nun insbesondere ω_α' eine Wurzel der zu B gehörigen Fundamentalgleichung (10), für welche der Theiler (11) der linken Seite dieser Gleichung verschwindet, dann ist also ω_α' auch eine Lösung der Gleichung (8). Die Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{\tau}(c_{\nu\mu} - \delta_{\nu\mu}\omega_\alpha')\eta_\nu = 0 \qquad (\mu=1,2,\cdots\tau)$$

sind demnach auflösbar; sei

$$\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_\tau$$

irgend ein Lösungssystem derselben. Da nach (7)

$$\sum_{\nu=1}^{\tau}\eta_\nu\sum_{h=1}^{n}b_{h\varkappa}\xi_h^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{\tau}\eta_\nu\sum_{\mu=1}^{\tau}c_{\nu\mu}\xi_\varkappa^{(\mu)}$$

und offenbar auch

$$\sum_{\nu=1}^{\tau}\eta_\nu\sum_{h=1}^{n}\delta_{h\varkappa}\xi_h^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{\tau}\eta_\nu\sum_{\mu=1}^{\tau}\delta_{\nu\mu}\xi_\varkappa^{(\mu)}$$

ist, so ergiebt sich

$$\sum_{h=1}^{n}(b_{h\varkappa} - \omega_\alpha'\delta_{h\varkappa})\sum_{\nu=1}^{\tau}\eta_\nu\xi_h^{(\nu)} = \sum_{\mu=1}^{\tau}\xi_\varkappa^{(\mu)}\sum_{\nu=1}^{\tau}(c_{\nu\mu} - \delta_{\nu\mu}\omega_\alpha')\eta_\nu = 0,$$

d. h. die Ausdrücke

$$\sum_{\nu=1}^{\tau}\eta_\nu\xi_h^{(\nu)} \qquad (h=1,2,\cdots n)$$

bilden ein simultanes Lösungssystem der Gleichungen (4) und der Gleichungen

$$\sum_{h=1}^{n}(b_{h\varkappa} - \omega_\alpha'\delta_{h\varkappa})\xi_h = 0 \qquad (\varkappa=1,2,\cdots n).$$

Das Integral

$$\text{(15)} \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n}y_\varkappa\sum_{\nu=1}^{\tau}\eta_\nu\xi_\varkappa^{(\nu)}$$

der Differentialgleichung (1) multiplicirt sich also mit der Constanten ω_α', wenn die $[y_\varkappa]$ die Substitution B erfahren.

Nehmen wir nunmehr $\lambda = 1$, d. h. betrachten wir den zu einer Wurzel ω_α der Fundamentalgleichung von A gehörigen linearen Factor

$$L(\omega) = \omega - \omega_\alpha,$$

so haben die Integrale

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \xi_\varkappa^{(\nu)} y_\varkappa \qquad (\nu = 1, 2, \cdots \tau)$$

die Eigenschaft, sich mit der Constanten ω_α zu multipliciren, wenn die $[y_\varkappa]$ die Substitution A erfahren. Das Integral (15) multiplicirt sich also, sowohl wenn die Substitution A als auch wenn die Substitution B auf die $[y_\varkappa]$ angewandt wird, mit einer Constanten, und hieraus folgt, dass es bei Anwendung irgend einer Substitution der Gruppe Θ auf die $[y_\varkappa]$ in sich selbst multiplicirt mit einer Constanten übergeht. Die logarithmische Ableitung dieses Integrales ist demnach in der ganzen Fläche T eindeutig, und zwar, da die Differentialgleichung (1) der Fuchs'schen Classe angehört, eine rationale Function von (x, s), d. h. eine eindeutige doppeltperiodische Function von t, die nur für $t = \infty$ unbestimmt wird. Das Integral (15) selbst besitzt als Function von t die Eigenschaft, für alle endlichen Werthe von t das Verhalten einer rationalen Function zu zeigen und sich bei Vermehrung von t um die Perioden Ω, Ω' mit den constanten Factoren ω_α, ω_α' zu multipliciren. Eine so beschaffene Function von t bezeichnet man nach Herrn Hermite als eine doppeltperiodische Function zweiter Art mit den Perioden Ω, Ω' und den Multiplicatoren ω_α, ω_α'. Wir können somit den folgenden von Herrn Picard herrührenden Satz aussprechen:

Wenn die Integrale der zur Fuchs'schen Classe gehörigen Differentialgleichung (1) eindeutige Functionen von t sind, so giebt es mindestens ein Integral, welches eine doppeltperiodische Function zweiter Art von t ist.

Die Entwicklung, die uns zu diesem Ergebnisse geführt hat, lehrt, dass es unter Umständen auch mehr wie ein Integral der Differentialgleichung (1) geben kann, welches eine doppeltperiodische Function zweiter Art von t ist, und liefert uns zugleich eine obere und eine untere Grenze, sowie eine Anzahl von Sätzen für die Anzahl N der so beschaffenen linearunabhängigen Integrale. In der That, seien

$$\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_\nu$$

die von einander verschiedenen Wurzeln der zu A gehörigen,

$$\omega_1', \omega_2', \cdots \omega_\mu'$$

die von einander verschiedenen Wurzeln der zu B gehörigen Fundamentalgleichung, dann folgt zunächst, dass die Anzahl N **nicht** kleiner sein kann als die grösste der beiden Zahlen ν, μ.

Sei $n - \tau_{\alpha 1}$ der Rang des Systems

$$(a_{h\varkappa} - \delta_{h\varkappa}\omega_\alpha) \qquad {\scriptstyle (\alpha = 1, 2, \cdots \nu)} \atop {\scriptstyle (h, \varkappa = 1, 2, \cdots n)}$$

und $n - \tau'_{\alpha 1}$ der Rang des Systems

$$(b_{h\varkappa} - \delta_{h\varkappa}\omega'_\alpha) \qquad {\scriptstyle (\alpha = 1, 2, \cdots \mu),} \atop {\scriptstyle (h, \varkappa = 1, 2, \cdots n)}$$

setzen wir ferner

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} \tau_{\alpha 1} = M, \qquad \sum_{\alpha=1}^{\nu} \tau'_{\alpha 1} = M',$$

so kann die Anzahl N nicht grösser sein, wie die kleinere der Zahlen M, M'. Ist insbesondere eine der Zahlen M, M' gleich n, so ist N gleich der anderen.

Ebenso unmittelbar ergiebt sich die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $N = n$ sei, d. h. dass ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (1) existirt, dessen Elemente doppeltperiodische Functionen zweiter Art sind. Damit das eintritt, muss nämlich jede der Zahlen $\tau_{\alpha 1}$, $\tau'_{\alpha 1}$ gleich derjenigen Zahl sein, die die Vielfachheit der betreffenden Wurzel ω_α, ω_α' angiebt. Sind also z. B. die sämmtlichen Wurzeln der Fundamentalgleichungen der Substitutionen A, B von einander verschieden, so ist diese Bedingung jedenfalls erfüllt. Da dies so zu sagen der „allgemeine Fall“ ist, so besitzt also die Differentialgleichung (1), wenn ihre Integrale eindeutig in t sind, „im Allgemeinen“ n linearunabhängige doppeltperiodische Functionen zweiter Art von t zu Integralen.

377. Die Integralgruppen. Simultane Differenzengleichungen.

Wenn die Anzahl N derjenigen Integrale, die doppeltperiodische Functionen zweiter Art von t sind, kleiner ist wie n, so hat man, um ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (1) zu erhalten, noch $n - N$ Integrale aufzustellen; es liegt nahe, dieselben z. B. unter den Elementen des zu der Substitution A gehörigen canonischen Fundamentalsystems zu wählen. Dabei liefert uns der am Schlusse der Nr. 375 (S. 413) aufgestellte Satz das folgende bemerkenswerthe Ergebniss.

Denken wir uns das zu der Substitution A gehörige canonische Fundamentalsystem z. B. in der Weise hergestellt, dass wir für den

Theiler $L(\omega)$ der zu A gehörigen Fundamentalgleichung der Reihe nach

$$(\omega - \omega_\alpha)^{\lambda_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots \nu)$$

setzen, wo λ_α den Grad der Vielfachheit der Wurzel ω_α angiebt, so befriedigen die so gewonnenen Integrale auch Relationen von der Form (14), und wir können folglich lineare Combinationen derselben so einrichten, dass diese in gewissem Sinne auch Elemente des zu B gehörigen canonischen Fundamentalsystems sind.

D. h. wir können ein Fundamentalsystem herstellen, welches in Gruppen zerfällt; jede solche Gruppe gehört zu einem Wurzelpaare der den Substitutionen A, B entsprechenden Fundamentalgleichungen, und die Elemente einer Gruppe verwandeln sich sowohl bei Anwendung der Substitution A als auch bei Anwendung der Substitution B auf die $[y_\varkappa]$ nur in lineare homogene Functionen ihrer selbst, so zwar, dass, wenn

$$v_1, v_2, \cdots v_\varrho$$

eine solche Gruppe bilden, die zu der Wurzel ω_α der Fundamentalgleichung von A und zu der Wurzel ω_α' der Fundamentalgleichung von B gehört,

$$\left.\begin{aligned} Av_\varkappa &= \alpha_{\varkappa 1} v_1 + \alpha_{\varkappa 2} v_2 + \cdots + \alpha_{\varkappa\varkappa} v_\varkappa \\ Bv_\varkappa &= \beta_{\varkappa 1} v_1 + \beta_{\varkappa 2} v_2 + \cdots + \beta_{\varkappa\varkappa} v_\varkappa \end{aligned}\right\} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \varrho)$$

wird, wo

$$(16) \qquad \begin{cases} \alpha_{11} = \alpha_{22} = \cdots = \alpha_{\varrho\varrho} = \omega_\alpha \\ \beta_{11} = \beta_{22} = \cdots = \beta_{\varrho\varrho} = \omega_\alpha' \end{cases}$$

ist. Ueberdies bestehen zwischen den $\alpha_{\varkappa i}, \beta_{\varkappa i}$ zufolge der Vertauschbarkeit der Substitutionen A, B die Beziehungen

$$\sum_{i=1}^{\varrho} \alpha_{\varkappa i} \beta_{ih} = \sum_{i=1}^{\varrho} \beta_{\varkappa i} \alpha_{ih}$$

oder, mit Rücksicht auf (16), und da für $i > \varkappa$

$$\alpha_{\varkappa i} = 0, \quad \beta_{\varkappa i} = 0$$

sind,

$$(17) \qquad \sum_{i=h+1}^{\varrho-1} \alpha_{\varkappa i} \beta_{ih} = \sum_{i=h+1}^{\varrho-1} \beta_{\varkappa i} \alpha_{ih} \qquad \begin{pmatrix} \varkappa = 3, 4, \cdots \varrho, \\ h = 1, 2, \cdots \varkappa - 2 \end{pmatrix}.$$

Das erste Element v_1 einer solchen Gruppe ist als Function von t betrachtet eine doppeltperiodische Function zweiter Art mit den Mul-

tiplicatoren α_{11}, β_{11}. Um die analytische Beschaffenheit der übrigen Elemente $v_2, \cdots v_\varrho$ feststellen zu können, schicken wir die folgenden Bemerkungen voraus.

Wir bilden mit Hülfe des in der Nr. 352 (S. 337) betrachteten Integrales zweiter Gattung

$$E(t) = \int_0^x \frac{\varkappa^2 x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}},$$

dessen Perioden wir durch

$$\eta = 4E, \quad \eta' = 2E'i$$

bezeichnen, die Ausdrücke

$$(18)\qquad \begin{cases} Z_1(t) = \dfrac{\Omega}{4\pi i}\left\{E(t) - \dfrac{\eta t}{\Omega}\right\}, \\ Z_2(t) = -\dfrac{\Omega'}{4\pi i}\left\{E(t) - \dfrac{\eta' t}{\Omega'}\right\}, \end{cases}$$

dann ist, wie man mit Rücksicht auf die Legendre'sche Relation

$$\Omega\eta' - \Omega'\eta = 4\pi i$$

sofort übersieht,

$$AZ_1 = Z_1(t+\Omega) = Z_1(t),$$
$$BZ_1 = Z_1(t+\Omega') = Z_1(t) + 1,$$
$$AZ_2 = Z_2(t+\Omega) = Z_2(t) + 1,$$
$$BZ_2 = Z_2(t+\Omega') = Z_2(t).$$

Setzen wir nun (vergl. Nr. 38, Bd. I, S. 130)

$$Z_1^{(\varkappa)} = Z_1(Z_1 - 1)\cdots(Z_1 - \varkappa + 1),$$
$$Z_2^{(\varkappa)} = Z_2(Z_2 - 1)\cdots(Z_2 - \varkappa + 1)$$

und bezeichnen (wie a. a. O.) für eine Function V von t die Ausdrücke

$$AV - V = V(t+\Omega) - V(t),$$
$$BV - V = V(t+\Omega') - V(t)$$

kurz durch

$$(A-1)\,V \text{ beziehungsweise } (B-1)\,V,$$

so ist offenbar

$$(A-1)\,Z_1^{(\varkappa)} = 0, \qquad (B-1)\,Z_1^{(\varkappa)} = \varkappa Z_1^{(\varkappa-1)},$$
$$(A-1)\,Z_2^{(\varkappa)} = \varkappa Z_2^{(\varkappa-1)}, \; (B-1)\,Z_2^{(\varkappa)} = 0.$$

Betrachten wir nun einen Ausdruck von der Form

$$F(Z_1, Z_2) = \varphi_{11} Z_1 + \varphi_{12} Z_2 + \varphi_{21} Z_1^{(2)} + \varphi_{22} Z_1 Z_2 + \varphi_{23} Z_2^{(2)} + \cdots$$
$$+ \varphi_{\varkappa 1} Z_1^{(\varkappa)} + \varphi_{\varkappa 2} Z_1^{(\varkappa - 1)} Z_2 + \cdots + \varphi_{\varkappa, \varkappa+1} Z_2^{(\varkappa)},$$

wo die $\varphi_{i\varkappa}$ Functionen von t bedeuten, die bei Vermehrung von t um Ω, Ω', d. h. wie wir sagen wollen, bei Anwendung der Operationen A, B ungeändert bleiben, und nennen denselben kurz einen **Ausdruck $\varkappa$-ten Grades** in den Z_1, Z_2, so wird

$$(A - 1) F(Z_1, Z_2) = F_2(Z_1, Z_2)$$

aus $F(Z_1, Z_2)$ nach derselben Regel gebildet, wie der partielle Differentialquotient von $F(Z_1, Z_2)$ nach Z_2 zu bilden wäre, wenn an Stelle von $Z_1^{(\lambda)}$, $Z_2^{(\lambda)}$ die Potenzen Z_1^{λ}, Z_2^{λ} stünden, und ebenso entspricht die Bildungsweise von

$$(B - 1) F(Z_1, Z_2) = F_1(Z_1, Z_2)$$

der Bildung des partiellen Differentialquotienten nach Z_1.

Die $F_1(Z_1, Z_2)$, $F_2(Z_1, Z_2)$ sind demnach Ausdrücke $(\varkappa - 1)$-ten Grades in den Z_1, Z_2, aber nicht beliebige Ausdrücke dieses Grades, denn es stimmen gewisse Coefficienten in den $F_1(Z_1, Z_2)$, $F_2(Z_1, Z_2)$ mit einander überein; dieser specielle Charakter lässt sich am einfachsten durch die Gleichung

$$(A - 1) F_1(Z_1, Z_2) = (B - 1) F_2(Z_1, Z_2)$$

darstellen.

Hat man umgekehrt zwei Ausdrücke $(\varkappa - 1)$-ten Grades

$$G_1(Z_1, Z_2), \quad G_2(Z_1, Z_2)$$

in den Z_1, Z_2, und ist für dieselben die Gleichung

$$(A - 1) G_1(Z_1, Z_2) = (B - 1) G_2(Z_1, Z_2),$$

die wir als **Integrabilitätsbedingung** (vom Standpunkte der Differenzenrechnung aus) bezeichnen können, erfüllt, so lassen die beiden simultanen Differenzengleichungen

$$(A - 1) G(Z_1, Z_2) = G_2(Z_1, Z_2),$$
$$(B - 1) G(Z_1, Z_2) = G_1(Z_1, Z_2)$$

eine Auflösung zu, und $G(Z_1, Z_2)$ ergiebt sich als Ausdruck $\varkappa$-ten Grades in den Z_1, Z_2, der, wenn man $Z_1^{(\lambda)}$, $Z_2^{(\lambda)}$ durch Z_1^{λ}, Z_2^{λ} ersetzt, zu partiellen Ableitungen nach Z_1, Z_2 die Ausdrücke besitzt, die aus

$G_1(Z_1, Z_2)$, $G_2(Z_1, Z_2)$ durch dieselbe Vertauschung hervorgehen, und der noch eine additive willkürliche Function enthält, die ebenso wie die Coefficienten der G_1, G_2 bei den Operationen A, B ungeändert bleibt.

378. Der analytische Charakter der Integrale einer Gruppe. Verallgemeinerung des Problems.

Betrachten wir nun das zweite Integral v_2 unserer Integralgruppe

$$v_1, v_2, \dots v_\varrho,$$

so haben wir, da

$$Av_1 = \omega_\alpha v_1, \quad Bv_1 = \omega_\alpha' v_1$$

ist, für den Quotienten von v_2 durch v_1 die Gleichungen

$$(A-1)\frac{v_2}{v_1} = \frac{\alpha_{21}}{\omega_\alpha}, \quad (B-1)\frac{v_2}{v_1} = \frac{\beta_{21}}{\omega_\alpha'};$$

wir erhalten demnach als Lösungen dieser simultanen Differenzengleichungen

$$\frac{v_2}{v_1} = \varphi_2(x, s) + \frac{\alpha_{21}}{\omega_\alpha} Z_2 + \frac{\beta_{21}}{\omega_\alpha'} Z_1, \tag{19}$$

wo $\varphi_2(x, s)$ eine bei den Operationen A, B unveränderliche Function, also eine rationale Function von (x, s) bedeutet.

Für das dritte Integral v_3 der Gruppe ist

$$\begin{cases} (A-1)\dfrac{v_3}{v_1} = \dfrac{\alpha_{31}}{\omega_\alpha} + \dfrac{\alpha_{32}}{\omega_\alpha}\dfrac{v_2}{v_1}, \\ (B-1)\dfrac{v_3}{v_1} = \dfrac{\beta_{31}}{\omega_\alpha'} + \dfrac{\beta_{32}}{\omega_\alpha'}\dfrac{v_2}{v_1}, \end{cases} \tag{20}$$

und vermöge der Gleichungen (17) besteht die Relation

$$\alpha_{32}\beta_{21} = \beta_{32}\alpha_{21}. \tag{21}$$

Setzen wir in (20) für $\frac{v_2}{v_1}$ den gefundenen Werth (19) ein, so ergeben sich die beiden simultanen Differenzengleichungen

$$(A-1)\frac{v_3}{v_1} = \frac{\alpha_{31}}{\omega_\alpha} + \frac{\alpha_{32}}{\omega_\alpha}\varphi_2(x, s) + \frac{\alpha_{32}\beta_{21}}{\omega_\alpha\omega_\alpha'} Z_1 + \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{\omega_\alpha^2} Z_2,$$

$$(B-1)\frac{v_3}{v_1} = \frac{\beta_{31}}{\omega_\alpha'} + \frac{\beta_{32}}{\omega_\alpha'}\varphi_2(x, s) + \frac{\beta_{32}\beta_{21}}{\omega_\alpha'^2} Z_1 + \frac{\beta_{32}\alpha_{21}}{\omega_\alpha\omega_\alpha'} Z_2,$$

für welche vermöge der Relation (21) die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist.

Wir finden demnach für $\frac{v_3}{v_1}$ den Ausdruck:

$$\frac{v_3}{v_1} = \varphi_3(x, s) + \frac{\beta_{31} + \beta_{32}\varphi_2(x, s)}{\omega_\alpha'} Z_1 + \frac{\alpha_{31} + \alpha_{32}\varphi_2(x, s)}{\omega_\alpha} Z_2$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\beta_{32}\beta_{21}}{\omega_\alpha'^2} Z_1^{(2)} + \frac{\beta_{23}\alpha_{21}}{\omega_\alpha \omega_\alpha'} Z_1 Z_2 + \frac{1}{2}\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{\omega_\alpha^2} Z_2^{(2)},$$

wo auch $\varphi_3(x, s)$ eine rationale Function von (x, s) bedeutet.

In derselben Weise weiter schliessend ergiebt sich schliesslich für $\frac{v_\varrho}{v_1}$ die Darstellung

$$\frac{v_\varrho}{v_1} = F_{\varrho-1}(Z_1, Z_2),$$

wo $F_{\varrho-1}$ eine ganze Function vom höchstens $(\varrho - 1)$-ten Grade in den Z_1, Z_2 mit in (x, s) rationalen Coefficienten bedeutet. Damit ist also der analytische Charakter der Integrale von (1) vollständig festgelegt. Wir fassen das Ergebniss der Untersuchung in den folgenden Satz zusammen:

Wenn das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1), deren Coefficienten rationale Functionen von x und

$$s = \sqrt{(1 - x^2)(1 - \varkappa^2 x^2)}$$

sind, eine eindeutige Function des Integrales erster Gattung t ist, die für keinen endlichen Werth von t unbestimmt wird, so kann man ein Fundamentalsystem von Integralen angeben, welches in Gruppen von der folgenden Beschaffenheit zerfällt. Das erste Element jeder Gruppe ist eine doppeltperiodische Function zweiter Art von t, die übrigen Elemente einer aus ϱ Integralen bestehenden Gruppe sind ganze rationale Functionen von den Graden $1, 2, \cdots \varrho - 1$ der Functionen $Z_1(t)$, $Z_2(t)$, deren Coefficienten, abgesehen von dem ersten Elemente der Gruppe als Factor, rationale Functionen von (s, x) sind. Die zwischen diesen Coefficienten bestehenden identischen Beziehungen ergeben sich unmittelbar aus der Methode der Herleitung.

Die Methode, die wir hier für den Fall auseinandergesetzt haben, wo der Rang der Gleichung (2) (Nr. 372, S. 403) gleich Eins ist, lässt sich auch, wenn dieser Rang eine beliebige Zahl p ist, bei der Unter-

suchung der Frage anwenden, wann die Integrale der Differentialgleichung (1) in der durch $2p$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche zerschnittenen Riemann'schen Fläche der Gleichung (2) eindeutig sind, und die Monodromiegruppe Θ dieser Differentialgleichung aus lauter mit einander vertauschbaren Substitutionen besteht. Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, so erscheinen die Lösungen von (1) als eindeutige Functionen derjenigen Integralsummen, die bei dem zu der Gleichung (2) gehörigen Jacobi'schen Umkehrprobleme auftreten. Wir versagen es uns, auf eine ausführliche Discussion des hiermit formulirten Problems einzugehen, welches wohl als die naturgemässe Verallgemeinerung des für $p = 1$ behandelten angesehen werden darf, wir wollen vielmehr die für $p = 1$ gefundenen Ergebnisse noch in dem besonderen Falle kurz betrachten, wo die Ordnung der Differentialgleichung $n = 2$ ist.

379. Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Lamé'sche Differentialgleichung.

Wenn die Differentialgleichung

$$\text{(II)} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + p_1(x, s)\frac{dy}{dx} + p_2(x, s)\, y = 0, \quad s = \sqrt{(1 - x^2)(1 - \varkappa^2 x^2)},$$

als allgemeines Integral eine eindeutige Function von t ohne Unbestimmtheitsstelle im Endlichen besitzt, so existirt ein Fundamentalsystem von der Form:

$$v_1 = \varphi_1(x, s),$$
$$v_2 = \varphi_2(x, s) + \varphi_1(x, s)(\alpha Z_1 + \beta Z_2),$$

wo α, β Constanten, $\varphi_1(x, s)$, $\varphi_2(x, s)$ doppeltperiodische Functionen zweiter Art von t, oder was dasselbe besagt, Functionen, deren logarithmische Ableitungen nach x rational in (x, s) sind, bedeuten, und wo, wenn von den Constanten α, β wenigstens die eine einen von Null verschiedenen Werth hat, der Quotient

$$\frac{\varphi_2(x, s)}{\varphi_1(x, s)}$$

eine rationale Function von x und s ist.

Da die Differentialgleichung (II) ein Integral mit rationaler logarithmischer Ableitung besitzt, so muss sie die in der Nr. 302 (S. 161) angegebene Form haben.

Wenn z. B. die Coefficienten von (II) rationale Functionen von x allein sind, so lassen sich die Bedingungen dafür, dass die Integrale eindeutige Functionen von t ohne Unbestimmtheitsstelle im Endlichen sind, leicht explicite angeben. Die Differentialgleichung muss der Fuchs'schen Classe angehören, kann also (Bd. I, Nr. 70, S. 249) in der Form

$$\psi(x)\frac{d^2y}{dx^2} + F_{\sigma-1}(x)\frac{dy}{dx} + F_{\sigma-2}(x)y = 0$$

vorausgesetzt werden, wo

$$\psi(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_\sigma)$$

lauter verschiedene lineare Factoren enthält und $F_{\sigma-1}$, $F_{\sigma-2}$ ganze Functionen vom Grade $\sigma - 1$ beziehungsweise $\sigma - 2$ in x sind. Die determinirenden Fundamentalgleichungen, die zu den singulären Punkten

$$a_1, a_2, \cdots a_\sigma$$

gehören, besitzen als eine Wurzel die Null, die andere Wurzel muss eine ganze Zahl sein, wenn das betreffende $a_\varkappa$ keine Wurzel der Gleichung

$$(1 - x^2)(1 - \varkappa^2 x^2) = 0$$

ist, sie kann gleich der Hälfte einer ganzen Zahl sein für einen singulären Punkt, der mit einem der vier Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche T zusammenfällt. Für $x = \infty$ müssen die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen ganze Zahlen sein; das Auftreten von Logarithmen ist für alle singulären Punkte auszuschliessen.

Betrachten wir den in der Litteratur vielfach behandelten Fall der sogenannten Lamé'schen Differentialgleichung

$$\text{(III)} \qquad R(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2}R'(x)\frac{dy}{dx} - (n(n+1)\varkappa^2x^2 + h)y = 0,$$

wo

$$R(x) = (1 - x^2)(1 - \varkappa^2x^2), \qquad R'(x) = \frac{dR(x)}{dx}$$

ist und n, h Constanten bedeuten, so besitzen die zu den singulären Punkten

$$+1, \ -1, \ +\frac{1}{\varkappa}, \ -\frac{1}{\varkappa}$$

gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen die Wurzeln

$$0, \ \frac{1}{2},$$

während die Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung gleich $-n$ und $n + 1$ sind. Damit die Integrale

von (III) eindeutige Functionen von t seien, ist also nothwendig und hinreichend, dass n eine ganze Zahl sei, und dass die Entwickelungen der Integrale in der Umgebung von $x = \infty$ keine Logarithmen enthalten. Die letztere Bedingung ist aber immer von selbst erfüllt.

Führt man t als unabhängige Variable ein, so nimmt die Differentialgleichung die Gestalt an

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = (n(n+1)\varkappa^2 \operatorname{sn}^2 t + h)\, y.$$

Die vollständige Integration dieser für die mathematische Physik äusserst wichtigen Gleichung kann mit Hülfe der Transcendenten der Theorie der elliptischen Functionen geleistet werden; wir verweisen in Bezug hierauf auf Herrn Hermite's Meisterwerk „Sur quelques applications des fonctions elliptiques“.



Zusätze und Berichtigungen.

Zu Band I.

S. XVIII bei Nr. 111 lies Transformirten statt Transformation.

„ 29 muss Gleichung (4) lauten:

$$p_0 : p_1 : \cdots : p_n = \varDelta(x) : - \varDelta_1(x) : \cdots : (-1)^n \varDelta_n(x).$$

„ 30 muss die Gleichung Zeile 8 v. o. lauten:

$$p_1 = - \frac{d \log \varDelta(x)}{dx}.$$

„ 37 Gleichung (3) lies $(\varkappa = 1, 2, \cdots n)$ statt $(\varkappa = 0, 1, \cdots n)$.

„ 75 in Formel (38) und Zeile 3 v. o. lies p_{m-1} statt p_m.

„ 97 in Formel (9) rechts vom Gleichheitszeichen lies y_h statt $y_\varkappa$.

„ 193 Zeile 15 v. o. lies u_1 statt u_0; das Gleichungssystem Zeile 19 ff. v. o. muss lauten:

$$\begin{aligned} \Theta u_1 &= \omega_0 u_1 \\ \Theta u_2 &= \alpha_{10} u_1 + \omega_0 u_2 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \Theta u_i &= \alpha_{i0} u_1 + \alpha_{i1} u_2 + \cdots + \omega_0 u_i . \end{aligned}$$

Zu Band II, 1.

„ X bei Nr. 180 Zeile 18 v. o. lies zweiter statt gerader Ordnung.

„ XI bei Nr. 193 Zeile 5 v. u. lies 1885 statt 1889.

„ 35 Zeile 10 v. o. lies r statt n.

„ 68 Zeile 14 v. o. lies Theilgebilde statt Theilgebiete.

„ 80 Zeile 11 v. o. und 1 v. u. lies Transformationsgruppe statt Gruppe.

„ 112 Zeile 11, 10 v. u. sollen lauten: „Fundamentalsubstitutionen $L_1, L_2, \cdots L_s$ und der Substitution L_{s+1}, die einem Umlaufe um alle $a_1, a_2, \cdots a_s$ entspricht, die Beziehung

(2) $$L_1 L_2 \cdots L_s L_{s+1} = 1.$$

S. 128 Zeile 11—9 v. u.; vergl. hierzu eine Bemerkung: Igel, Monatshefte für Mathem. u. Physik, Jahrgang IX, S. 47.

„ 141 Zeile 14 v. o. lies v_{1x} statt v_{ix}.

„ 150 Zeile 9 v. o. lies ($\mathfrak{A}$) statt (A).

„ 179 am Kopfe lies 179 statt 180.

„ 184 Zeile 3 v. o. im Nenner von $\Delta\binom{\eta}{x}$ lies $\eta'(x)^2$ statt $\eta'(x)^3$;

ebenda Zeile 4 v. o. im Nenner von $\Delta\binom{\zeta}{x}$ lies $\zeta'(x)^2$ statt $\zeta'(x)^3$

„ 187 Zeile 15, 16 v. o. lies den Exponenten statt jene Potenz.

„ 243 Zeile 8 v. u. lies $x_{\nu-1}$ statt x_n.

„ 328 Zeile 14 v. o. lies v_0' statt v_0.

„ 336 Zeile 15 v. u. lies c statt c_0.

„ 338 Zeile 9 v. u. im Nenner von $\Delta\binom{\eta}{z}$ lies $\left(\frac{d\eta}{dz}\right)^2$ statt $\left(\frac{d\eta}{dz}\right)^3$.

„ 363 Zeile 8. v. o. rechts vom Gleichheitszeichen lies $-\frac{3}{4}p_2$ statt $3p_2$.

„ 365 Zeile 5 v. o. lies (S. 108) statt (S. 156).

„ 487 Zeile 17 v. o. muss die Definition von J, J' lauten:

$$J = \frac{1}{2}\int_z^0 \frac{x\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-z)}}, \qquad J' = \frac{1}{2}\int_z^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}.$$

Es ist nämlich nach S. 477, Bd. II, 1, Gl. (1)

$$u_1 = 8\int_z^0 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}},$$

also, da (ebendort S. 482) $u_1 = 8\,iK$ ist, so haben wir

$$K = \frac{1}{2}\int_z^0 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-z)}}$$

und ferner

$$K' = \frac{1}{2}\int_z^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}.$$

S. 532 Zeile 14 v. o. rechts vom Gleichheitszeichen lies

$$\Gamma(\varrho)(e^{2\pi i\varrho} - 1) \text{ statt } \Gamma(\varrho).$$

Zu Band II, 2.

S. 180 Zeile 6 v. o. lies M_ν statt M.

„ 184 Zeile 9 v. u. lies „von dem Punkte" statt „von den Punkten".

„ 187 Formel (30) lies

$$\frac{Ke^{-n(m-1)r}}{1-e^{(m-1)r}},$$

statt

$$\frac{Ke^{n(m-1)r}}{1-e^{(m-1)r}}.$$

S. 190 letzte Zeile lies Aggregat statt Agreggat.

„ 205 Zeile 14 v. u. lies $2\pi\sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1}\frac{1}{g_\varkappa}$ statt $2\pi\sum_{\varkappa=1}^{\sigma+1}\frac{1}{g_{\sigma+1}}$.

Zum Litteraturnachweis.

Zu Nr. 9 Günther (bei Hamburger) Crelle's Journal Bd. 118, S. 351 ff.; (bei Gutzmer) ebenda Bd. 119, S. 82 ff; Fuchs ebenda Bd. 118, S. 354.

„ „ 22 Hirsch, Dissertation (Königsberg i. Pr. 1892) S. 20, 21; Vessiot, Thèses, S. 56, 57.

„ „ 47, 48 Kneser, Mathem. Annalen Bd. 47, S. 408 ff.

„ „ 97, 98 Günther, Crelle's Journal Bd. 119, S. 330 ff.

„ „ 117 Kneser, Crelle's Journal Bd. 116, S. 178 ff.; Bd. 117, S. 72 ff.;
Horn, ebenda Bd. 118, S. 257 ff.; Mathem. Annalen Bd. 49, S. 453 ff.
Picard, Traité d'Analyse Bd. III (1896) S. 360 ff.

„ „ 143—156 vergl. Picard, Traité d'Analyse Bd. III, S. 492 ff.*)
A. Löwy, Monatshefte VIII. Jahrgang S. 225 ff.

*) Aus Anlass einer Bemerkung des Herrn Vessiot im Bulletin des Sciences Mathém. II Sér. T. XXII S. 79, Zeile 4, 5 v. u., sei erwähnt, dass dem Verfasser bei Redaction dieser Nummern der Bd. III des „Traité" des Herrn Picard nicht vorgelegen hat, wie daraus hervorgeht, dass die betreffenden Bogen 4, 5, 6 von Bd. II, 1 am 18. März, 28 März, 7 April 1896 mit „imprimatur" an die Druckerei abgingen, während die Vorrede zum Bd. III des Picard'schen „Traité" vom 25. März 1896 datirt ist. Ebenda (Bulletin a. a. O.) S. 81, Zeile 14 v. u. dürften die Worte „de M. Klein" auf einem Versehen beruhen, auch ist S. 83 Zeile 2 v. o. an Stelle von „M. Fuchs" zu setzen „M. Beke".

Zu Nr. 168, 169 **Rados**, Mathem. Annalen Bd. 48, S. 417 ff.; Értesitö der ung. Akademie Bd. XIV, S. 166 ff.

„ „ 185 **Gutzmer**, Crelle's Journal Bd. 115, S. 79 ff.; A. **Fischer**, Inaug.-Dissertation (Halle 1891).

„ „ 227 **Ritter**, Mathem. Annalen Bd. 48, S. 1 ff.

„ „ 230 **Fuchs**, Sitzungsberichte 1898 S. 222 ff.

„ „ 246 **Fuchs**, Sitzungsberichte 1897, S. 608 ff.

„ „ 255 **Richard Fuchs**, Crelle's Journal, Bd. 119, S. 1 ff. **Fuchs**, Sitzungsberichte 1898, S. 477 ff.

Nachwort.

Die folgenden Bemerkungen haben den Zweck, den Einfluss, den mein verstorbener Freund und Mitarbeiter Paul Günther auf Plan und Ausführung des nunmehr abgeschlossen vorliegenden „Handbuches“ ausgeübt hat, im Zusammenhange hervortreten zu lassen; sie geben eine detaillirte Aufzählung derjenigen Momente, durch welche Günther in die Entstehung des Werkes eingegriffen.

Im Februar 1891 entwarfen Günther und ich für das zu verfassende „Handbuch“ ein Arbeitsprogramm, zu welchem ein jeder von uns im Wesentlichen dasjenige beitrug, was sich auf die von ihm zu bearbeitenden Theile bezog. Ich gebe zunächst dieses Programm hier dem Wortlaute nach wieder. Die eingeklammerten Anfangsbuchstaben unserer Namen, (G), (S) bezeichnen die einem jeden von uns zugewiesenen Abschnitte; bei denjenigen Theilen, wo keiner der beiden Buchstaben steht (—), war die Entscheidung, wer dieselben bearbeiten sollte, noch vorbehalten. Das in [ ] Stehende habe ich der Deutlichkeit wegen hinzugefügt.

I. Band.

Historische Einleitung mit Motivirung der ausgezeichneten Stellung der linearen Differentialgleichungen; feste Verzweigungspunkte. — Existenzbeweis für homogene [lin. Differential-]Gleichungen nach Fuchs. Fundamentalsystem, lineare Substitution bei jedem Umlauf. — Formale Theorieen: Liouvilles' Sätze, adjungirte Differentialgleichungen, Vertauschung von Parameter und Argument, Appell'sche Determinanten [Fonctions invariantes], Laguerre's Invarianten unter Hinweis auf spätere Behandlung der Classeninvarianten, Irreductibilität, erster Theil der neuen Fuchs'schen Arbeiten [Sitzungsberichte der Berl. Acad. 1888 ff.], Sturm'sche Sätze aus Liouville['s Journal Bd.] I*), Reduction der nicht homogenen Differentialgl. auf homogene. — Functionentheoretische Behandlung: Verhalten der Integrale in der Umgebung eines Punktes, Fall algebraischer Coefficienten, rationaler Coefficienten, Fuchs'sche Classe, Irreguläre Integrale (G.).

*) Bemerkung Günther's in seinem Exemplar: „überhaupt wohl nicht ausführen, sondern nur citiren bei Gelegenheit der irregulären Integrale, wo von den Nullstellen derselben die Rede“.

Gruppe der Differentialgleichung; Methoden für numerische Berechnung der Substitutionscoefficienten, Riemann's Classenbegriff, zweiter Theil der neuen Fuchs'schen Arbeiten (Irreductibilität), Invarianten der Classe, Parameter der Gruppe, Constantenabzählungen, Fall, wo die Substitutionen unabhängig sind von einem in der Differentialgl. auftretenden Parameter (dritter Theil der [neuen] Fuchs'schen Arbeiten), Differentialgleichungen zweiter Ordnung möglich ohne ausserwesentlich singuläre Punkte, hypergeometrische Differentialgleichung, ihre allgemeine Integration (S.).

Ueberall convergente Darstellungen der Integrale: 1) Fuchs'sche Iteration [Annali di Matematica Ser. II, Bd. IV], Anwendung auf Bestimmung der Fundamentalgleichung, Poincaré'sche Sätze [Acta Mathem. Bd. IV, S. 212—216], 2) Darstellung durch bestimmte Integrale (Jordan, Pochhammer, Hossenfelder), Differentialgleichung der Perioden, speciell der elliptischen Integrale (I., II., III. Gattung) nach Fuchs [Crelle's Journal Bd.] 83 und neuere Arbeiten, Legendre'sche Relation und ihre Verallgemeinerung für $p = 2$ (G.).

II. Band.

Differentialgleichungen, die durch bekannte Functionen integrirbar: 1) a. mit constanten Coefficienten nebst Anwendungen*), b. Halphén's Gleichungen (G.); 2) algebraisch integrirbare a. nicht homogene (Königsberger), b. homogene (S.); 3) Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten, denen die Appell'schen Fonctions à multiplicateurs genügen, Lamé'sche Differentialgl. etc. in allgemeinster Fassung (—).

Integrale von Lösungen linearer Differentialgleichungen; 1) Fuchs, Crelle['s Journal Bd.] 76 (—); 2) Fuchs'sches Umkehrproblem für Differentialgleichungen II. Ordnung [Crelle's Journal Bd.] 89; 3) Problem der Fuchs'schen Functionen, vorher Beispiele, eindeutige Functionen [die durch Umkehrung des Integralquotienten] aus hypergeometrischen Differentialgl. [entstehen], Modulfunction, Darstellungsprincip für mehrdeutige Functionen mit endlicher Anzahl von Verzweigungspunkten, speciell der Integrale linearer Differentialgleichungen, deshalb Beschränkung auf die für diese Integration ausreichenden und einfachsten Fuchs'schen Functionen, $p = 0$, [determinirende] Fundamentalgleichungen [haben] doppelte Wurzeln, ihre ausführliche Theorie, Fonctions Θ- und Z-Fuchsiennes (S.).

Verallgemeinerung auf Functionen mehrerer Variablen, hyperelliptische Modulfunction nach Fuchs (—).

Für die „historische Einleitung" war (vergl. Bd. I, S. VI) ein Theil der Günther'schen Habilitationsvorlesung in Aussicht genommen. Da in dieser auch von partiellen Differentialgleichungen gehandelt wird, hatte Günther selbst in seinem Manuscripte die Stelle bezeichnet, bis wohin diese Vorlesung verwerthet werden sollte. Ich habe den auf gewöhnliche Differentialgleichungen bezüglichen Theil umgearbeitet,

---

*) Günther hatte namentlich den inzwischen, Crelle's Journal, Bd. 118, S. 351, und Bd. 119, S. 82 durch die Herrn Hamburger und Gutzmer herausgegebenen Existenzbeweis im Auge.

stellenweise auch ergänzt, habe es aber vermieden, über die von Günther in Betracht gezogene Materie wesentlich hinauszugehen. — In den im Vorworte zum ersten Bande erwähnten, in meinen Händen befindlichen Aufzeichnungen, hatte Günther für einige der von ihm zu bearbeitenden Theile die Disposition genauer entworfen und durch Excerpte, denen an manchen Stellen auch eigenartige Beweise hinzugefügt sind, einen Theil des Materials vorbereitet. Ich lasse hier ein Verzeichniss dieser Aufzeichnungen mit Angabe ihres Inhaltes folgen, die von mir herrührenden Bemerkungen sind in [ ] eingeschlossen.

[1]. [Vier beschriebene Quartseiten enthaltend eine Disposition für diejenigen Kapitel, die im Handbuche direct auf die historische Einleitung folgen sollten; darunter ausgeführt ein] directer Beweis des Satzes: „Wenn die Determinante von n Functionen gleich Null ist, besteht eine lineare Relation“ [der Beweis ist ein Inductionsschluss von $n - 1$ auf n, nach ähnlichem Principe wie bei Baltzer, Determinanten (1881), S. 78 ff. von 2 auf 3 geschlossen wird].

[2]. [Ein Heft mit circa 20 beschriebenen Quartseiten enthaltend Disposition und Material für die formalen Theorieen, ich gebe die Ueberschriften mit Inhaltsangabe wieder]:

I. Die Analogieen mit algebraischen Gleichungen.

Schon früh bekannt (Lagrange etc.).

A. Die Coefficienten der linearen Differentialgleichungen ausdrückbar durch die Integrale $y_1, \cdots y_n$ [eine halbe Seite].

B. Der Appell'sche Satz [drei Seiten, nach Appell, Annales de l'École Normale II. Sér. Bd. 10, S. 400, 401, 394, 397].

C. Gemeinsame Lösungen linearer Differentialgleichungen. Irreductibilität [vier Seiten, nach Frobenius, Crelle's Journal Bd. 76, S. 256—258, 243—244].

D. Erniedrigung der Ordnung der Differentialgleichung, wenn einige Integrale bekannt sind [nur wenige Zeilen, beginnt mit:] Setze $y = y_1 \int z\,dx$ [u. s. w., dann folgt eine Formel nach Thomé, Crelle's Journal Bd 75, S. 267].

E. Die symbolische Factorenzerlegung linearer Differentialausdrücke [etwa eine und eine halbe Seite, in eigenartiger Darstellung, vgl. Nr. 19, Bd. I, S. 50—52 Zeile 7 v. o. des Handbuches].

II. Die adjungirte Differentialgleichung [etwa elf Seiten, beginnt mit eigenartigen Betrachtungen, die im Handbuche Bd. I, Nr. 21, S. 56 Zeile 5 v. o. bis S. 57 Zeile 3 v. u., S. 58 Zeile 13 v. o. bis S. 59, Zeile 19 v. u., und hieran anschliessend Nr. 22, S. 61 Zeile 11 v. o. bis Schluss der Nummer verwerthet sind; das Uebrige nach Frobenius, Crelle's Journal Bd. 77, S. 246—249, 256; auf den beiden letzten Seiten wird mit Hülfe des Appell'schen Satzes gezeigt, dass die Coefficienten der adjungirten Differentialgleichung sich rational aus denjenigen der gegebenen Differentialgleichung und ihren Ableitungen zusammensetzen (was im „Handbuche“ ebenfalls verwerthet ist), die explicite rationale Form des adjungirten Differentialausdruckes wird dann in der gewöhnlichen Lagrange'schen Weise hergestellt].

III. [Eine Bemerkung von etwa 6 Zeilen, woraus hervorgeht, dass der erste Theil der Fuchs'schen Arbeiten aus den Sitzungsberichten von 1888 jetzt direct

an die Theorie der adjungirten Differentialgleichung angeknüpft und auch dabei der Appell'sche Satz benützt werden sollte; vergl. für I E, II, III die von mir herausgegebene Notiz, Crelle's Journal Bd. 117, S. 168].

[3]. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen I [ein Heft mit etwa 14 beschriebenen Quartseiten enthält:]

I. Multiplicatoren, adjungirte Differentialausdrücke [etwa drei Seiten, eingelegt ein mit Bleistift beschriebenes Blättchen].

II. Zusammensetzung von Differentialausdrücken [eine halbe Seite, Hinweis auf Floquet, Annales de l'École Normale Sér. II, Bd. 8, Suppl. S. 40 ff.].

III. Die determinirende Function [eine und eine halbe Seite, enthält die Definition der determinirenden Function auch im Falle, wo nicht reguläre Integrale vorhanden sind, Beziehung zwischen den determinirenden Functionen adjungirter Differentialausdrücke und solcher, die aus anderen Differentialausdrücken zusammengesetzt sind, alles nach Frobenius, Crelle's Journal Bd. 80, S. 317 ff.].

IV. Reguläre Integrale [vier Seiten, wesentlich nach Frobenius a. a. O., ferner die Methode von Thomé zur Entscheidung darüber, ob sich ein Differentialausdruck P in der Form $P = AB$ darstellen lässt, wo B ein durchweg regulärer Differentialausdruck ist und A rationale Coefficienten besitzt].

V. Normale Differentialausdrücke und normale Integrale [vier und einhalb Seiten, Begriff des normalen Differentialausdrucks, fundamentalen determinirenden Factors u. s. w.; der determinirende Factor ist eindeutig bestimmt; die Bestimmung der fundamentalen determinirenden Factoren (nur angedeutet), Differentialausdrücke, die aus normalen zusammengesetzt sind, normale Integrale, ihre Werthberechnung, alles nach Thomé angedeutet; auf den letzten anderthalb Seiten, Anwendung eines der Inauguraldissertation Günther's entnommenen Verfahrens auf gewisse aus normalen Differentialausdrücken zusammengesetzte Differentialausdrücke; vergl. hierfür die Nummern 97, 98 des Handbuches sowie den Schluss der von mir herausgegebenen Arbeit Günther's, Crelle's Journal Bd. 119, S. 330 ff.]

[4]. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen II [etwa drei und einhalb beschriebene Quartseiten, enthält:]

I. Zusammensetzung von Differentialausdrücken [eine halbe Seite].

II. Multiplicatoren und adjungirte Differentialausdrücke [etwa drei Seiten, beides wesentlich nach Frobenius, Crelle's Journal Bd. 76].

[5]. Aus Abhandlungen von Frobenius [20 beschriebene Quartseiten, enthält:] a) Ueber Irreductibilität linearer Differentialgleichungen, Crelle's Journal, Bd. 76, pg. 236 [auf sieben und einhalb Seiten, nach S. 236—259 der genannten Abhandlung]; b) Zusammenhang der Differentialgleichung mit der Differentialgleichung ihrer Multiplicatoren [sechs und einhalb Seiten, nach Crelle's Journal Bd. 77, S. 248—257; Bd. 80, S. 319 ff.; Bd. 76, S. 261—263]; c) Ueber die regulären Integrale der linearen Differentialgleichungen [sechs Seiten, nach Crelle's Journal Bd. 80, S. 317 ff.].

[6]. [Excerpt aus] Heun, Americ. Journal, Bd. X, S. 205—224 [vier beschriebene Quartseiten].

[7]. Aus Jordan Cours d'Analyse III. [1887] a) Integralgruppen bei gleichen Wurzeln der Fundamentalgleichung, S. 173 ff. [vier beschriebene Quartseiten und ein eingelegtes Blättchen]; b) Integration linearer Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale, S. 241 ff. [etwa drei beschriebene Quartseiten; auf einem eingelegten Blättchen die Bemerkung:]

Nach Euler setzt man an

$$y = P(x) \int_{u_0}^{u_1} e^{u\,Q(x)}\, u^{\alpha-1}\, (1-u)^{\beta-1}\, du.$$

Dann wird

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = \int_{u_0}^{u_1} du\, \{ P''(x) + P'(x)\,(1 + u \cdot Q'(x)) +$$

$$P(x)\,[u \cdot Q''(x) + u^2 \cdot Q'(x)^2] + p(x)\,[P'(x) + u \cdot P(x) \cdot Q'(x)]$$

$$+ q(x) \} \cdot e^{u \cdot Q(x)} \cdot u^{\alpha-1} \cdot (1-u)^{\beta-1}.$$

Dies muss gleich:

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{d}{du} \{ R(x, u)\, e^{u \cdot Q(x)} \cdot u^{\alpha}\, (1-u)^{\beta} \}\, du$$

werden.

[8]. Herleitung der Bedingungen für den Fortfall der Logarithmen in einer zu gleichen Wurzeln der Fundamentalgleichung gehörigen Integralgruppe für reguläre lineare Differentialgleichungen, nach Andeutung von Hamburger [fünf und einhalb beschriebene Quartseiten; ein wie es scheint nicht ganz zu Ende geführter Ansatz].

[9]. Ungedrucktes aus meiner Dissertation [zehn beschriebene, zum Theil aber wieder durchstrichene Foliospalten, vergl. die von mir herausgegebene Arbeit Günther's in Crelle's Journal, Bd. 119, S. 330ff.].

Als nach dem am 27. September 1891 erfolgten Hinscheiden Günther's die Ausführung auch der ihm zugedachten Abschnitte des Handbuches mir zufiel, konnte ich zwar nicht durchweg, aber doch bei einigen Theilen dieser Abschnitte die Disposition des Arbeitsprogramms innehalten, namentlich auch bei einigen der Kapitel, auf die sich die nachgelassenen Aufzeichnungen beziehen, den Entwürfen Günther's folgen. Die folgende Zusammenstellung wird einerseits diese Theile und Kapitel hervorheben und soll andererseits — nachdem Stellen, wo ich in den nachgelassenen Aufzeichnungen enthaltene, eigenartige Entwickelungen Günther's verwerthet habe, bereits im ersten Bande bezeichnet wurden — auf die Nummern hinweisen, die nach Abhandlungen bearbeitet sind, für welche mir die Excerpte Günther's zu Gebote standen.

In der „Einleitung“ und dem „ersten Abschnitte“ sind die Nummern 5, 8—12 im Sinne des Arbeitsprogramms gehalten; in der Nr. 5 (Bd. I, S. 13 die 12 letzten Zeilen), Nr. 8 (ebenda, S. 19 Zeile 15 v. o. bis Schluss der Nummer auf S. 20), ferner in den Nummern 11, 12 bei der Begriffsbestimmung eines Fundamentalsystems ist der in [1] und [2] I, A des Günther'schen Nachlasses angedeutete Gedankengang befolgt.

Die „formalen Theorieen" haben im Wesentlichen das Gepräge erhalten, welches ihnen Günther, nach dem Arbeitsprogramme und den Theilen [2], [3] I, II, [4], [5] a), b) des Nachlasses zu geben beabsichtigt hat. Die Nummern 15—19, 21—23 und ein Theil von Nr. 2[illegible] (Bd. I, S. 76, 77) sind im Sinne der Günther'schen Disposition ausgeführt; ein Theil des für diese Nummern erforderlichen Materials (Bd. I. Nr. 15, S. 40—42; Nr. 16, S. 43 Zeile 5 v. u. bis Schluss der Nr. 17 auf S. 46; Nr. 19, 21, 22, 23 bis S. 64 Zeile 14 v. o.; Nr. 26, S. 76; Nr. 27, S. 84—85 Zeile 5 v. o.) war in den Aufzeichnungen Günther's auch vollständig vorbereitet.

Von den auf das „Verhalten der Integrale in der Umgebung eines Punktes" bezüglichen Theilen des Günther'schen Nachlasses kamen für die Nummern 92 (bis S. 332 Zeile 16 v. u.) und 93 (bis S. 336 Zeile 8 v. o.) die Theile [3] III, IV, [5] c) in Betracht, ferner sind die Nummern 97 (von S. 348 Zeile 8 v. o. ab) und 98 wesentlich im Anschlusse an [3] V des Nachlasses ausgeführt.

Bei der Ausarbeitung des Abschnittes „über allgemein gültige Darstellungen der Integrale" habe ich der Disposition des Arbeitsplanes nur zum Theil folgen können, indem einerseits die Poincaré'schen Untersuchungen über die Laplace'sche Transformirte aufgenommen werden mussten, und andererseits die inzwischen entstandenen Untersuchungen über die Euler'sche Transformirte einen besonderen Abschnitt (den zwölften) erforderten.

Auf die Beziehungen der übrigen Abschnitte des Handbuches zu der im Arbeitsprogramme vorgesehenen Disposition brauche ich *nicht* weiter einzugehen, da es nur darauf ankam festzustellen, inwieweit die wesentlich auf Günther's Initiative zurückzuführenden Theile des Programms die Ausführung des Werkes beeinflusst haben.

Klausenburg, im Juni 1898.

Ludwig Schlesinger.

Register der angewandten Bezeichnungen.

